



HAL
open science

Modélisation des interactions champs - structures par une méthode de Galerkin discontinue pour des applications du génie électrique

Abelin Kameni

► **To cite this version:**

Abelin Kameni. Modélisation des interactions champs - structures par une méthode de Galerkin discontinue pour des applications du génie électrique. Energie électrique. Université de Paris-Saclay, 2019. tel-04534218

HAL Id: tel-04534218

<https://theses.hal.science/tel-04534218>

Submitted on 5 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École doctorale EOBE (ED 575)

Laboratoire Génie électrique et électronique de Paris (UMR 8507 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Génie électrique

par

Abelin KAMENI NTICHI

Modélisation des interactions champs - structures par une
méthode de Galerkin discontinue pour des applications
du génie électrique

Travaux soutenus le 28 juin 2019 devant le jury composé de :

CHRISTOPHE GEUZAINÉ	Professeur des universités	Examineur
JEAN LEVEQUE	Professeur des universités	Examineur
LIONEL PICHON	Directeur de recherche	Examineur
FRANÇOIS PIRIOU	Professeur des universités	Rapporteur
ALAIN REINEIX	Directeur de recherche	Rapporteur
HÉLÈNE ROUSSEL	Professeur des universités	Examinatrice
BENOIT VANDERHEYDEN	Professeur des universités	Rapporteur

Table des matières

1	Informations Générales	3
1.1	Fiche synthétique	4
1.2	Curriculum Vitae	5
1.3	Thèse de doctorat	6
1.4	Résumé des Activités d'enseignement	7
1.4.1	Contenu des enseignements	7
1.4.2	Activités administratives	8
1.5	Résumé des activités de recherche	9
1.5.1	Contexte	9
1.5.2	Synthèse des contributions	10
1.5.3	Collaborations scientifiques	15
1.5.4	Activités d'intérêt collectif	17
1.5.5	Activités d'encadrement	17
1.5.6	Publications scientifiques	19
2	Calcul des champs rayonnés en compatibilité électromagnétique	28
2.1	Introduction	29
2.2	Formulation du système différentiel	31
2.2.1	Les équations de Maxwell	31
2.2.2	Formulation faible du problème	31
2.3	Flux caractéristiques aux interfaces	32
2.3.1	Invariants de Riemann	33
2.3.2	Flux numériques	35
2.3.3	Conditions aux bords	37
2.4	Condition d'absorption pour les problèmes de diffraction	38
2.4.1	Les parois absorbantes	39
2.4.2	Les couches parfaitement absorbantes	40
2.4.3	Optimisation des couches PML	41
2.5	Schéma numérique pour l'évolution temporelle	49
2.5.1	Les méthodes de Runge-Kutta implicites et explicites	49
2.5.2	Runge-Kutta explicite avec pas de temps local	51
2.6	Modélisation de boîtiers de blindage	57
2.6.1	Interface simulant les plaques minces homogènes	57
2.6.2	Modélisation 3D de boîtiers à parois composites	63

2.7	Diagnostic de réseau filaire	70
2.7.1	Modèle de réflectométrie pour la caractérisation des défauts non-francs	71
2.7.2	Evaluation des paramètres électriques équivalent	77
3	Calcul des champs induits dans les matériaux supraconducteurs	85
3.1	Introduction	86
3.2	Modélisation numérique des supraconducteurs	88
3.2.1	Loi de comportement électrique des supraconducteurs HTC	88
3.2.2	Formulations pour le calcul de champs électromagnétiques dans les supraconducteurs HTC	88
3.2.3	Linéarisation de la loi constitutive	90
3.3	Méthodes avec flux pour le calcul de champs dans les supraconducteurs	91
3.3.1	Méthode des volumes finis	92
3.3.2	Méthode de Galerkin discontinue	98
3.4	Modélisation des câbles supraconducteurs torsadés	114
3.4.1	Modèle équivalent des filaments torsadés	115
3.4.2	Réduction du modèle équivalent	120
4	Perspectives	127
4.1	Introduction	128
4.2	Modélisation de systèmes complexes	128
4.2.1	Méthode de décomposition de domaine	129
4.2.2	Méthode d'analyse d'incertitudes	129
4.3	Transmission d'énergie pour l'alimentation des systèmes	130
4.3.1	Transmission d'énergie sans fil	131
4.3.2	Transmission d'énergie sans pertes : câbles supraconducteurs	132

Chapitre 1

Informations Générales

Sommaire

1.1	Fiche synthétique	4
1.2	Curriculum Vitae	5
1.3	Thèse de doctorat	6
1.4	Résumé des Activités d'enseignement	7
1.4.1	Contenu des enseignements	7
1.4.2	Activités administratives	8
1.5	Résumé des activités de recherche	9
1.5.1	Contexte	9
1.5.2	Synthèse des contributions	10
1.5.3	Collaborations scientifiques	15
1.5.4	Activités d'intérêt collectif	17
1.5.5	Activités d'encadrement	17
1.5.6	Publications scientifiques	19

1.1 Fiche synthétique

Abelin KAMENI NTICHI - 39 ans

Maître de conférences à l'*Université Paris-Sud*

Chercheur au *Laboratoire de Génie électrique et électronique de Paris (GeePs)*

Formations et diplômes

2005-2009 : Thèse de doctorat en Génie électrique, université Henri-Poincaré de Nancy

2004-2005 : Master Recherche de Mathématiques appliquées, université de Bordeaux I

2000-2004 : Ingénieur MATMECA, université de Bordeaux I

Activités d'enseignement

Depuis 2010 : Université de Paris-Sud 192h/an

UFR des Sciences et Polytech'Paris-Sud

Génie électrique, Electronique, Mécanique, Simulation numérique

2005-2009 : Université Henri-Poincaré de Nancy 300h

Génie électrique, Mécanique

Activités de recherche

Calcul de champs électromagnétiques pour le génie électrique

Mes travaux de recherches portent sur l'évaluation des champs électromagnétiques dans les dispositifs du génie électrique, plus particulièrement sur l'étude des problèmes de compatibilité électromagnétique rayonnée et sur la caractérisation des matériaux supraconducteurs. Ils abordent à la fois, les aspects numériques à travers l'implémentation des outils numériques pour la simulation, et les applications par la mise en place des modèles permettant de répondre à certaines problématiques industrielles.

Publications

Articles dans revues internationales : 26

Actes de colloques internationaux avec comité de lecture : 37

Colloques nationaux avec actes : 7

Activités d'intérêt collectif

Responsable du recrutement des doctorants enseignants en Physique et Sciences de l'ingénieur.

Coordinateur de la 4ième année du cycle d'ingénieur de Polytech'Paris-Sud.

Rapporteur occasionnel pour les revues *IEEE Tran. Magn*, *IEEE Appl. Supercond*, *IEEE EMC*.

1.2 Curriculum Vitae

Abelin KAMENI NTICHI né le 04 novembre 1979 (39 ans)

Adresse professionnelle : Laboratoire Génie électrique et électronique de Paris (GeePs),

CNRS/ CentraleSupélec/ Univ. Paris-Sud/ Université Paris-Saclay/ Sorbonne Université,

3 & 11 rue Joliot-Curie, Plateau du Moulon, 91192 Gif-Sur-Yvette Cedex

Tel : 01.69.85.16.66 - Fax : 01.69.41.83.18

Maître de conférences à l'université de Paris-Sud

Chercheur au laboratoire Génie Electrique et Electronique de Paris (GeePs)

Formation

2005 - 2009 Doctorat en génie électrique

Groupe de Recherche en Electronique et Electrotechnique de Nancy (GREEN)

2004 - 2005 Master Recherche de Mathématiques Appliquées

Université de Bordeaux I

2003 - 2004 Master Recherche de Mécanique Physique

Université de Bordeaux I

2000 - 2004 Cycle ingénieur MATMECA

Ecole d'ingénieur en Modélisation Mathématique et Mécanique

Université de Bordeaux I

1997 - 2000 Classes préparatoires scientifiques

Lycée Kérichen de Brest

Expérience professionnelle

Depuis 1/09/2010 : Maître de conférences de l'université de Paris-Sud

Chercheur au laboratoire Génie électrique et électronique de Paris (GeePs)

Pôle physique et ingénierie de l'électromagnétisme (PIEM)

depuis 09/2013 Responsable du recrutement des doctorants enseignants en Physique/SI

depuis 02/2018 Responsable de la 4^{ème} année du cycle ingénieur de Polytech 'Paris-Sud

10/2009-09/2010 : Ingénieur de Recherche à l'université de Liège, Belgique

Institut Montéfiore, équipe Applied Computational Electromagnetics (ACE)

10/2008-08/2009 : Attaché Temporaire d'Education et de Recherche (ATER)

Université Henri Poincaré de Nancy - GREEN

10/2005-09/2008 : Allocataire de Recherche (MENRT) et Doctorant enseignant (Moniteur)

Université Henri Poincaré de Nancy - GREEN

1.3 Thèse de doctorat

Période :	2005-2009
Spécialité :	Génie électrique
Laboratoire :	Groupe de Recherche en Electronique et Electrotechnique de Nancy (GREEN)
Titre :	Etude par des méthodes analytiques et numériques de la répartition des champs induits dans les supraconducteurs à haute température critique
Soutenance :	24 juin 2009
Composition du jury :	
Rapporteurs :	Frédéric BOUILLAULT, Professeur, Université de Paris-Sud Gérard MEUNIER, Directeur de recherche CNRS, ENSIEG-INPG Grenoble
Examineurs :	Christophe GEUZAINÉ, Professeur, Université de Liège Bertrand DUTOIT, Docteur, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Encadrants :	Denis NETTER, Professeur, Université Henri-Poincaré de Nancy Bruno DOUINE, Maître de conférences, Université Henri-Poincaré de Nancy

Résumé : Les travaux réalisés dans cette thèse ont pour but de décrire l'évolution des champs induits dans les matériaux supraconducteurs à haute température critique dont le comportement électrique est donné par une relation de type puissance $E \sim J^n$. Ces travaux s'articulent autour de la résolution d'un problème de diffusion non linéaire issu du couplage de cette loi constitutive aux équations de Maxwell. Dans une première partie, on utilise une approche analytique basée sur le principe d'auto-similarité pour résoudre ce problème en 1D et caractériser la pénétration de la densité de courant dans une plaque supraconductrice. Cette solution nous permet de valider la méthode numérique mixte éléments finis-volumes finis (FEM-FVM) proposée pour les cas bi-dimensionnels. Dans cette approche numérique, une technique de linéarisation est introduite pour faire face aux difficultés dues à l'exposant n de la caractéristique $E(J)$. Grâce à cette approche numérique on a pu mettre en évidence l'influence de la vitesse de variation d'une source imposée sur l'aimantation et la dissipation dans ces matériaux.

Mots clés : Equations de Maxwell, supraconducteurs à haute température critique, aimantation, pertes, volumes finis, éléments finis, auto-similarité.

Valorisation : [RI.27], [RI.26], [RI.25]

1.4 Résumé des Activités d'enseignement

J'ai découvert l'enseignement universitaire durant ma thèse de doctorat par le biais d'un contrat de moniteur portant sur un service de 64h/an. Durant ces 3 ans de monitorat, j'ai dispensé des Travaux Dirigés (TD) et Travaux Pratiques (TP) aux étudiants de Licence et Master du parcours Electricité Electronique et Automatique (EEA) de l'UFR des Sciences et Technique de l'université de Nancy. Cette expérience en tant que moniteur m'a permis de me faire une première idée du métier d'enseignant-chercheur, car il a fallu combiner travaux de recherche et mission d'enseignement. Par la suite, j'ai occupé pendant une année universitaire un demi-poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (ATER) portant sur un service de 96h/an.

Après un séjour post-doctoral en Belgique, j'ai été recruté comme maître de conférences à l'université de Paris-Sud avec affectation au département de physique de l'UFR des sciences pour la partie enseignement. Mon service de 192h/an se répartit entre Cours (CM), travaux Dirigés (TD), travaux Pratiques (TP) et Charges pédagogiques. Les étudiants concernés sont essentiellement ceux du cycle Licence.

1.4.1 Contenu des enseignements

— **UFR des sciences et Techniques de l'université de Nancy 2005 – 2009 (288h/Total)**

Parcours : Electricité Electronique et Automatique (L1, L2, L3, M1)

Matières	Public	Nombre d'heures	Type de séances
Circuits électriques	L1, L2	96h	TD, TP
Electromagnétisme	L2	48h	TD
Mécanique du point	L2	60h	TD
Electronique de puissance	L3	48h	TP
Outils informatique	M1	36h	TP

— **UFR des sciences de l'université de Paris Sud, depuis 2010 (\geq 192h/an)**

Parcours : Electricité Electronique et Automatique (L3 EEA)

Physique Chimie (L3PC)

Techniques de Production de l'Energie (L3pro TPE)

Physique Chimie Sciences de la Terre (L1 PCST)

Maths Physique Informatique (L1 MPI)

— **Ecole d'ingénieur Polytech'Paris-Sud, depuis 2016 (32h/an)**

Parcours : Cycle ingénieur 3ième année (Et3)

Matières	Public	Nombre d'heures	Type de séances
Electronique analogique	L3	96h	TD, TP
Mécanique du point	L1	52h	TD
Simulation numérique	L3, L3pro	64h	CM, TD, TP

Matières	Public	Nombre d'heures	Type de séances
Introduction aux ondes	Et3	32h	CM, TD

1.4.2 Activités administratives

1. Responsable du recrutement des Doctorants chargé d'une mission d'enseignement en Physique et Sciences de l'ingénieur (depuis 2013)
 - ▷ Collecte des dossiers de candidature
 - ▷ Organisation de la commission de sélection des candidats
 - ▷ Gestion et suivi des affectations
 - ▷ Interlocuteur Doctorants enseignants – Service administratif
2. Coordinateur 4^{ième} année de l'école d'ingénieur Polytech' Paris-sud (depuis 2017)
 - ▷ Mise en place et gestion de l'emploi du temps
 - ▷ Gestion des réservations des salles d'enseignements
 - ▷ Création et répartition des groupes TD et TP
 - ▷ Organisation des jurys de semestres
 - ▷ Interlocuteur Etudiants – Equipe de direction - Enseignants

1.5 Résumé des activités de recherche

J'effectue mes travaux de recherche au laboratoire Génie électrique électronique de Paris (GeePs) dans le pôle Physique et Ingénierie de l'Electromagnétisme (PIEM) sur le domaine de la modélisation des interactions entre les champs, les matériaux et les systèmes. Le fil conducteur de mes travaux de recherche est la mise en place de modèles numériques pour le calcul des champs électromagnétiques dans les dispositifs du génie électrique. Dans ce qui suit, je présente le contexte général de mes activités de recherche et les principales thématiques abordées.

1.5.1 Contexte

Avec l'augmentation de la population mondiale, les dispositifs électromagnétiques présents dans les domaines, du transport, de la communication, ou encore de la santé sont de plus en plus complexes. Leur élaboration nécessite la réalisation et la maîtrise des étapes telles que, la caractérisation des matériaux utilisés, le dimensionnement et la fabrication des prototypes, ou encore les tests d'utilisation dans un environnement réel. Ce travail ne peut se faire uniquement sur la base de l'expérimentation car trop coûteuse en temps et en ressources. La mise en place des modèles de simulation pour aider à la caractérisation des matériaux, à la conception des systèmes, au dimensionnement des prototypes, est devenu indispensable pour le développement des applications du génie électrique. Concevoir des modèles de simulation, en s'appuyant d'une part sur une description mathématique des phénomènes physiques mis en jeu et d'autre part sur les outils et méthodes numériques permettant de résoudre les systèmes d'équations obtenus, est un enjeu important auquel doivent faire face les chercheurs, les ingénieurs et les industriels. Le développement et la diversification des outils de simulation numérique dans le domaine de l'électromagnétisme appliqué constitue aujourd'hui un axe important de la recherche en génie électrique. Le laboratoire de Génie électrique et électronique de Paris (GeePs) auquel j'appartiens est un acteur majeur de la recherche dans ce domaine en France et jouit d'une certaine renommée internationale. Les travaux qui y sont développés concernent les domaines de l'électronique, l'électromagnétisme et l'énergie. Depuis plusieurs années, ce laboratoire a acquis une expertise en modélisation dont on se sert pour traiter diverses problématiques industrielles. Celles liées à l'électromagnétisme sont traitées dans le pôle PIEM, dont les activités vont du matériau au système en couvrant les domaines de fréquences s'étalant du statique au TeraHertz [32, 118]. Dans ce pôle sont menés des travaux autour de la modélisation et la caractérisation des matériaux tels que, les matériaux magnétiques [33, 97], les matériaux composites [81, 85], ou encore des matériaux supraconducteurs [RI.16, RI.5]. Autour de ces travaux sur les matériaux, des études sont réalisées sur diverses problématiques, par exemple sur le contrôle électromagnétique des matériaux [31], la compatibilité électromagnétique des systèmes [7], ou encore l'exposition de

l'homme au rayonnement électromagnétique [34, 27], avec comme objectif final la réalisation de dispositifs permettant de répondre à des besoins industriels spécifiques [49]. Les travaux que je mène au sein du GeePs s'inscrivent parfaitement dans les problématiques traitées dans le pôle PIEM. La diversité des sujets traités dans ce pôle, des méthodes employées et des chercheurs avec qui je discute au quotidien constitue un apport considérable dont je bénéficie. Durant ces années passées au GeePs, j'ai ainsi pu acquérir une certaine expertise sur la modélisation des interactions entre les champs électromagnétiques et les structures.

1.5.2 Synthèse des contributions

Ma contribution porte particulièrement sur la modélisation des interactions entre les champs électromagnétiques avec les matériaux et les structures. Elle s'appuie essentiellement sur des modèles d'évaluation des champs électromagnétiques. Mon travail est axé sur le développement des outils numériques et la mise en place des modèles d'applications en relation avec des problématiques industrielles. Les développements réalisés concernent autant des applications en haute fréquence, comme par exemple la protection des systèmes d'électronique embarquée, que des applications en basse fréquence comme par exemple les câbles supraconducteurs de transport d'énergie électrique.

L'ensemble des travaux réalisés en haute fréquence nécessite l'évaluation des champs rayonnés, thème sur lequel j'ai travaillé et apporté des contributions notamment sur des problématiques liées à la compatibilité électromagnétique [RI.11, RI.21], le contrôle électromagnétique des systèmes [RI.7, RI.4, CI.9] ou encore les télécommunications [RI.8, RI.3]. Quant aux travaux réalisés en basse fréquence, ils se situent autour des matériaux supraconducteurs [RI.17, RI.5, RI.6], avec comme principal objectif, l'évaluation des grandeurs induites nécessaires au dimensionnement des dispositifs tels que les câbles de transport d'énergie, les moteurs supraconducteurs, les limiteurs de courant ou encore les aimants à forts champs utilisés dans certains dispositifs médicaux (appareils IRM).

Champs rayonnés : compatibilité et contrôle électromagnétique des systèmes.

Avec le développement des nouvelles technologies de plus en plus complexes, les problématiques liées à la maintenance et à la cohabitation des systèmes deviennent des points clés à maîtriser pour s'assurer du bon fonctionnement des dispositifs. La maintenance d'un système passe par la détection, la localisation et la réparation des pannes qu'il peut subir. La maintenance peut s'avérer être cruciale, notamment lorsque la sécurité des personnes est en jeu. La maintenance hors fonctionnement des systèmes constitue le moyen classique pour éviter les pannes entraînant les dysfonctionnements. Malheureusement démonter l'ensemble du dispositif pour le contrôler s'avère très coûteux voire impossible à réaliser dans de nombreux cas. Les techniques

de contrôle électromagnétique peuvent être mises en place afin de localiser la panne et ainsi cibler la zone d'intervention, ce qui permet d'éviter le démontage total du système. Lorsque les dispositifs cohabitent dans un même environnement, ils se comportent comme émetteurs et récepteurs de signaux électromagnétiques pouvant créer des dysfonctionnements allant jusqu'à l'arrêt complet du système.

Il est clair que l'étude des interactions entre les champs électromagnétiques avec les systèmes est au coeur des thématiques de contrôle et compatibilité électromagnétique. C'est pour répondre à des besoins industriels bien identifiés autour de ces thèmes que je développe des modèles numériques de calcul de champs électromagnétiques rayonnés.

La partie centrale de mes travaux dans sur ces thèmes porte sur le développement d'outils numériques pour l'évaluation des champs électromagnétiques en haute fréquence via la résolution des équations de Maxwell. Les méthodes classiques telles que la méthode des différences finies [53], la méthode des éléments finis [76], la méthode des volumes finis [83] ou encore la méthode des moments [120], sont celles généralement implémentées pour mener cette résolution. Avec l'augmentation de la taille des systèmes et la complexification des dispositifs à modéliser, ces approches numériques peuvent dans certain cas s'avérer inadaptées pour mener à bien les simulations numériques souhaitées. En effet lorsque la résolution nécessite des inversions matricielles, comme c'est le cas avec la méthode des éléments finis et la méthode des moments, le coût de calcul est très impacté par l'augmentation du nombre d'inconnues du système. Pour réduire les coûts notamment des inversions matricielles, on a généralement recours à des développements supplémentaires, parmi lesquelles on peut citer le calcul parallèle sur architecture multi-coeurs de type CPU ou GPU [6, 13] et les techniques de compression matricielle [16]. La méthode des différences finies qui est la méthode la plus utilisée pour la simulation des phénomènes de propagation d'ondes en domaine temporel ne requiert pas d'inversion matricielle. Elle est généralement associée à des schémas numériques de type saute-mouton et constitue une approche numérique rapide et simple à mettre en oeuvre [53]. Elle a été généralisée sur des maillages duaux et est connue sous le nom de "Finite Integration Technique" [28, 121]. Mais, l'efficacité des approches différences finies repose sur l'utilisation des maillages cartésiens réguliers qui malheureusement sont peu adaptés pour traiter les géométries complexes présentant notamment des courbures. Dans le cas de ces géométries complexes, pour préserver la convergence, la précision et la rapidité de ce type de méthode on a recourt à des développements supplémentaires comme par exemple, le raffinement local [30], l'élévation de l'ordre [122], la parallélisation sur architecture CPU ou GPU [71, 68].

D'une manière générale, on constate que l'utilisation des approches classiques que sont les méthodes des éléments finis, des différences finies, des volumes finis et aussi celle des moments pour modéliser des systèmes complexes nécessitent souvent d'important développement

supplémentaires qui dans certains cas sont très difficiles à implémenter. Mettre en place de tels développements demande de monopoliser d'important moyens humains et matériels dans le domaine du calcul scientifique haute performance, ce qui est du ressort des laboratoires et équipes de recherche dont les activités et le personnel ont une forte orientation vers les mathématiques appliqués.

Mes travaux sur le développement des outils numériques s'appuient sur des collaborations avec des équipes de recherche plutôt très "numériciennes", notamment avec, l'équipe "Applied Computational Electromagnetics" du Pr Geuzaine de l'université de Liège et l'équipe "Applied mechanics and mathematics" du Pr Remacle de l'université de Louvain-la-neuve. Ces collaborations font suite à mon post-doc effectué à l'université de Liège, durant lequel j'ai participé à la mise en place d'outils de modélisation basés sur les méthodes éléments finis continus et discontinus. Ayant participé durant ce post-doc au développement d'un code de calcul Galerkin discontinu, j'ai adopté cette méthode pour les simulations des phénomènes de propagation en domaine temporel car elle présente de nombreux avantages, elle est notamment bien adaptée à l'utilisation des maillages non conformes et à la mise en place du calcul parallèle [51].

Cette technique qui a connu un essor important avec le développement des architectures multi-cœurs des ordinateurs présente alors un intérêt certain pour la modélisation des grands systèmes. Elle a été introduite initialement pour la résolution de l'équation de transport en neutronique [82], puis a été implémentée en mécanique des fluides pour la résolution des équations de conservation [29, 87]. Son utilisation dans le domaine du génie électrique s'est intensifiée durant la dernière décennie. Cette approche combine les règles de discrétisation des méthodes éléments finis et volumes finis. Elle consiste à résoudre le problème localement sur chaque élément du maillage par une approche éléments finis, et à utiliser des termes de flux aux interfaces pour décrire les échanges entre éléments comme en volumes finis. L'aspect résolution locale sur chaque élément du maillage, simplifie l'utilisation des éléments d'ordre élevé ce qui permet d'éliminer les oscillations numériques et d'améliorer la précision des résultats.

Après l'implémentation de cette méthode, nous avons travaillé sur des techniques à lui associer afin de réduire le coût des simulations. Des couches parfaitement absorbantes que nous avons optimisées pour les simulations des problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques sont introduites dans nos modèles pour tronquer le domaine de calcul afin de simuler uniquement les zones présentant un intérêt, ce qui réduit considérablement la taille des maillages et le temps de calcul [RI.22]. Dans de nombreux cas simulés, l'intégration temporelle se fait grâce à des schémas numériques explicites. Ces approches explicites possèdent une contrainte forte sur le pas de temps, car pour garantir la convergence du schéma numérique, le pas de temps utilisé dans les simulations est celui calculé à partir de la taille du plus petit élément du maillage. Cette contrainte conduit à des temps de calcul très importants lorsque la géométrie à traiter présente des petits détails nécessitant l'utilisation d'éléments de maillage très petits. Pour réduire le coût

de calcul dû à cette contrainte, nous avons travaillé sur des schémas numériques dit à pas de temps local comme l'approche "multirate explicite" que nous avons implémentée afin de pouvoir faire des simulations explicites avec un pas de temps supérieur à celui calculé sur le plus petit élément du maillage [RI.12]. Ces outils numériques développés servent à la mise en place des modèles d'applications liés à des problématiques industrielles notamment sur les thématiques de contrôle et de compatibilité électromagnétique des systèmes.

Sur le thème de la compatibilité électromagnétique, les approches numériques mises en place ont servi d'outils de calcul pour les travaux de thèse de Mohamed Boubekour sur la modélisation des boîtiers dédiés à électronique embarquée dans l'automobile ou l'aéronautique [18]. Cette thèse a été réalisée pour répondre à la problématique du dimensionnement des nouveaux boîtiers d'équipements dont les parois sont en matériaux composites. En effet, par soucis de gain de poids et de place, ces boîtiers ont des parois de plus en plus fines et sont fabriqués avec des matériaux hétérogènes plus légers et ayant de bonnes propriétés de blindage. Pour réduire les coûts de développement de ce type de boîtiers, la modélisation numérique est nécessaire. Afin de disposer de modèles numériques peut coûteux en temps de calcul, on doit faire face à la prise en compte de milieux de faible épaisseur qui nécessitent l'utilisation de maillage très fins conduisant à des temps de calcul très importants. Dans cette thèse, nous avons proposé un modèle permettant d'étudier le coefficient de blindage de ce type de boîtier en évitant de mailler ses parois. Le travail réalisé s'appuie sur la construction d'une condition d'interface qui remplace la paroi et reproduit son comportement en présence d'ondes électromagnétiques [RI.20, RI.11]. Ainsi dans les simulations proposées, on évite de mailler les parois du boîtier ce qui permet de réduire considérablement la taille des systèmes et le temps de simulation.

Sur le thème du contrôle électromagnétique de structures, nous avons exploités le calcul des champs électromagnétiques en domaine temporel dans les travaux de thèse d'Antony Manet (Hossein Manesh) pour caractériser la signature des défauts non-francs pouvant apparaître dans les réseaux filaires [67]. Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une ANR sur le diagnostic des réseaux filaires en aéronautique (SODDA). L'une des problématiques liée était de pouvoir détecter et réparer les défauts naissant dans le réseau filaire de télécommunications avant que ceux-ci ne deviennent sévères et mettent en danger la sécurité de l'avion. L'analyse des signaux de réflectométrie est la technique communément utilisée pour la détection des défauts dans un réseau filaire [103]. Mais lorsqu'on est en face d'un réflectogramme, il faut pouvoir identifier la part du signal attribuée au défaut naissant. Compte tenu de la faible amplitude de la réponse d'un défaut naissant, celle-ci est très souvent noyée dans les bruits de mesures ou dans les signaux non souhaités comme ceux des connecteurs. Le travail réalisé a été d'une part de mettre en place une procédure permettant d'identifier la réponse d'un défaut naissant [RI.4], et d'autre

part d'établir et étudier les signatures des défauts non-francs en se basant sur une représentation électrique équivalente dont les paramètres servent à alimenter les modèles de lignes de transmission utilisés par les industriels pour le diagnostic de réseau filaire [RI.7].

Etude des matériaux supraconducteurs

Le développement de nouveaux dispositifs du génie électrique a conduit les acteurs de ce domaine à s'intéresser à de nouveaux matériaux pour remplacer les matériaux classiques devenus souvent très coûteux à produire ou ne permettant pas d'atteindre les niveaux de performances exigés. C'est notamment ce qui se passe pour le transport d'énergie où l'on souhaite réduire les pertes dues à l'effet joule, ou encore pour les appareils d'imagerie médicale où l'on souhaite disposer des champs magnétiques intenses qui nécessiteraient des volumes très importants de matériaux conducteurs classiques comme le cuivre. Pour ces exemples, la solution est d'introduire les matériaux supraconducteurs car étant fortement diamagnétiques et dissipant très peu d'énergie [113]. Malheureusement l'introduction de ces matériaux dans les systèmes doit faire face à de nombreuses difficultés, parmi lesquelles on peut citer, le système cryogénique résultant du fait que c'est à très basse température que l'état supraconducteur se manifeste, et l'instabilité de l'état supraconducteur qui traduit une grande sensibilité aux évolutions mécaniques, électromagnétiques et thermiques. Les avancées réalisées sur la caractérisation de ces matériaux ont fait en sorte qu'il existe aujourd'hui de nombreux systèmes utilisant ces matériaux, par exemple les moteurs [58], les limiteurs de courant [114], les aimants à fort champ [100] ou encore les câbles de transport d'énergie [86]. Le développement de ces systèmes a été rendu possible grâce aux nombreux travaux de modélisation réalisés pour proposer des solutions adéquates de dimensionnement de ces systèmes [77, 115, 125]. Ces travaux de modélisation s'appuient sur des lois de comportement du matériau établies par l'expérience, dont les plus utilisées sont le modèle de Bean [5, 79] pour les supraconducteurs à basse température critique (LTS) et la loi puissance pour les supraconducteurs à haute température critique (HTC) [15]. Aujourd'hui, toute l'attention des acteurs de ce domaine est tournée vers l'utilisation des supraconducteurs de type II à haute température critique (HTC) car moins exigeant sur l'aspect cryogénique. L'expérimentation sur ces matériaux étant coûteuse et difficile à mettre en place, le travail de modélisation numérique devient crucial. Mais celui-ci reste difficile à mettre en oeuvre à cause du comportement non linéaire du matériau, ouvrant ainsi un axe de recherche sur le développement des outils de modélisation des supraconducteurs HTC. Mes travaux sur cet axe de recherche ont débuté lors de ma thèse de doctorat qui avait pour objectif de construire des modèles de calcul de champs induits dans ces matériaux dans le but d'estimer l'impact de la vitesse de variation des sources d'excitation utilisées lors de la caractérisation expérimentale de ceux-ci [56]. Après la thèse, j'ai continué à travailler sur le développement d'outils numériques pour la modélisation

tri-dimensionnelle de ces matériaux [RI.6, RI.9, RI.17, RI.23]. Ces outils numériques servent de base de travail pour aborder des problématiques du rencontrées dans l'industrie. C'est notamment ce qui est fait dans les travaux de thèse de Makong Ludovic dont l'objectif a été de proposer une approche pour l'évaluation des pertes dans les câbles supraconducteurs à brins torsadés [66]. Ce type de câbles est utilisé dans les applications de moteurs et aussi pour le transport d'énergie. Leur modélisation tri-dimensionnelle représente un challenge du point de vue numérique car le rapport entre leur longueur et leur section est très élevé et les maillages générés sont très volumineux, ce qui augmente la taille des systèmes à résoudre et conduit à des temps de calcul très important pouvant atteindre plusieurs dizaines de jours [37]. Pour réduire les coûts de calcul lors de l'évaluation des pertes sur ces câbles, nous avons proposé une technique de réduction de modèle basée sur des transformations géométriques et les symétries du système. Le modèle réduit proposé nous permet d'étudier une petite portion du câble afin d'évaluer les pertes sur l'ensemble du câble, et ceci avec des temps de calcul de quelques heures [RI.5] [RI.2].

1.5.3 Collaborations scientifiques

Thème compatibilité électromagnétique

- **Institut Montéfiore de l'université de Liège en Belgique : équipe Applied Computational Electromagnetics (Pr Christophe Geuzaine)**, depuis 2010

La collaboration établie après mon post-doc dans cette équipe de recherche continue. Elle s'articule autour du développement et l'utilisation des outils numériques pour les simulations en l'électromagnétisme. Elle a donnée lieu à des publications communes ([RI.18], [RI.19], [RI.20], [RI.21], [RI.22]) sur le thème de la compatibilité électromagnétique.

- **Laboratoire ESYCOM de l'université de Marne la Vallée : Equipe Système RF et optiques (Pr Odile Picon)**, 01/2014 – 06/2017

Cette collaboration est née de la participation commune à l'ANR SODDA (2012–2016). Elle a consisté au co-encadrement d'une thèse (Hossein Manesh) financée par l'ANR. Elle s'est articulée autour de la comparaison des outils numériques pour le diagnostic de réseau filaire en domaine temporel et a donné lieu à une publication en revue internationale ([RI.7]).

- **Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering de l'université de Louvain-La-Neuve en Belgique : Equipe Applied mechanics and mathematics (Dr Jonathan Lambrechts)**, depuis 2010

Cette collaboration porte sur le maintien et la mise à jour du code de calcul Galerkin

discontinue en domaine temporel via une plateforme GIT. L'implémentation de ce code de calcul a débuté durant mon post-doc à l'université de Liège en 2009.

- **Laboratoire JLL de Sorbonne Université (Dr Bertrand Thierry)**, depuis 02/2018
C'est une collaboration qui vient de commencer. La première action engagée a été l'encadrement conjoint d'un stage de Master Recherche réalisé par Xavier Adriaens sur l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaines pour l'évaluation de l'exposition des personnes aux champs électromagnétiques générés par les systèmes de recharge inductive.
- **CNES, Division des Lanceurs (Mr David Monchaux)**, 02/2015-02/2017
Cette collaboration a duré 2ans et s'est faite dans le cadre d'un contrat post-doctoral (Eva Dieudonné) sur l'évaluation de l'atténuation des ondes radio par les plasmas des fusées. Elle a donné lieu à deux publications en revues internationales ([RI.3], [RI.8]).
- **Laboratoire LAGA de l'université de Paris 13 (Dr Mohamed Boubekour)**, depuis 05/2018
C'est une collaboration naturelle qui se met en place avec Dr Mohamed Boubekour (mon premier doctorant) qui occupe aujourd'hui un poste d'ingénieur de recherche CNRS au LAGA. Un travail commun sur la mise en place du calcul GPU pour les applications de la compatibilité électromagnétique est en cours d'élaboration.

Matériaux supraconducteurs

- **Laboratoire GREEN de l'université de Lorraine (Pr. Jean Levêque, Pr. Bruno Douine, Dr. Smail Mezani, Dr. Kevin Berger)**, depuis 2009
Depuis ma thèse dans ce laboratoire, une collaboration s'est établie autour du développement et la validation des outils numériques dédiés à la modélisation des supraconducteurs. Elle porte actuellement sur la comparaison des résultats numériques issus de différents codes de calcul, sur le développement des techniques aidant à la caractérisation de matériaux supraconducteurs. Elle a donné lieu de plusieurs publications dans des revues ([RI.13], [RI.16], [RI.23], [RI.24])
- **AML Superconductivity and Magnets (Dr Philippe Masson)**, depuis 01/2014
L'origine de cette collaboration est la thèse de Makong Ludovic à l'université de Houston. Un encadrement commun de cette thèse (avec Dr Masson) a été réalisé et le doctorant a passé 50% du temps dans chaque entité. Dans le cadre de cette collaboration, j'ai séjourné 1 mois à l'université de Houston. Cette collaboration porte sur le développement d'outils numériques permettant de simplifier la modélisation des câbles supraconducteurs multi-filamentaires torsadés. De nombreuses publications en sont issues ([RI.5], [RI.6], [RI.9], [RI.10])

- **Institut Montéfiore de l'université de Liège en Belgique : équipe Applied Computational Electromagnetics (Pr Christophe Geuzaine)**, depuis 2010

Une collaboration est en place également sur cette thématique. Elle porte sur le développement des outils numériques robustes pour le calcul de courant induit dans les supraconducteurs. Des publications communes en sont issues ([RI.9], [RI.17], [RI.23])

- **Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering de l'université de Louvain-La-Neuve en Belgique : Equipe Applied mechanics and mathematics (Dr Jonathan Lambrecht)**, depuis 2010

La collaboration sur ce thème porte sur l'utilisation de la méthode Galerkin discontinue pour la modélisation des supraconducteurs. Des outils spécifiques (assemblage du système matriciel, solveur spécifique) dédiés aux supraconducteurs ont été développés. Des publications communes ont été réalisées ([RI.10], [RI.17], [RI.23])

1.5.4 Activités d'intérêt collectif

1. Expertise de projet ANR (depuis 2015) : 2 projets expertisés
2. Rapporteur d'articles de revues et de conférences
 - Revues International (6 articles/an) : *IEEE Electromagnetic Compatibility*, *IEEE Applied Superconductivity*, *IEEE Transactions on Magnetics*
 - Conférences internationales (8 articles/an) : *Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, *Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF)*, *Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG)*, *Conférence sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC)*
3. Participation à un Groupe de Travail
 - GDR SEEDS : membre du GT Supra autour de la modélisation et la caractérisation des matériaux supraconducteurs, depuis 2017

1.5.5 Activités d'encadrement

Stages Master Recherche

- 02/2011-06/2011 : Mohamed Boubekour,
 Formation : Master recherche en Mathématiques et Applications de l'université Pierre et Marie Curie
 Sujet : *Calcul tridimensionnel de champs induits dans les supraconducteurs par une méthode Galerkin discontinue.*
 Taux d'encadrement : 100%

Valorisation scientifique : 1 article de revue [RI.17]

— 03/2013-07/2013 : Smail Ziani,

Master recherche en Physique et Ingénierie de l’Energie de l’ENS CACHAN.

Modélisation électromagnétique de défauts non-francs en vue du diagnostic de câbles.

Taux d’encadrement : 100%

Valorisation : 1 article de conférence [CI.18]

— 03/2014-07/2014 : Xiang Liu,

Master recherche en Physique et Ingénierie de l’Energie de l’université de Paris-Saclay.

Diagnostic filaire, impact des défauts non-francs sur les signaux de réflectométrie.

Taux d’encadrement : 50%

— 03/2018-07/2014 : Xavier Adriaens,

3ième année cycle ingénieur CentraleSupélec.

Méthode de décomposition de domaines appliquée à l’optimisation d’un capteur intra-corporel pour la transmission de données médicales.

Taux d’encadrement : 50%

Thèses

— 10/2011-12/2014 : **Mohamed Boubekur**

Sujet : *Evaluation de l’efficacité de blindage de structures avec plaques minces : modélisation par une méthode de Galerkin discontinue.*

Financement : Allocation doctorale MESR

Taux d’encadrement : 75%

Date de soutenance : 10 décembre 2014

Production scientifique : 4 articles de revues ([RI.11], [RI.18], [RI.19], [RI.20]) , 4 communications en conférences internationales ([CI.16], [CI.26], [CI.31], [CI.34]), 2 communications en conférences nationales ([CN.6], [CN.7]) .

Directeur de thèse : Lionel Pichon

Devenir du doctorant : Ingénieur de Recherche au LAGA, université de Paris 13.

— 01/2013-06/2016 : **Hossein Manesh**

Sujet : *Etude des défauts non-francs sur des câbles en vue du diagnostic.*

Financement : ANR SODDA

Taux d’encadrement : 33%

Date de soutenance : 21 juin 2016

Production scientifique : 1 article de revue ([RI.7]), 1 communication en confé-

rence internationale ([CI.17]), 2 communications en conférences nationales ([CN.1], [CN.5]).

Directeurs de thèse : Lionel Pichon, Odile Picon

Devenir du doctorant : Ingénieur R&D, WireScan AS, Norvège.

— **01/2014-11/2017 : Ludovic Makong**

Sujet : *3D modeling of twisted multi-filamentary superconductors.*

Financement : Bourse université de Houston

Taux d'encadrement : 50%

Date de soutenance : 28 novembre 2017

Production scientifique : 4 articles de revues ([RI.5], [RI.6], [RI.9], [RI.10]), 7 communications en conférences internationales ([CI.4], [CI.5], [CI.14], [CI.20], [CI.22], [CI.23]).

Directeur de thèse : Frédéric Bouillault

Devenir du doctorant : Ingénieur R&D, ORANO-Areva, France

— **10/2014-12/2017 : Xiang Liu**

Sujet : *3D Contrôle non destructif du sol et imagerie d'objets enfouis par des systèmes bi- et multi-statiques : de l'expérience à la modélisation.*

Financement : Bourse fondation Supelec

Taux d'encadrement : 33%

Date de soutenance : 13 décembre 2017

Production scientifique : 6 communications en conférences internationales ([CI.1], [CI.2], [CI.9], [CI.10], [CI.11], [CI.12]), 2 communications en conférences nationales ([CN.3], [CN.4]).

Directeurs de thèse : Lionel Pichon, Marc Lambert

Devenir du doctorant : Ingénieur R&D, Valéo, France

1.5.6 Publications scientifiques

L'ensemble de mes travaux de recherche a fait l'objet de publications dont la liste détaillée est présentée ci-dessous

— 26 articles dans des revues internationales avec comité de lecture.

— 37 communications à des conférences internationales avec actes et comité de lecture.

— 7 communications à des conférences nationales avec actes et comité de lecture.

Articles dans revues internationales

- [RI.1] Adel Razek, Lionel Pichon, Abelin Kameni, Ludovic Makong, and Sahand Rasm. Evaluation of human exposure owing to wireless power transfer systems in electric vehicles. *Athens Journal of Technology and Engineering*, accepted, 2019.
- [RI.2] Abelin Kameni, Ludovic Makong, Frederic. Bouillault, and Philippe Masson. Reduced model to compute ac losses of twisted multi-filamentary superconductors. *IEEE Transactions On Applied Superconductivity*, 29 :5901306, 2019.
- [RI.3] Eva Dieudonné, Abelin Kameni, David Monchaux, and Lionel Pichon. Radio frequency attenuation by a rocket plume using diffraction theory and finite element modeling. *Acta Astronautica*, 158 :334–341, 2019.
- [RI.4] Abelin Kameni, Florent Loete, and Lionel Pichon. Time domain reflectometry model : analysis and characterization of a chafing defect in a coaxial cable. *European Physical Journal : Applied Physics*, 83 :30601, 2018.
- [RI.5] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, and Frederic. Bouillault. 3d equivalent model to compute the electro-magnetic behavior of twisted multi-filamentary superconductors wires. *IEEE Transactions On Magnetics*, 54(3) :7202904, 2018.
- [RI.6] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, and Frederic. Bouillault. h–formulation using the discontinuous galerkin method for the 3d modeling of superconductors. *IEEE Transactions On Magnetics*, 54(3) :7205204, 2018.
- [RI.7] Antony Manet, Abelin Kameni, Florent Loete, Gerome. Genoulaz, Lionel Pichon, and Odile Picon. Equivalent circuit model of soft shield defects in coaxial cables using numerical modeling. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 59(2) :533–536, 2017.
- [RI.8] Eva Dieudonné, Abelin Kameni, David Monchaux, and Lionel Pichon. Radio frequency attenuation by rocket plume from ground study to in-flight prediction. *Applied Computational Electromagnetics Society*, 32(11) :1048–1055, 2017.
- [RI.9] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, Frederic Bouillault, and Christophe Geuzaine. Nodal discontinuous galerkin method for high-temperature superconductors modeling based on the h–formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(2) :2298, 2017.
- [RI.10] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Jonathan Lambrechts, Philippe Masson, and Frederic Bouillault. 3d modeling of heterogeneous and anisotropic superconducting media. *IEEE Transactions On Magnetics*, 52(3) :7205404, 2016.

- [RI.11] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, and Lionel Pichon. Modeling of thin heterogeneous sheets in the discontinuous galerkin method for 3d transient scattering problems. *European Physical Journal : Applied Physics*, 73 :20901, 2016.
- [RI.12] Abelin Kameni, Bruno Seny, and Lionel Pichon. Multirate technique for explicit discontinuous galerkin computations of time domain maxwell equations on complex geometries. *IEEE Transactions On Magnetics*, 52(3) :7204604, 2016.
- [RI.13] Bruno Douine, Kevin Berger, Charles-Henri Bonnard, Frederic Sirois, Abelin Kameni, and Jean Levêque. Improved method for determining the n -value of hts bulks. *IEEE Transactions On Applied Superconductivity*, 26(3) :6800704, 2016.
- [RI.14] Mohamed Lotfi Khene, Lotfi Alloui, Frederic Bouillaullt, Abelin Kameni, Soury Mohamed Mimoune, and Mouloud Feliach. 3 – d numerical evaluation of trapped magnetic field and temperature of a rectangular gdbcu bulk magnetized by mmpsc method. *IEEE Transactions On Magnetics*, 51(3) :9000204, 2015.
- [RI.15] Lotfi Alloui, Mohamed Lotfi Khene, Abelin Kameni, Frederic Bouillaullt, Soury Mohamed Mimoune, and Mouloud Feliach. Analysis of trapped magnetic field during magnetization process by using spa method of bulk superconductor. *IEEE Transactions On Magnetics*, 51(3) :9000304, 2015.
- [RI.16] Bruno Douine, Charles-Henri Bonnard, Kevin Berger, Frederic Sirois, Abelin Kameni, and Jean Levêque. Determination of j_c and n -value of hts pellets by measurement and simulation of magnetic field penetration. *IEEE Transactions On Applied Superconductivity*, 25(4) :8001008, 2015.
- [RI.17] Abelin Kameni, Mohamed Boubekour, Lotfi Alloui, Frederic Bouillaullt, Jonathan Lambrechts, and Christophe Geuzaine. A 3-d semi-implicit method for computing the current density in bulk superconductors. *IEEE Transactions On Magnetics*, 50(2) :377–380, 2014.
- [RI.18] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, Laurent Bernard, Axel Modave, and Lionel Pichon. 3d modeling of thin resistive sheets in the discontinuous galerkin method for transient scattering analysis. *IEEE Transactions On Magnetics*, 50(2) :7012104, 2014.
- [RI.19] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, Lionel Pichon, Axel Modave, and Christophe Geuzaine. Analysis of transient scattering problems using a discontinuous galerkin method : application to the shielding effectiveness of enclosures with heterogeneous walls. *Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks*, 27 :626–635, 2014.
- [RI.20] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, Axel Modave, Laurent Bernard, and Lionel Pichon. Modeling of weakly conducting thin sheets in the discontinuous galerkin me-

- thod for shielding effectiveness evaluation. *Applied Computational Electromagnetics Society*, 28 :931–937, 2013.
- [RI.21] Abelin Kameni, Axel Modave, Mohamed Boubekour, Valentin Pr eault, Lionel Pichon, and Christophe Geuzaine. Evaluation of shielding effectiveness of composite wall with a time domain discontinuous galerkin method. *European Physical Journal : Applied Physics*, 64(2) :24508–24511, 2013.
- [RI.22] Axel Modave, Abelin Kameni, Jonathan Lambrechts, Lionel Pichon, and Christophe Geuzaine. An optimum pml for scattering problems in the time domain. *European Physical Journal : Applied Physics*, 64(2) :24502–24508, 2013.
- [RI.23] Abelin Kameni, Frederic Bouillault, Christophe Geuzaine, Jean-Fran ois Remacle, Jonathan Lambrechts, and Smail Mezani. Discontinuous galerkin method for computing induced fields in superconductors materials. *IEEE Transactions On Magnetics*, 48(2) :591–594, 2012.
- [RI.24] Abelin Kameni, Smail Mezani, Jean Lev eque, and Bruno Douine. Influence of speed variation of a transverse magnetic field on magnetization of an hts cylinder. *IEEE Transactions On Applied Superconductivity*, 21(4) :3434–3441, 2011.
- [RI.25] Abelin Kameni, Denis Netter, Bruno Douine, Smail Mezani, and Jean Lev eque. Scaling solution and n dependence of the eddy-current distribution in a flat superconductor. *IEEE Transactions On Applied Superconductivity*, 20(4) :2248–2254, 2010.
- [RI.26] Abelin Kameni, Denis Netter, Bruno Douine, Smail Mezani, and Jean Lev eque. A 2d robust fe-fv mixed method to handle strong nonlinearities in superconductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8) :3445–3448, 2010.
- [RI.27] Abelin Kameni, Bruno Douine, Jean Lev eque, Frederic Sirois, and Denis Netter. New hybrid fe-fv method for computing current distribution in 2d superconductors : Application to an hts cylinder in transverse magnetic field. *IEEE Transactions On Applied Superconductivity*, 19(3) :2423–2427, 2009.

Communications en conf erences internationales

- [CI.1] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. Ground penetrating radar data imaging via kirchhoff migration method. In *Applied Computational Electromagnetics Society*, Florence, Italy, 2017.
- [CI.2] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. Buried targets detection from synthetic and measured b-scan ground penetrating radar data. In *11th European Conference on Antennas and Propagation*, Paris, France, 2017.

- [CI.3] Eva Dieudonné, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and David Monchaux. Radio frequency attenuation by a rocket plume using diffraction theory and finite element modeling. In *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences*, Milan, Italy, 2017.
- [CI.4] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, and Frederic Bouillault. 3d equivalent model to compute the electro-magnetic behavior of twisted multi-filamentary superconductors wires. In *21th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Daejeon, South Korea, 2017.
- [CI.5] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, and Frederic Bouillault. h–formulation using the discontinuous galerkin method for the 3-d modeling of superconductors. In *21th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Daejeon, South Korea, 2017.
- [CI.6] Kevin Berger, Guillaume Escamez, Loïc Quéval, Abelin Kameni, Lotfi Alloui, and al. Benchmark on the 3d numerical modeling of a superconducting bulk. In *21th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Daejeon, South Korea, 2017.
- [CI.7] Kevin Berger, Guillaume Escamez, Loïc Quéval, Abelin Kameni, Lotfi Alloui, and al. Modélisations 3d d’un cube supraconducteur, influence du maillage. In *9ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, Paris, France, 2017.
- [CI.8] Abelin Kameni, Florent Loete, and Lionel Pichon. Modèle de réflectométrie en domaine temporel pour l’étude des défauts non-francs. In *9ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, Paris, France, 2017.
- [CI.9] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. Detectability of underground electrical cables junction with a ground penetrating radar : electromagnetic simulation and experimental measurements. In *European Geosciences Union General Assembly*, Vienne, Austria, 2016.
- [CI.10] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. Enhanced linear sampling method for gpr imaging. In *International Workshop on New Computational Methods for Inverse Problems*, Cachan, France, 2016.
- [CI.11] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. 3d dgtd method for antennas and gpr scenarios modeling. In *10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Lyon, France, 2016.

- [CI.12] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. Gpr imaging via multi-frequency linear sampling method. In *10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Lyon, France, 2016.
- [CI.13] Eva Dieudonné, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and David Monchaux. Comparison of 2d numerical methods for radio frequency attenuation by a rocket plume. In *10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Lyon, France, 2016.
- [CI.14] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Frederic Bouillault, Philippe Masson, and Christophe Geuzaine. Nodal discontinuous galerkin method for high-temperature superconductors modeling based on the h-formulation. In *10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Lyon, France, 2016.
- [CI.15] Abelin Kameni and Frederic Bouillault. Influence de la direction du champ magnétique appliqué sur les pertes et l'aimantation des supraconducteurs. In *8ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, Saint-Nazaire, France, 2015.
- [CI.16] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, and Lionel Pichon. Modélisation d'une cavité en plaques hétérogènes avec une méthode de galerkin discontinue pour l'évaluation de son efficacité de blindage. In *8ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, Saint-Nazaire, France, 2015.
- [CI.17] Hossein Manesh, Jérôme Genoulaz, Abelin Kameni, Florent Loete, and Lionel Pichon Odile Picon. Experimental analysis and modelling of coaxial transmission lines with soft shield defects. In *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Dresden, Germany, 2015.
- [CI.18] Abelin Kameni, Florent Loete, Smail Ziani, Khaled Kahalerras, and Lionel Pichon. Time domain modeling of soft faults in wiring system by a nodal discontinuous galerkin method with high-order hexahedral meshes. In *20th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Montreal, Canada, 2015.
- [CI.19] Abelin Kameni, Bruno Seny, and Lionel Pichon. Multirate technique for explicit discontinuous galerkin computations of time domain maxwell equations on complex geometries. In *20th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Montreal, Canada, 2015.
- [CI.20] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, Jonathan Lambrechts, and Frederic Bouillault. 3d modeling of heterogeneous and anisotropic superconducting media. In *20th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Montreal, Canada, 2015.

- [CI.21] Bruno Douine, Kevin Berger, Jean L  v  que, Charles-Henri Bonnard, Frederic Sirois, and Abelin Kameni. Influence of n -value and rise rate on the magnetic field penetration in hts bulks. In *12th European Conference on Applied Superconductivity*, Lyon, France, 2015.
- [CI.22] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, and Frederic Bouillault. 3d modeling of superconductors modeling based on e-h formulation. In *12th European Conference on Applied Superconductivity*, Lyon, France, 2015.
- [CI.23] Ludovic Makong, Abelin Kameni, Philippe Masson, and Frederic Bouillault. 3d modeling of straight uncoupled multifilamentary superconductors subjected to elliptical field. In *12th European Conference on Applied Superconductivity*, Lyon, France, 2015.
- [CI.24] Abelin Kameni, Ludovic Makong, Philippe Masson, and Frederic Bouillault. Influence of direction of the applied magnetic field on losses and magnetizations of superconductors. In *Applied Superconductivity Conference*, Charlotte, United States, 2014.
- [CI.25] Abelin Kameni, Bruno Seny, and Lionel Pichon. Multirate technique for explicit discontinuous galerkin computations of time domain maxwell equations on complex geometries. In *6th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*, Gent, Belgique, 2014.
- [CI.26] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, and Lionel Pichon. Modeling of thin heterogeneous sheets in the discontinuous galerkin method for transient problems. In *16th Bienal Conference on Electromagnetic Field Computation*, Annecy, France, 2014.
- [CI.27] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, Laurent Bernard, Axel Modave, and Lionel Pichon. 3d modeling of thin resistive sheets in the discontinuous galerkin method for transient scattering analysis. In *19th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Budapest, Hungary, 2013.
- [CI.28] Abelin Kameni, Mohamed Boubekour, Lotfi Alloui, and Frederic Bouillault. A 3d semi implicit method for computing the current density in bulk superconductors. In *19th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Budapest, Hungary, 2013.
- [CI.29] Axel Modave, Christophe Geuzaine, Mohamed Boubekour, Lionel Pichon, and Abelin Kameni. Evaluation of shielding effectiveness in the time domain using a dg method with an efficient pml. In *9th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Bruges, Belgique, 2013.

- [CI.30] Abelin Kameni, Frederic Bouillault, and Christophe Geuzaine. Semi-implicit 3d approach in a discontinuous galerkin method for computing current density in superconductors. In *9th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Bruges, Belgique, 2013.
- [CI.31] Mohamed Boubekur, Abelin Kameni, Laurent Bernard, and Lionel Pichon. Analysis of transient scattering from nonperfectly conductive shields using a discontinuous galerkin method. In *9th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Bruges, Belgique, 2013.
- [CI.32] Axel Modave, Abelin Kameni, Eric Delhez, Lionel Pichon, and Christophe Geuzaine. An optimum pml for scattering problems in time-domain. In *7ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, Marseille, France, 2012.
- [CI.33] Abelin Kameni, Axel Modave, Mohamed Boubekur, Valentin Préault, Lionel Pichon, and Christophe Geuzaine. Evaluation de l'efficacité de blindage de parois hétérogènes par une méthode de galerkin discontinue en domaine temporel. In *7ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, Marseille, France, 2012.
- [CI.34] Mohamed Boubekur, Abelin Kameni, Axel Modave, Christophe Geuzaine, and Lionel Pichon. Modeling of thin resistive sheets in the discontinuous galerkin method for shielding evaluation. In *15th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, Oita, Japan, 2012.
- [CI.35] Abelin Kameni, Jonathan Lambrechts, Jean-François Remacle, Smail Mezani, Frederic Bouillault, and Christophe Geuzaine. Discontinuous galerkin method for computing induced fields in superconducting materials. In *19th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields*, Sidney, Australia, 2011.
- [CI.36] Jean Levêque, Smail Mezani, and Abelin Kameni. Influence of the shape of the current on ac losses in superconducting tube and coil. In *Superconductivity Centennial Conference 2011 - EUCAS-ISEC-ICMC*, The Hague, Holland, 2011.

Communications en conférences nationales

- [CN.1] Hossein Manesh, Abelin Kameni, Jérôme Genoulaz, Florent Loete, and Lionel Pichon Odile Picon. Modélisation et analyse de défauts non francs dans le blindage des lignes coaxiales en vue du diagnostic. In *18ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité ElectroMagnétique*, Rennes, France, 2016.
- [CN.2] Eva Dieudonné, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and David Monchaux. Evaluation de l'atténuation des communications radiofréquences due aux jets d'échappement

- des lanceurs spatiaux. In *18ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité ÉlectroMagnétique*, Rennes, France, 2016.
- [CN.3] Xiang Liu, Abelin Kameni, Mohamed Serhir, Lionel Pichon, and Marc Lambert. 3d modeling with discontinuous galerkin time domain method for ground penetration radar application. In *Groupe de Recherche Ondes, Assemblée Générale "Interférences d'Ondes"*, Lyon, France, 2015.
- [CN.4] Xiang Liu, Mohamed Serhir, Abelin Kameni, Lionel Pichon, and Marc Lambert. Gpr imaging via multi-frequency linear sampling method with limited aperture data. In *Groupe de Recherche Ondes, Assemblée Générale "Interférences d'Ondes"*, Lyon, France, 2015.
- [CN.5] Hossein Manesh, Abelin Kameni, Jérôme Genoulaz, Florent Loete, and Lionel Pichon Odile Picon. Modélisation et analyse de défauts non-francs dans les lignes de transmission pour du diagnostic. In *Journées Nationales Microondes*, Bordeaux, France, 2015.
- [CN.6] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, and Lionel Pichon. Modélisation de parois minces conductrices dans une méthode galerkine discontinue pour l'évaluation de l'efficacité de blindages. In *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité ÉlectroMagnétique*, Clermont-Ferrand, France, 2014.
- [CN.7] Mohamed Boubekour, Abelin Kameni, and Lionel Pichon. Modélisation de parois minces conductrices dans une méthode galerkin discontinue pour l'Évaluation du blindage de boîtiers d'Équipements Électroniques. In *Symposium de Génie Electrique*, Cachan, France, 2014.

Chapitre 2

Calcul des champs rayonnés en compatibilité électromagnétique

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Formulation du système différentiel	31
2.2.1	Les équations de Maxwell	31
2.2.2	Formulation faible du problème	31
2.3	Flux caractéristiques aux interfaces	32
2.3.1	Invariants de Riemann	33
2.3.2	Flux numériques	35
2.3.3	Conditions aux bords	37
2.4	Condition d'absorption pour les problèmes de diffraction	38
2.4.1	Les parois absorbantes	39
2.4.2	Les couches parfaitement absorbantes	40
2.4.3	Optimisation des couches PML	41
2.5	Schéma numérique pour l'évolution temporelle	49
2.5.1	Les méthodes de Runge-Kutta implicites et explicites	49
2.5.2	Runge-Kutta explicite avec pas de temps local	51
2.6	Modélisation de boîtiers de blindage	57
2.6.1	Interface simulant les plaques minces homogènes	57
2.6.2	Modélisation 3D de boîtiers à parois composites	63
2.7	Diagnostic de réseau filaire	70
2.7.1	Modèle de réflectométrie pour la caractérisation des défauts non-francs	71
2.7.2	Evaluation des paramètres électriques équivalent	77

2.1 Introduction

L'étude des interactions entre les champs électromagnétiques et les structures est un thème que l'on retrouve dans de nombreux domaines applicatifs. Les axes de recherches rencontrés sur cette thématique traduisent les enjeux liés à diverses problématiques notamment celui de la fiabilité des systèmes qui est un aspect à maîtriser pour garantir la sécurité des personnes et des biens. La fiabilité d'un système repose sur différents facteurs parmi lesquels on trouve, la maîtrise des procédés de fabrication, la qualité des éléments utilisés pour la fabrication notamment en terme de matériau, la protection du système contre toute agression extérieure pouvant nuire à son bon fonctionnement, et aussi la maintenance du système qui passe par la détection et réparation des pannes pouvant entraîner des dysfonctionnements. L'étude de ces deux derniers facteurs repose sur la connaissance des champs électromagnétiques à l'intérieur et à l'extérieur du système.

La question de la protection d'un système dans son environnement de fonctionnement est un sujet central dans le domaine de la compatibilité électromagnétique (CEM). Par exemple un système d'électronique embarquée, il est important de connaître les niveaux de champs afin de pouvoir, caractériser les phénomènes de couplage aux équipements, respecter les normes environnementales notamment celles liées à la pollution électromagnétique, proposer des solutions adéquates de blindage pour la protection du dispositif. Sur la question de la maintenance des dispositifs, les signaux électromagnétiques émis et reçus sont d'importantes sources d'informations permettant de renseigner sur l'état du système. Leur analyse permet de mettre en évidence la présence de points de dysfonctionnements nécessitant une intervention pour réparation. L'évaluation des champs électromagnétiques rayonnés qui est un sujet central à la modélisation numérique dans ce domaine nécessite de disposer d'outils et méthodes de calculs robustes et efficaces.

De nombreuses méthodes et techniques pour le calcul de champs électromagnétiques en compatibilité et contrôle électromagnétique sont connues [3, 111]. Ces outils numériques permettent de réaliser des études autant dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, les résultats obtenus rendent compte de l'état du système en régime permanent mais ne fournissent aucune information sur l'évolution transitoire. Pour réaliser une étude sur une bande de fréquence importante, les calculs sont répétés pour des valeurs de fréquence judicieusement choisies et les résultats sont présentés sous forme discrète. Les simulations en domaine temporel s'avèrent intéressantes car elles permettent d'observer l'évolution du système du régime transitoire vers le régime permanent. Pour réaliser une étude sur une bande de fréquence, une seule simulation avec des signaux à large bande comme le pulse gaussien suffit. Les résultats dans le domaine fréquentiel sont obtenus grâce à la transformée de Fourier, se présentent sous forme continue, et permettent d'avoir plus de détails sur la bande de fréquence

étudiée.

Parmi les approches numériques utilisées pour le calcul des champs électromagnétiques rayonnés en domaine temporel, c'est la méthode des différences finies qui est la technique la plus répandue. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre, rapide et efficace. Mais cette efficacité repose sur l'utilisation des maillages cartésiens réguliers, qui malheureusement sont peu adaptés pour traiter les géométries présentant des courbures [53]. Les approches Galerkin discontinues en domaine temporel ont connu un essor important avec le développement des ordinateurs à architectures multi-coeurs et font partie aujourd'hui des méthodes de plus utilisées pour le calcul de champs électromagnétiques en haute fréquence.

Le principe d'une méthode de Galerkin discontinue est de traiter le problème sur chaque élément du maillage à l'aide d'une approche éléments finis. Cette méthode peut alors se décrire comme une méthode éléments finis standard dans lequel la grandeur calculée est discontinue. Pour apporter la continuité nécessaire au respect des phénomènes physiques mis en jeu, des termes de flux similaires à ceux utilisés dans les méthodes volumes finis sont appliqués aux bords de chaque élément du maillage. La construction de cette méthode repose sur la formulation faible établie sur chaque élément. Sur cet élément, on définit un espace d'approximation polynomiale telle sorte que les inconnues sont, les valeurs aux noeuds (approche nodale) [51], ou les coefficients caractérisant la projection de la solution sur la base polynomiale (approche modale) [57]. Dans ce type de méthode, les intégrales de frontières sur chaque élément sont remplacées par des expressions de "flux numériques" qui dépendent des valeurs de la solution sur les éléments voisins. Cette approche présente l'avantage d'être bien adaptée aux maillages non-structurés et non conformes, ce qui est un atout pour traiter les problèmes mettant jeu des géométries complexes [50]. Le caractère local de la discrétisation rend plus facile l'utilisation des espaces polynomiaux d'ordre élevé, ce qui permet de réduire les oscillations numériques et d'augmenter la précision des résultats [38, 39]. Le principal inconvénient de cette méthode est l'augmentation du nombre d'inconnues qui résulte du dédoublement des inconnues aux interfaces inter-éléments. L'impact de cet inconvénient est réduit par la mise en place du calcul parallèle dont l'implémentation est facilitée par la forme des matrices générées qui sont des matrices par blocs [12, 61].

Dans ce qui suit, on donne les principaux éléments de la discrétisation des équations de Maxwell en domaine temporel par une méthode de Galerkin discontinue à valeurs nodales.

2.2 Formulation du système différentiel

2.2.1 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont des relations fondamentales de la physique qui régissent l'électromagnétisme. Ces équations au nombre de quatre, permettent de relier les grandeurs physiques que sont, le champ électrique \mathbf{E} , le champ magnétique \mathbf{H} , la densité de courant \mathbf{J} , l'induction magnétique \mathbf{B} , l'induction électrique \mathbf{D} et la densité de charges électrique ρ . Elles s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.1d)$$

La solution du système formé par ces 4 équations ne peut être trouvée que grâce à l'introduction de relations supplémentaires appelées lois de comportement qui permettent de relier l'induction électrique \mathbf{D} au champ électrique \mathbf{E} , la densité de courant \mathbf{J} au champ électrique \mathbf{E} et l'induction magnétique \mathbf{B} au champ magnétique \mathbf{H} . Dans nos travaux, les milieux étudiés sont caractérisés par les lois de comportement suivantes : $\mathbf{D} = \underline{\underline{\epsilon}}\mathbf{E}$ où $\underline{\underline{\epsilon}}$ est le tenseur de permittivité, $\mathbf{B} = \underline{\underline{\mu}}\mathbf{H}$ où $\underline{\underline{\mu}}$ est le tenseur de perméabilité, et $\mathbf{J} = \underline{\underline{\sigma}}\mathbf{E}$ où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur de conductivité.

2.2.2 Formulation faible du problème

Pour simplifier cette présentation, on considère les équations de Maxwell dans un milieu non conducteur et isotrope, ce qui correspond à avoir $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \mathbb{I}$ et $\underline{\underline{\mu}} = \mu \mathbb{I}$, où \mathbb{I} est le tenseur identité, ϵ est la permittivité électrique, et μ est la perméabilité magnétique.

Le système à résoudre pour déterminer les champs électromagnétiques rayonnés est formé par les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampere (2.2). Les inconnues de ce système sont les composantes des champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H}

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = 0 \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

On rappelle que la méthode de Galerkin Discontinue consiste à résoudre le problème posé sur chaque élément d'un maillage du domaine de calcul. Les échanges entre éléments sont assurés par des termes de flux numériques qui sont construits de manière à respecter les propriétés

physiques, notamment la continuité des champs électromagnétiques dans ce cas.

Considérons un maillage $\mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega_e$ de notre domaine de calcul Ω , où N_e est le nombre d'élément du maillage. La discrétisation de type Galerkin discontinue s'opère sur la formulation faible établit sur chaque élément du maillage. Pour l'obtenir, on se sert de la formulation faible sur le domaine global Ω . On décompose ensuite les intégrales sur Ω comme somme d'intégrales sur les éléments Ω_e et on applique le théorème du rotationnel. On établit alors que la formulation faible du système (2.2) sur chaque élément Ω_e s'écrit :

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \phi \, d\Omega_e - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_e} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \phi) \, d\Omega_e - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_e} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}) \cdot \phi \, d\Gamma_e = \mathbf{0} \quad (2.3a)$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \phi \, d\Omega_e + \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_e} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \phi) \, d\Omega_e + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_e} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}) \cdot \phi \, d\Gamma_e = \mathbf{0} \quad (2.3b)$$

où ϕ est une fonction test, Γ_e est le bord de l'élément Ω_e et $\boldsymbol{\nu}$ sa normale extérieure. Cette écriture montre que le terme intégral sur le bord Γ_e ne dépend que de la solution l'élément Ω_e considéré. Dans ce cas il n'y a pas de couplages entre les éléments. Pour que l'on puisse avoir interaction entre les différents éléments du maillage, ce terme intégrale est remplacé par un terme équivalent appelé flux numérique qui dépend de la solution sur les éléments voisins de Ω_e . Les expressions de flux numériques généralement mises en place font apparaître les fonctions de saut et de moyenne à l'interface. Soit Ω_e et Ω'_e deux éléments voisins ayant une interface commune $\Gamma_e = \Omega_e \cap \Omega'_e$. Les fonctions saut et moyenne à l'interface Γ_e , notées respectivement $\llbracket \bullet \rrbracket$ et $\{\bullet\}$ sont données par :

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Gamma_e}^{\Omega_e} = -\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Gamma_e}^{\Omega'_e} = \frac{u_{\Omega'_e} - u_{\Omega_e}}{2} \quad (2.4a)$$

$$\{\mathbf{u}\}_{\Gamma_e}^{\Omega_e} = \{\mathbf{u}\}_{\Gamma_e}^{\Omega'_e} = \frac{u_{\Omega_e} + u_{\Omega'_e}}{2} \quad (2.4b)$$

2.3 Flux caractéristiques aux interfaces

Des expressions des flux numériques sont à construire pour remplacer les intégrales de bord de la formulation faible sur chaque élément (2.3). Pour les établir, on s'appuie sur la méthode des caractéristiques et notamment sur le calcul des invariants de Riemann. Lorsqu'on est en présence d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre comme c'est le cas avec le système des équations de Maxwell (2.2), la méthode des caractéristiques consiste à déterminer des lignes le long desquelles le problème à résoudre se ramène à une équation différentielle ordinaire. Si le problème à résoudre est conservatif, alors les inconnues du problème différentiel ordinaire obtenu par la méthode des caractéristiques sont les invariants de Riemann [63, 64].

Ceux-ci ont la particularité d'être constants le long des lignes caractéristiques.

2.3.1 Invariants de Riemann

Soit une ligne caractéristique décrite par un vecteur α telle que $\|\alpha\| = 1$. Soit τ la variation de la solution le long de la ligne caractéristique. Les dérivées spatiales d'une grandeur scalaire \mathbf{v} , peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \quad (2.5)$$

où $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}$ représente la dérivée de \mathbf{v} le long de la ligne caractéristique de vecteur $\alpha = \nabla \tau$. En appliquant ce changement de variable au système (2.2), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon^{-1} \left(\alpha \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tau} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu^{-1} \left(\alpha \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

que l'on peut mettre sous la forme d'une équation de type :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{avec, } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon^{-1} \alpha_z & -\epsilon^{-1} \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{-1} \alpha_z & 0 & \epsilon^{-1} \alpha_x \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{-1} \alpha_y & -\epsilon^{-1} \alpha_x & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \alpha_z & \mu^{-1} \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\ \mu^{-1} \alpha_z & 0 & -\mu^{-1} \alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ -\mu^{-1} \alpha_y & \mu^{-1} \alpha_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{u} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^T$.

La matrice \mathbf{A} admet trois valeurs propres doubles, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$.

On rappelle que, si \mathbf{u}_{λ_i} est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i ($i = 1, 2, 3$), alors ce vecteur propre doit satisfaire à la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\lambda_i}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}_{\lambda_i}}{\partial \tau} = 0 \quad (2.8)$$

et les invariants de Riemann que l'on cherche, sont ces vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice \mathbf{A} .

Le vecteur propre \mathbf{u}_{λ_1} s'obtient en faisant le produit scalaire des équations du système (2.6) par α . Cela conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\alpha \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial(\alpha \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = 0 \end{cases} \implies \mathbf{u}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \mathbf{E} \\ \alpha \cdot \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Afin de construire les vecteurs propres \mathbf{u}_{λ_2} et \mathbf{u}_{λ_3} , on suppose que les composantes α_x , α_y et α_z sont des constantes, et on fait le produit vectoriel des équations du système (2.6) par α :

$$\frac{\partial(\alpha \times \mathbf{E})}{\partial t} - \epsilon^{-1} \frac{\partial[\alpha \times (\alpha \times \mathbf{H})]}{\partial \tau} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial(\alpha \times \mathbf{H})}{\partial t} + \mu^{-1} \frac{\partial[\alpha \times (\alpha \times \mathbf{E})]}{\partial \tau} = 0 \quad (2.10b)$$

Puisque α est un vecteur unitaire, le produit vectoriel des équations (2.10a) et (2.10b) respectivement par $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\alpha$ et $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\alpha$ conduit à :

$$\frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \partial[\alpha \times (\alpha \times \mathbf{E})]}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial(\alpha \times \mathbf{H})}{\partial \tau} = 0 \quad (2.11a)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \partial[\alpha \times (\alpha \times \mathbf{H})]}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial(\alpha \times \mathbf{E})}{\partial \tau} = 0 \quad (2.11b)$$

Lorsqu'on additionne (2.10a) et (2.10b) respectivement à (2.11b) et (2.11a), on obtient les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial \left[\alpha \times \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \alpha \times (\alpha \times \mathbf{H}) \right]}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial \left[\alpha \times \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \alpha \times (\alpha \times \mathbf{H}) \right]}{\partial \tau} = 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial \left[\alpha \times \mathbf{H} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \alpha \times (\alpha \times \mathbf{E}) \right]}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial \left[\alpha \times \mathbf{H} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \alpha \times (\alpha \times \mathbf{E}) \right]}{\partial \tau} = 0 \quad (2.12b)$$

Et lorsqu'on fait la différence de (2.10a) et (2.10b) respectivement à (2.11b) et (2.11a), on

obtient deux relations supplémentaires données par :

$$\frac{\partial \left[\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E} - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H}) \right]}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial \left[\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E} - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H}) \right]}{\partial \tau} = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial \left[\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E}) \right]}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial \left[\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E}) \right]}{\partial \tau} = 0 \quad (2.13b)$$

On remarque que les relations (2.12a) et (2.13b) donnent le vecteur propre \mathbf{u}_{λ_2} associé à la valeur propre $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$:

$$\mathbf{u}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H}) \\ \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E}) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

De même, les relations (2.13a) et (2.12b) donnent le vecteur propre \mathbf{u}_{λ_3} associé à la valeur propre $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$:

$$\mathbf{u}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E} - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H}) \\ \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{H} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E}) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2.3.2 Flux numériques

Soit deux éléments du maillage que l'on note par Ω_e^- pour désigner l'élément courant sur lequel on cherche la solution, et Ω_e^+ l'élément adjacent. Ces deux éléments ont une interface commune $\Gamma_e = \Omega_e^- \cap \Omega_e^+$, dont normale extérieure est notée $\boldsymbol{\nu}$. On suppose que les lignes caractéristiques sont dirigées suivant la normale $\boldsymbol{\nu}$. Puisque les vecteurs propres \mathbf{u}_{λ_2} et \mathbf{u}_{λ_3} sont invariants le long des caractéristiques, on peut supposer que :

1. Les invariants qui traversent l'interface Γ_e en se propageant de l'élément courant Ω_e^- vers l'élément adjacent Ω_e^+ (sens des vitesses positives) prennent leurs valeurs dans l'élément courant, ce qui se traduit par $\mathbf{u}_{\lambda_3}^{\text{num}} = \mathbf{u}_{\lambda_3}^-$:

$$(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})^{\text{num}} - \mathbf{Z}^- \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^- - \mathbf{Z}^- \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^-) \quad (2.16a)$$

$$(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})^{\text{num}} + \mathbf{Y}^- \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^- + \mathbf{Y}^- \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^-) \quad (2.16b)$$

ce qui s'écrit encore

$$Y^- (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = Y^- \mathbf{v} \times \mathbf{E}^- - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^-) \quad (2.17a)$$

$$Z^- (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = Z^- \mathbf{v} \times \mathbf{H}^- + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}^-) \quad (2.17b)$$

$$\text{avec } Z^- = \sqrt{\frac{\mu^-}{\epsilon^-}} \text{ et } Y^- = \frac{1}{Z^-}$$

2. Les invariants qui traversent l'interface Γ_e en se propageant de l'élément adjacent Ω_e^+ vers l'élément courant Ω_e^- (sens des vitesses négatives) prennent leurs valeurs dans l'élément adjacent, ce qui se traduit par $\mathbf{u}_{\lambda_2}^{\text{num}} = \mathbf{u}_{\lambda_2}^+$:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} + Z^+ \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}^+ + Z^+ \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^+) \quad (2.18a)$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} - Y^+ \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{H}^+ - Y^+ \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}^+) \quad (2.18b)$$

ce qui s'écrit encore

$$Y^+ (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = Y^+ \mathbf{v} \times \mathbf{E}^+ + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^+) \quad (2.19a)$$

$$Z^+ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = Z^+ \mathbf{v} \times \mathbf{H}^+ - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}^+) \quad (2.19b)$$

$$\text{avec en notant } Z^+ = \sqrt{\frac{\mu^+}{\epsilon^+}} \text{ et } Y^+ = \frac{1}{Z^+}.$$

Lorsqu'on additionne (2.17a) à (2.19a) et (2.17b) à (2.19b) on établit les expressions suivantes

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\{\mathbf{Y}\mathbf{E}\}}{\{\mathbf{Y}\}} + \mathbf{v} \times \frac{(\mathbf{v} \times \llbracket \mathbf{H} \rrbracket)}{\{\mathbf{Y}\}} \quad (2.20a)$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\{\mathbf{Z}\mathbf{H}\}}{\{\mathbf{Z}\}} - \mathbf{v} \times \frac{(\mathbf{v} \times \llbracket \mathbf{E} \rrbracket)}{\{\mathbf{Z}\}} \quad (2.20b)$$

Ces expressions (2.20a) et (2.20b) constituent des flux numériques de type décentré avant, encore appelé "flux upwind". Les schémas numériques construits à partir de ce type de flux sont non conservatifs et dissipatifs. Les flux centrés sont obtenus lorsque la fonction saut à l'interface est nulle, ce qui conduit aux expressions ci-dessous (2.21a) et (2.21b). Avec ces flux centrés, les schémas numériques sont conservatifs et dispersifs.

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\{\mathbf{Y}\mathbf{E}\}}{\{\mathbf{Y}\}} \quad (2.21a)$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\{\mathbf{Z}\mathbf{H}\}}{\{\mathbf{Z}\}} \quad (2.21b)$$

2.3.3 Conditions aux bords

Dans l'approche Galerkin discontinue présentée, des termes de flux sont introduits pour décrire les échanges aux interfaces entre éléments. Pour des éléments du maillage possédant une interface sur le bord du domaine, des termes de flux spécifiques doivent être construits pour décrire l'interaction avec l'extérieur. Ceux-ci doivent permettre d'imposer les conditions aux limites physiques souhaitées. Dans nos travaux, pour obtenir les termes de flux correspondant aux conditions aux bords, on adapte ceux mis en place précédemment (2.20) et (2.21), en redéfinissant les fonctions saut et moyenne. Ci-dessous, on présente les expressions de flux utilisées pour imposer un champ électrique ou magnétique dans nos simulations.

Dirichlet électrique

C'est une condition qui permet d'imposer un champ électrique \mathbf{E}_{ext} sur toute ou partie du bord. Elle correspond à :

- Imposer le champ électrique extérieur : $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_D = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$.
- Imposer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique : $\mathbf{v} \times \mathbf{H}_D = \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\text{ext}}$.
- Utiliser les termes de flux spécifiques suivant :

▷ Les flux décentrés "upwind"

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{E}_D + \mathbf{E}^-}{2} \\ \mathbf{H}^- \end{pmatrix}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{E}_D - \mathbf{E}^-}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \{Z\} = Z^+ = Z^- \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}_D + \mathbf{E}^-}{2} \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{H}^- - \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}_D - \mathbf{E}^-}{2Z^-} \right) \end{cases} \quad (2.22)$$

▷ Les flux centrés

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_D \\ \mathbf{H}^- \end{pmatrix} \text{ et } \{Z\} = Z^+ = Z^-, \text{ ce qui donne}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_D \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{H}^- \end{cases} \quad (2.23)$$

On note que si $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, on obtient la condition de Dirichlet homogène électrique qui est connue sous le nom de mur électrique. Elle est couramment utilisée pour traiter les conducteurs parfaits.

Dirichlet magnétique

C'est une condition qui permet d'imposer un champ électrique \mathbf{H}_{ext} sur toute ou partie du bord. Elle correspond à :

- Imposer le champ magnétique extérieur : $\mathbf{v} \times \mathbf{H}_D = \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\text{ext}}$.
- Imposer la continuité de la composante tangentielle du champ électrique : $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_D = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$.
- Utiliser les termes de flux spécifiques suivant :

▷ Les flux décentrés "upwind"

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^- \\ \frac{\mathbf{H}_D + \mathbf{H}^-}{2} \end{pmatrix}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathbf{H}_D - \mathbf{H}^-}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \{\mathcal{Y}\} = \mathcal{Y}^{\text{ext}} = \mathcal{Y}^-, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}^- - \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{H}_D - \mathbf{H}^-}{2\mathcal{Y}^-} \right) \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{H}_D + \mathbf{H}^-}{2} \end{cases} \quad (2.24)$$

—
▷ Les flux centrés

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^- \\ \mathbf{H}_D \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}^- \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{H}_D \end{cases} \quad (2.25)$$

On note que si $\mathbf{H}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, on obtient la condition de Dirichlet homogène magnétique qui est connue sous le nom de mur magnétique.

2.4 Condition d'absorption pour les problèmes de diffraction

Une onde électromagnétique peut se propager dans un domaine homogène infini sans rencontrer d'obstacle. Mais, si elle en rencontre un, alors il apparaîtra un phénomène de diffraction qui est caractérisé par la création d'une onde diffractée. L'étude et la caractérisation de ces ondes diffractées peut permettre d'avoir des informations sur l'objet diffractant. C'est notamment ce principe qui est exploité lors du contrôle électromagnétique des systèmes notamment sur les problématiques de détection d'objets enfouis, ou encore de diagnostic de réseaux filaires par réflectométrie.

La modélisation du phénomène de diffraction des ondes électromagnétiques nécessite une bonne description des ondes diffractées. Lorsque la situation réelle à simuler impose un domaine de

calcul borné, par exemple par des parois de type murs électrique ou murs magnétique, les ondes diffractées interfèrent avec celles réfléchies par les parois, ce qui rend leur étude d'autant plus difficile. Mais lorsque la situation réelle impose de considérer un domaine non borné, par exemple la propagation dans l'espace libre, on doit face à l'impossibilité de construire un tel milieu. Il est alors nécessaire d'établir un problème équivalent défini sur un domaine borné. La question que cela soulève est de savoir comment simuler la continuité de la propagation hors des limites d'un milieu borné, de telle sorte que cela soit équivalent à la propagation dans un milieu infini c'est à dire sans création d'ondes réfléchies aux bords du domaine. Pour faire cela, deux variétés de techniques ont été développées, les parois absorbantes et les couches absorbantes.

2.4.1 Les parois absorbantes

On appelle paroi parfaitement absorbante, une frontière fictive sur laquelle il n'y a pas de phénomène de réflexion des ondes. Sur cette frontière fictive, on définit une condition d'absorption qui ne doit pas modifier les données initiales du problème. Ce type de condition aux frontières est défini à l'aide d'un opérateur pseudo-différentiel global qui doit permettre d'absorber les ondes au niveau de la paroi [47]. Dans le cas des équations de Maxwell elle se définit comme une équation du type :

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}, \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (2.26)$$

où \mathcal{B} est un opérateur pseudo différentiel s'exprimant en fonction des composantes tangentielles des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} . En pratique, il est très difficile d'introduire ce genre d'opérateur dans les schémas numériques et on a alors recours à des approximations. L'approximation au premier ordre de l'équation (2.26), encore connu sous le nom de condition de Silver-Muller, est très répandue dans les travaux de modélisation en électromagnétisme. Celle-ci s'appuie sur l'hypothèse selon laquelle les champs électromagnétiques à l'extérieur du domaine de calcul se propagent comme des ondes planes à incidence normale, ce qui se traduit par : $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} = Z\mathbf{H}$ et $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H} = -Y\mathbf{E}$, avec $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ et $Y = \frac{1}{Z}$. En effectuant un produit vectoriel ces deux expressions par la normale $\boldsymbol{\nu}$, on obtient deux relations qui représentent chacune une condition d'absorption :

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} - Y\boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}) = \mathbf{0} \quad (2.27a)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H} + Z\boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad (2.27b)$$

On remarque que ces deux relations (2.27) correspondent à annuler l'invariant de Riemann u_{λ_3} (2.15) associé à la valeur propre $\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. Cette condition veut aussi dire qu'aucune information n'est transportée par les caractéristiques entrantes. Du côté pratique, cette condition permet de très bien absorber les ondes à incidence normale. Cette absorption se dégrade lorsque les

ondes sont à incidence oblique et on assiste à l'apparition des faibles réflexions pouvant modifier les résultats escomptés. Néanmoins, cette condition est satisfaisante pour de nombreux modèles. Dans nos travaux, nous l'avons adaptée de manière à pouvoir l'utiliser dans des simulations nécessitant de modéliser un champ incident venant de l'extérieur du domaine. La condition implémentée permet d'imposer un champ entrant dans le domaine de calcul et d'absorber les champs sortant du domaine de calcul.

L'implémentation réalisée correspond à :

- Imposer la continuité de la composante tangentielle des champs électrique et magnétique : $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_D = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$ et $\mathbf{v} \times \mathbf{H}_D = \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\text{ext}}$
- Utiliser les termes de flux spécifiques suivant :

▷ Les flux décentrés "upwind"

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{E}_D + \mathbf{E}^-}{2} \\ \frac{\mathbf{H}_D + \mathbf{H}^-}{2} \end{pmatrix}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{E}_D - \mathbf{E}^-}{2} \\ \frac{\mathbf{H}_D - \mathbf{H}^-}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \{\mathcal{Y}\} = \mathcal{Y}^{\text{ext}} = \mathcal{Y}^-, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}_D + \mathbf{E}^-}{2} - \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{H}_D - \mathbf{H}^-}{2\mathcal{Y}^-} \right) \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{H}_D + \mathbf{H}^-}{2} + \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}_D - \mathbf{E}^-}{2\mathcal{Z}^-} \right) \end{cases} \quad (2.28)$$

▷ Les flux centrés

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_D \\ \mathbf{H}_D \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}_D + \mathcal{Z}\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times (\mathbf{H}_D - \mathbf{H}^-)] \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{v} \times \mathbf{H}_D - \mathcal{Y}\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times (\mathbf{E}_D - \mathbf{E}^-)] \end{cases} \quad (2.29)$$

2.4.2 Les couches parfaitement absorbantes

Pour simuler la propagation en espace libre, une autre technique consiste à utiliser un domaine de calcul fini que l'on entoure par des couches dans lesquelles les ondes sortantes seront très fortement atténuées par l'ajout de termes dissipatifs. Ce concept a servi de base au développement des couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers ou PML) qui ont été introduites par J-P Bérenger en 1994 pour traiter des problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques [8]. Ces couches PML, désignent des zones qui absorbent les ondes sortantes sans aucune réflexion à l'interface avec le domaine de calcul. On dit alors qu'une couche est parfaitement adaptée lorsqu'une onde incidente est parfaitement transmise du domaine de calcul à la couche, c'est à dire lorsque le coefficient de réflexion à l'interface entre la PML et le

domaine de calcul est nul :

$$R_{\text{PML/Domaine}} = \left| \frac{u_{\text{ref}}}{u_{\text{inc}}} \right| = 0 \quad (2.30)$$

Dans les PML, les équations de propagation valides dans le domaine de calcul sont modifiées dans le but d'atténuer les ondes sortantes. Dans les développements de J-P Béranger portant sur le cas cartésien, le problème à résoudre est obtenu en décomposant les inconnues initiales comme la somme de contributions dans chaque direction de l'espace. Dans les couches PML, on rajoute des termes de dissipation définis à partir des fonctions d'absorption $\sigma_x(x)$, $\sigma_y(y)$, $\sigma_z(z)$ assimilables à des conductivités [8, 9]. En utilisant les solutions en ondes planes, on établit que la condition de nullité du coefficient de réflexion se traduit sur les fonctions d'absorption σ (σ_x , σ_y , σ_z) par :

$$\int_0^\delta \sigma(s) ds = +\infty \quad (2.31)$$

avec δ l'épaisseur de la couche dans la direction considérée. On dira qu'une couche est parfaitement absorbante lorsque l'onde qui a été transmise à la couche PML devient nulle en atteignant sa frontière extérieure. Ceci est garanti lorsque la fonction σ est singulière sur cette frontière.

L'utilisation de couches PML autre que cartésiennes dans le domaine temporel, a été rendu possible grâce aux développements des couches PML convexes [60, 110]. La mise en place du système d'équations modifié à résoudre suit un principe légèrement différent de celui proposé par J-P Béranger. Dans ce cas, les équations de Maxwell, avec des termes de dissipation pour la zone PML sont d'abord transposées au régime fréquentiel. Dans ce régime, le passage des équations valides dans le domaine de calcul à celles valides dans les couches PML peut s'interpréter comme un changement de métrique de l'espace [109]. Après un passage en coordonnées curviligne des équations en domaine fréquentiel, et grâce à une transformée de Fourier inverse, on établit le nouveau système à résoudre dans le domaine temporel. Celui-ci contient des équations et des variables supplémentaires qui sont introduites pour s'assurer de l'équivalence entre les équations en domaine fréquentiel et les équations en domaine temporel [74, 75].

2.4.3 Optimisation des couches PML

Dans la pratique, il est difficile d'implémenter des couches PML permettant d'avoir une absorption parfaite de l'onde sans aucune réflexion. L'efficacité d'une couche PML va alors dépendre de sa capacité à pouvoir absorber efficacement l'onde tout en minimisant la réflexion à l'interface PML/Domaine. Pour optimiser une couche PML, il faut jouer sur les grandeurs que sont, la fonction d'absorption σ , son épaisseur δ , et sa discrétisation spatiale, dans le but de minimiser l'erreur par rapport à une solution de référence évaluée sur un domaine très grand

non tronqué. Généralement, l'optimisation de PML est réalisée pour chaque cas de simulation, ce qui peut rendre fastidieux le travail de modélisation. L'objectif du travail réalisé a été de déterminer les paramètres optimum de PML à utiliser pour l'ensemble de nos simulations. Pour cela, l'efficacité des PML construites avec des fonctions d'absorption polynomiales et hyperboliques ont été comparées et leurs paramètres ont été optimisés pour des problèmes de diffraction rencontrés en CEM. Ces travaux ont mis en évidence l'existence d'un paramètre indépendant du problème traité et commun aux fonctions d'absorption hyperboliques couramment utilisées dans les PML. Il a été prouvé dans ces travaux que l'une des deux fonctions d'absorption suivante peut être utilisée pour l'ensemble de nos simulations portant sur le calcul de l'efficacité de blindage : $\sigma_h(d) = \frac{c_0}{\delta - d}$, $\sigma_{sh}(d) = \frac{c_0}{\delta - d} - \frac{c_0}{\delta}$, avec c_0 la vitesse de propagation et δ l'épaisseur de la PML. Ces travaux sont présentés dans l'article ci-après **An optimum PML for scattering problems in the time domain** publié dans le journal *European Physical Journal Applied Physics* [RI.22].

An optimum PML for scattering problems in the time domain^{*}

Axel Modave^{1,a}, Abelin Kameni², Jonathan Lambrechts³, Eric Delhez⁴, Lionel Pichon², and Christophe Geuzaine¹

¹ Department of Electrical Engineering and Computer Science (Institut Montéfiore), Université de Liège, Grande Traverse 10, 4000 Liège, Belgium

² Laboratoire de Génie Électrique de Paris, UMR 8507 CNRS, Supelec, Universities Paris VI and Paris XI, 11 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

³ Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering (iMMC), Université Catholique de Louvain-la-Neuve, avenue George Lemaître 4-6, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

⁴ Department of Aerospace and Mechanical Engineering, Université de Liège, Grande Traverse 12, 4000 Liège, Belgium

Received: 5 October 2012 / Received in final form: 30 November 2012 / Accepted: 2 January 2013

Published online: 6 November 2013 – © EDP Sciences 2013

Abstract. In electromagnetic compatibility, scattering problems are defined in an infinite spatial domain, while numerical techniques such as finite element methods require a computational domain that is bounded. The perfectly matched layer (PML) is widely used to simulate the truncation of the computational domain. However, its performance depends critically on an absorption function. This function is generally tuned by using case-dependent optimization procedures. In this paper, we will present some efficient functions that overcome any tuning. They will be compared using a realistic scattering benchmark solved with the Discontinuous Galerkin method.

1 Introduction

With the increasing use of electrical, electronic and electromagnetic systems, the study of their undesirable interactions and side effects is an important aspect to be considered by the design engineer. In this context, numerical methods are intensively used to solve problems of electromagnetic compatibility (EMC).

Many EMC problems dealing with radiated perturbations are defined on large or infinite spatial domains. When finite element-type numerical methods are used, a major challenge is then to truncate the computational domain without altering too much the accuracy of the solution.

Different techniques have been developed to handle the truncation of the computational domain. The perfectly matched layer (PML) technique, introduced by Bérenger [1], is one of them and is widely used in both frequency and time domains. The idea is to surround the truncated computational domain with a specific layer. Inside it, the physical medium is adapted in such a way that outgoing waves are progressively damped and leave the domain without reflection. To achieve this, the differential equations of the problem are transformed and an absorption function $\sigma(d)$ governing the damping is introduced.

This paper deals with the choice of the function $\sigma(d)$ that is still tricky when numerical methods are used. We present functions that provide good results without any tuning, unlike the commonly used absorption functions that require case-dependent optimization procedures.

A set of PML equations and a nodal Discontinuous Galerkin (DG) method are introduced in Section 2 for a two-dimensional scattering problem in the time domain. Functional forms of σ are presented and compared with case-dependent-optimized polynomial profiles in Section 3. Two examples of scattering applications are finally presented in Section 4.

2 Mathematical and numerical framework

2.1 Scattering problem in unbounded domain

We consider the two-dimensional scattering of waves by an obstacle in an unbounded domain. The transverse magnetic case is treated, where the electric field has only one component in the z -direction, i.e., $\mathbf{e} = [0, 0, e_z]$, while the magnetic field is perpendicular to the z -direction, i.e., $\mathbf{h} = [h_x, h_y, 0]$.

In order to perform the numerical simulations with a bounded computational domain, the unbounded domain is truncated, and the resulting domain Ω is surrounded by a PML Ω_{pml} . The domain Ω is assumed to be convex. Its boundary Γ must be sufficiently regular. The PML thickness δ is constant.

^{*} Contribution to the Topical Issue “Numelec 2012”, Edited by Adel Razek.

^a e-mail: a.modave@ulg.ac.be

The non-zero components of the fields \mathbf{e} and \mathbf{h} are governed by Maxwell's equations in Ω . An incident field is prescribed using a total/scattered field approach with transition at Γ (see, e.g., [2], Sect. 5.6). The scattered field formulation is then used in Ω_{pml} while a total field formulation is considered in Ω .

2.2 A general PML for convex truncated domain

In the PML Ω_{pml} , the scattered fields are governed by the modified equations

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{h} = -\varepsilon(\sigma - \sigma_\kappa) \mathbf{q} - \varepsilon \sigma_\kappa \mathbf{e}, \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{e} = -\mu(\sigma - \sigma_\kappa) \mathbf{t}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{h}) - \mu \sigma_\kappa \mathbf{h}. \quad (2)$$

The additional vector field \mathbf{q} introduced in equation (1) has only one component along \mathbf{e}_z , i.e., $\mathbf{q} = [0, 0, q_z]$, and is governed by

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{n}} \times \mathbf{h} = -\varepsilon \sigma \mathbf{q}, \quad (3)$$

with $\nabla_{\mathbf{n}} = [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)]$. In these equations, $\sigma(d)$ is the absorption function, assumed to be positive in Ω_{pml} , and

$$\sigma_\kappa(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa^{-1} + d} \int_0^d \sigma(r) dr, \quad (4)$$

where $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma)$ is the distance to Γ and $\kappa(\mathbf{x})$ is the curvature of Γ at the point closest to \mathbf{x} . The unit vector fields $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ and $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ give the normal and the tangent directions to Γ , at the same point. The vector field \mathbf{n} then gives the stretching direction of the PML.

These equations are built using a procedure similar to the one described by Collino and Monk [3]. Maxwell's equations are firstly written in the frequency domain with curvilinear coordinates. A complex substitution of d is then made (see [3], Sect. 3). Finally, the time-dependent equations (1) and (2) are obtained using an inverse Fourier transform in space and defining the additional equation (3). These equations are equivalent to those given in [3] for the transverse electric mode and a circular truncation boundary.

If $\sigma(d)$ is singular at the outer boundary of the PML, i.e., at $d = \delta$, the solution must satisfy a homogeneous Dirichlet condition on one of the fields for the problem to be well posed. Alternatively, a Neumann condition or even a radiation condition could be implemented to improve the efficiency of the layer. In this paper, a homogeneous Dirichlet condition on \mathbf{h} is always prescribed.

2.3 Numerical solution

The equations above are solved using the nodal DG finite element method as described below.

The domain Ω and the PML Ω_{pml} are decomposed into triangular elements. Over each element Ω_e , each non-zero Cartesian component of each field is approached by a sum of Lagrange basis functions, i.e.,

$$u(t, \mathbf{x}) \approx u_e^{\text{num}}(t, \mathbf{x}) = \sum_n u_{e,n}^{\text{num}}(t) \phi_{e,n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e,$$

where u is the considered component, u_e^{num} is its discrete approximation in the element Ω_e , $u_{e,n}^{\text{num}}$ is the value of u_e^{num} at the node n and $\phi_{e,i}$ is the corresponding Lagrange function that is equal to one at the node n and equal to zero at the others. The global numerical solution is then discontinuous at the cell interfaces [4–6].

The numerical scheme is obtained by considering a weak form of the equations. Multiplying the equations (1)–(3) by test functions $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ and $\tilde{\mathbf{q}}$, integrating the resulting equations over each cell Ω_e and using integration by part, one obtains

$$\int_{\Omega_e} \left[\varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \cdot \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{h} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{e}}) - \mathbf{S}_e \cdot \tilde{\mathbf{e}} \right] d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} [\mathbf{n}_e \times \mathbf{h}]^{\text{num}} \cdot \tilde{\mathbf{e}} d\Gamma_e = 0, \quad (5)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \cdot \tilde{\mathbf{h}} + \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{h}}) - \mathbf{S}_h \cdot \tilde{\mathbf{h}} \right] d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} [\mathbf{n}_e \times \mathbf{e}]^{\text{num}} \cdot \tilde{\mathbf{h}} d\Gamma_e = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{h} \cdot (\nabla_{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{S}_q \cdot \tilde{\mathbf{q}} \right] d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{\kappa^{-1} + d} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) \cdot \tilde{\mathbf{q}} \right] d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} [(\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \times \mathbf{h})]^{\text{num}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} d\Gamma_e = 0, \quad (7)$$

where \mathbf{S}_e , \mathbf{S}_h and \mathbf{S}_q are the right-hand sides of the equations (1)–(3), Γ_e is the boundary of the cell Ω_e and \mathbf{n}_e is the exterior normal to Γ_e . The fields are discontinuous at the interfaces between adjacent cells. The values at the two sides of a given interface are both considered to compute the boundary terms. For equations (5) and (6), the two following options are used:

1. A centered discretization, i.e.,

$$[\mathbf{n}_e \times \mathbf{h}]^{\text{num}} = \frac{\mathbf{n}_e \times \{Z\mathbf{h}\}}{\{Z\}},$$

$$[\mathbf{n}_e \times \mathbf{e}]^{\text{num}} = \frac{\mathbf{n}_e \times \{Y\mathbf{e}\}}{\{Y\}}.$$

2. An upwind discretization, i.e.,

$$[\mathbf{n}_e \times \mathbf{h}]^{\text{num}} = \frac{\mathbf{n}_e \times \{Z\mathbf{h}\}}{\{Z\}} - \frac{1}{\{Z\}} \mathbf{n}_e \times (\mathbf{n}_e \times \llbracket \mathbf{e} \rrbracket),$$

$$[\mathbf{n}_e \times \mathbf{e}]^{\text{num}} = \frac{\mathbf{n}_e \times \{Y\mathbf{e}\}}{\{Y\}} + \frac{1}{\{Y\}} \mathbf{n}_e \times (\mathbf{n}_e \times \llbracket \mathbf{h} \rrbracket),$$

while a Lax-Friedrichs discretization is considered for the last equation (7), i.e.,

$$[(\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \times \mathbf{h})]^{num} = (\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}) \frac{\mathbf{n} \times \{Z\mathbf{h}\}}{\{Z\}} - c[[\mathbf{q}]],$$

where c , Y and Z are the phase velocity, the admittance and the impedance of the medium. $\{u\} = (u^+ + u^-)/2$ and $[[\mathbf{h}]] = (u^+ - u^-)/2$ are the mean and the jump of the quantity u at the interface. The superscript “ $-$ ” corresponds to the interior value, while “ $+$ ” is for the exterior value [6].

The spatial integration scheme is obtained by injecting the discrete fields in the equations and using a numerical integration. The time stepping is made with the Crank-Nicholson method.

3 Absorption functions

The success of the PML technique is mainly due to the perfectly matching property at the interface between the PML medium and the physical domain in the continuous context. It ensures the perfect transmission of waves from one medium to the other without reflection. Moreover, for a PML with a finite thickness δ , reflections are avoided if σ is singular at the outer boundary of the PML (see [7] or [8]). However, this condition does not apply to discrete contexts (e.g., after discretization by finite elements) and the perfect matching is not ensured.

When numerical methods are used, the properties of the PML depend critically on σ , on the thickness δ and on the discretization. The continuous properties of the PML can be nearly recovered by taking a large thickness δ or by using a very accurate discretization with a fine mesh or high-order elements. This approach is however not feasible because it induces a substantial increase of the computational cost.

The function $\sigma(d)$ is the most crucial parameter. Indeed, the performance of the PML decreases dramatically when the damping of the solution induced by large values of σ cannot be captured by the discretization grid [9]. Therefore, σ must be chosen in such a way as to introduce enough damping of outgoing waves without inducing a too sharp decrease of the fields in the PML. Polynomial profiles of σ allow such a progressive damping:

$$\sigma_p(d) = \alpha \left(\frac{d}{\delta} \right)^n, \quad (8)$$

with $n > 0$ and where α is the value of the absorption function at the outer side of the layer. This profile is widely used (see, e.g., [7, 8, 10, 11]). However, no general rule exists to choose the parameters α and n . Therefore, they are usually tuned using expensive and case-dependent optimization procedures. As an alternative, hyperbolic profiles have been proposed by Bermúdez et al. [7]:

$$\sigma_h(d) = \frac{\alpha}{(\delta - d)^n}, \quad (9)$$

$$\sigma_{sh}(d) = \frac{\alpha}{(\delta - d)^n} - \frac{\alpha}{\delta^n}, \quad (10)$$

with again two free dimensionless parameters: α and n . Fortunately, these two profiles do not require any tuning with $n = 1$. Bermúdez et al. [7] show in a continuous finite element context with a straight Cartesian PML and time-harmonic equations that the solution is indeed close to the optimum when α is equal to the propagation velocity of the medium. We extended this result to the finite difference and the DG contexts with the time-dependent equations in [9, 12].

4 Numerical simulations

We show in this section that the results of the previous works [7, 9, 12] are still valid for more realistic scattering benchmarks.

4.1 Scattering by a cavity with an aperture

Consider the scattering by the perfectly conducting cavity studied by Ojeda and Pichon [13] in the time-harmonic context. This cavity is rectangular (600 mm \times 400 mm) of

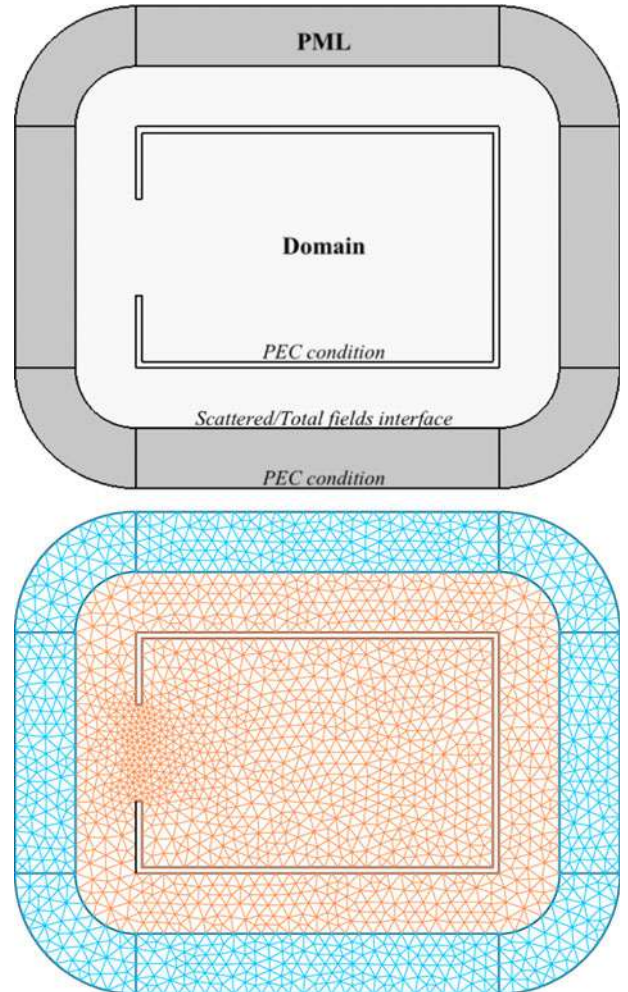


Fig. 1. Geometry and mesh of the first benchmark.

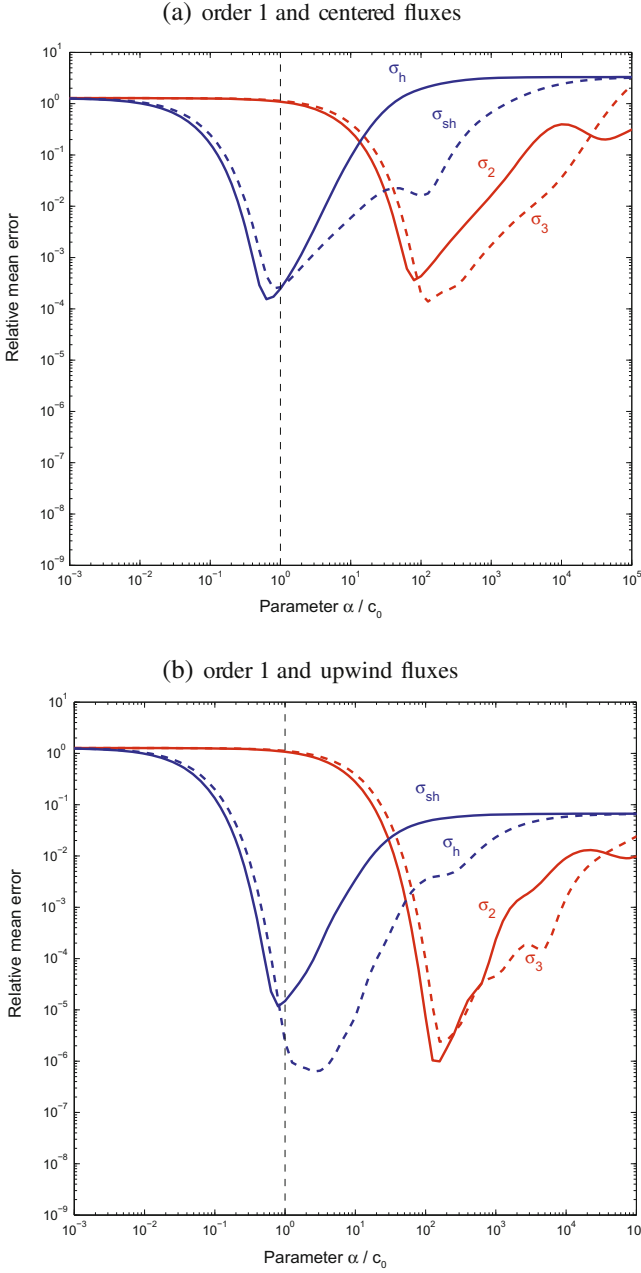


Fig. 2. Relative mean error as a function of α with the different absorption functions for the first benchmark. Elements of order 1 are used with centered (a) or upwind numerical fluxes (b). Vertical lines indicate $\alpha = c_0$.

thickness 20 mm with an aperture of 160 mm in the middle of the left side (Fig. 1). The truncated computational domain is rectangular with rounded corners, surrounded by a PML of thickness $\delta = 0.2$ m. A Gaussian pulse is prescribed with the incident field, i.e.,

$$e^i = E^i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \exp \left[- \left(\frac{(x - x_0) - c_0 t}{\ell} \right)^2 \right] \hat{z}, \quad (11)$$

with $x_0 = -1200$ mm, $\ell = 50$ mm, $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ and $E^i = 0.5\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. It describes a pulse coming from the

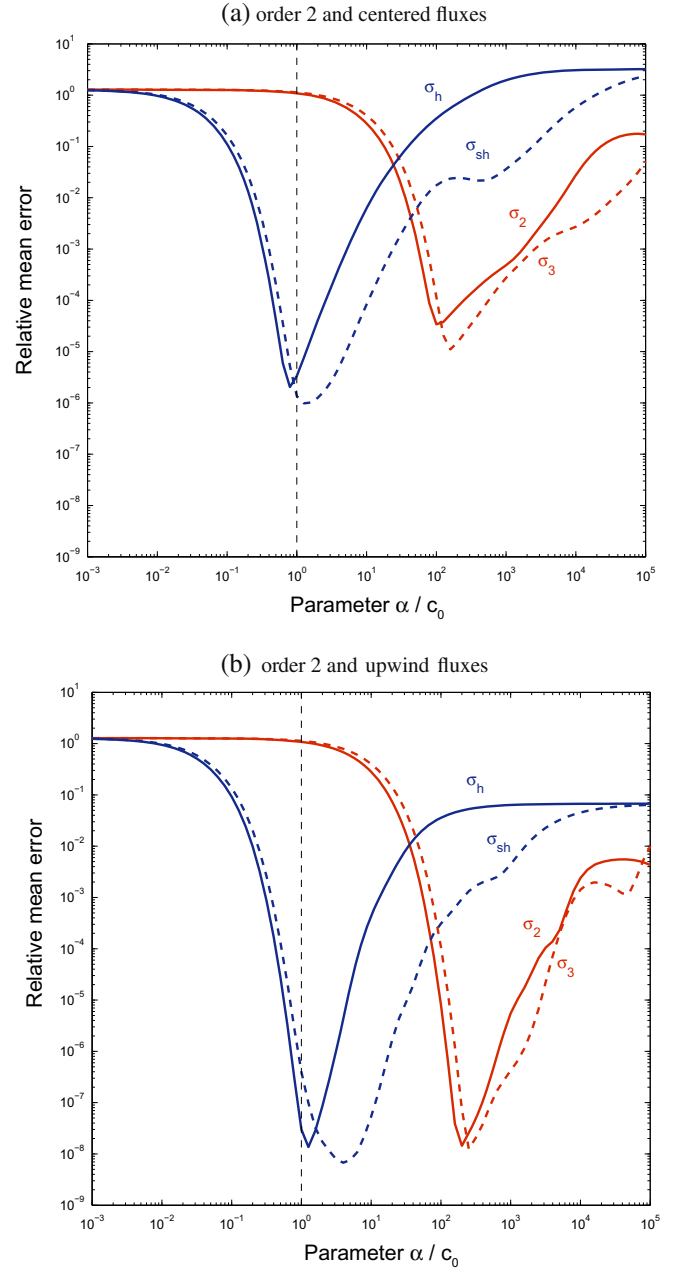


Fig. 3. Relative mean error as a function of α with the different absorption functions for the first benchmark. Elements of order 2 are used with centered (a) or upwind numerical fluxes (b). Vertical lines indicate $\alpha = c_0$.

left side of the domain and propagating to the right. The final time of the simulation is $T = 250\Delta t$, with the time step $\Delta t = 510^{-11}$ s.

The efficiency of the PML is quantified by computing the relative mean error of the simulation, i.e.,

$$\frac{\int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \|e - e_{\text{ref}}\|^2 + \frac{\mu_0}{2} \|h - h_{\text{ref}}\|^2 \right) d\Omega dt}{\int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \|e_{\text{ref}}\|^2 + \frac{\mu_0}{2} \|h_{\text{ref}}\|^2 \right) d\Omega dt}, \quad (12)$$

where \mathbf{e}_{ref} and \mathbf{h}_{ref} are reference fields computed with a larger computational domain. Figures 2 and 3 show this relative mean error as a function of α for different absorption functions: parabolic σ_2 , cubic σ_3 , hyperbolic σ_h (with $n = 1$) and shifted-hyperbolic σ_{sh} (with $n = 1$).

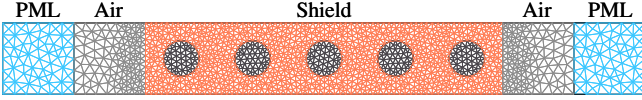


Fig. 4. Geometry and mesh of the second benchmark.

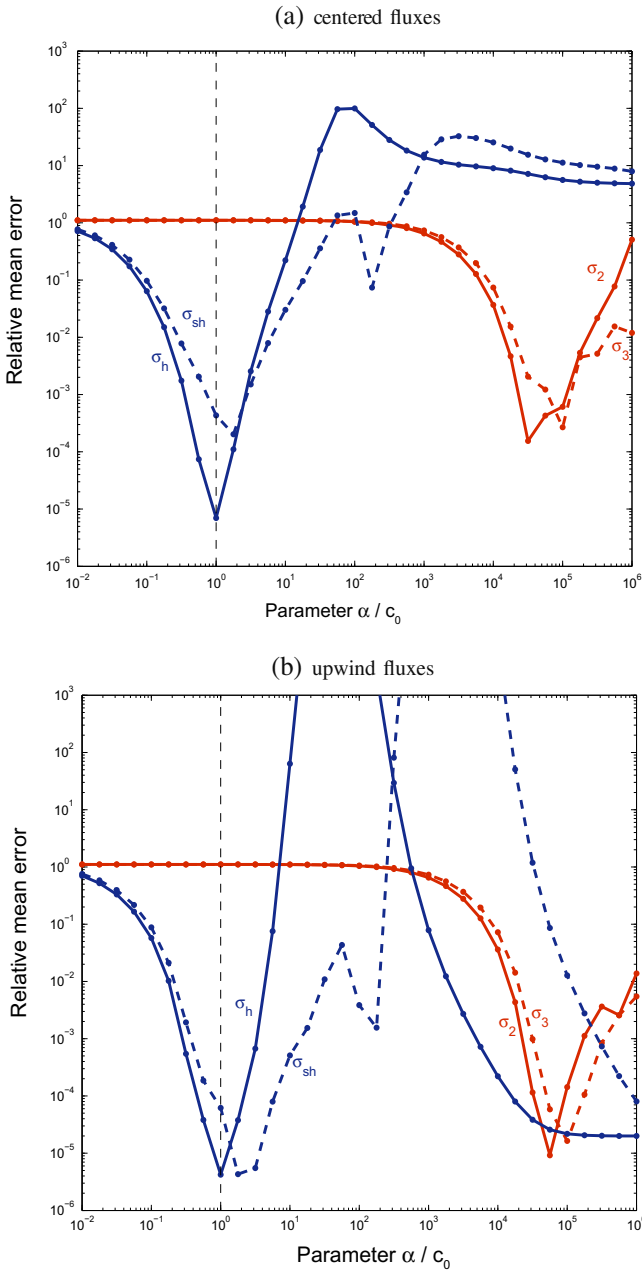


Fig. 5. Relative mean error as a function of α with the different absorption functions for the second benchmark. Elements of order 1 are used with centered (a) or upwind numerical fluxes (b). Vertical lines indicate $\alpha = c_0$.

For each case, the different absorption functions considered in this numerical experiment give equivalent results when they are optimized, i.e., at the minimum of the curves of Figures 2 and 3, except the hyperbolic function σ_h that does not perform so well at order 1 with upwind numerical fluxes.

The smallest error with σ_h and σ_{sh} is always obtained with a value of α close to the propagation velocity c_0 .

4.2 Scattering by an electromagnetic shield

As a second application, consider the scattering of a plane wave by the wall represented in Figure 4. The wall is made of a non-conducting medium and is filled with circular conducting inclusions stored in squared form. The thickness of the wall is 1 mm and the surfacic inclusion rate is $\tau = 20\%$. The permittivity is $5\varepsilon_0$ in the non-conducting medium and ε_0 in the inclusions. The permeability is μ_0 throughout the wall. The conductivity of the inclusions is 10^3 S/m.

In this problem, we are not interested in the electromagnetic field in the air. Therefore, two PMLs are directly put against the walls. In this simulation, the incident field (11) is prescribed at the interface between the left PML and the wall using a total/scattered field transition, with $x_0 = -5$ mm, $\ell = 1$ mm and $E^i = 0.01\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Reflected waves are damped in the left PML, while the right PML absorbs transmitted waves.

The relative mean error (12), where the integration is carried out over the shield and the air layers, is plotted in Figure 5. The duration of the simulation and the time step are $T = 3000 \Delta t$ and $\Delta t = 410^{-14}$ s, respectively.

The curves confirm the conclusions obtained with the previous benchmark. The optimum α is close to c_0 for hyperbolic functions just like for the first test case. While an optimum value can also be identified for polynomial profiles, this value differs significantly from the optimum value found for the cavity problem. It differs also from the optimum values identified in previous works.

5 Conclusion

A set of PML equations have been presented for two-dimensional scattering EMC problem in the time domain, to simulate a two-dimensional convex truncation boundary. The computational domain could then be reduced to decrease the computational cost.

Concerning the absorption function $\sigma(d)$, the results of this paper are coherent with those of previous works [7, 9, 12]: hyperbolic and shifted-hyperbolic functions (9) and (10) can be used with $\alpha = c$ and $n = 1$. They are efficient, without any case-dependent costly tuning. By contrast, while polynomial profiles perform equally well, the optimum values of the corresponding coefficients are strongly case dependent and cannot be set on physical grounds only. The hyperbolic and shifted-hyperbolic profiles are therefore potentially much better

suiting to large-scale industrial EMC problems, e.g., three-dimensional simulations of the shielding effectiveness of complex structures.

This work was supported in part by the Belgian Science Policy (IAP P6/21 and P7), Belgian French Community (ARC 09/14-02) and Walloon Region (WIST3 No. 1017086 “ONELAB”). Jonathan Lambrechts is a Postdoctoral Researcher with the Belgian National Fund for Scientific Research (FNRS).

References

1. J.P. Bérenger, *J. Comput. Phys.* **114**, 185 (1994)
2. A. Taflové, S.C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd edn. (Artech House, Boston, 2005)
3. F. Collino, P.B. Monk, *SIAM J. Sci. Comput.* **19**, 2061 (1998)
4. G. Cohen, X. Ferrières, S. Pernet, *J. Comput. Phys.* **217**, 340 (2006)
5. L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohreng, S. Piperno, *Math. Model. Numer. Anal.* **39**, 1149 (2005)
6. J.S. Hesthaven, T. Warburton, *J. Comput. Phys.* **181**, 186 (2002)
7. A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, R. Rodríguez, *SIAM J. Sci. Comput.* **30**, 312 (2007)
8. F. Collino, P.B. Monk, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **164**, 157 (1998)
9. A. Modave, E. Deleersnijder, E.J.M. Delhez, *Ocean Dyn.* **60**, 65 (2010)
10. J.P. Bérenger, *Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics* (Morgan & Claypool, 2007)
11. S. Gedney, in *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, edited by A. Taflové (Artech House, 2005), pp. 273–328
12. A. Modave, E.J.M. Delhez, C. Geuzaine, in *Proceedings of the 10th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves Propagation, Vancouver, Canada, 2011*, pp. 591–594
13. X. Ojeda, L. Pichon, *J. Electromagn. Waves Appl.* **19**, 1375 (2005)

2.5 Schéma numérique pour l'évolution temporelle

La discrétisation temporelle d'une équation s'opère sur un intervalle fini $[0, T]$. Elle s'appuie sur une suite croissante de N points équi-répartis $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, telle que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. A partir de cette suite, on définit le pas de temps par $\delta t = t_{n+1} - t_n$ et une solution discrete par $U^n = U(t_n) = U(n\delta t)$. La discrétisation temporelle consiste à approcher l'opérateur de dérivation par une formule de dérivée à droite : $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t}$.

Le système d'équations issu de la discrétisation spatiale des équations de Maxwell peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = F(\mathbf{U}, t) \quad (2.32)$$

avec $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ et $F(\mathbf{U}, t) = \begin{pmatrix} F_E(\mathbf{H}) \\ F_H(\mathbf{E}) \end{pmatrix}$ dans le cas d'un flux centré et $F(\mathbf{U}, t) = \begin{pmatrix} F_E(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \\ F_H(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \end{pmatrix}$ dans le cas d'un flux décentré upwind. Dans mes travaux, pour résoudre ce système d'équations ordinaires, j'ai principalement travaillé avec les méthodes de Runge-Kutta. Dans les sections suivantes, je propose une brève présentation des méthodes Runge-Kutta implicites et explicites, et un résumé de ma contribution à la réduction du temps de simulation grâce à l'hybridation d'une approche Runge-Kutta explicite.

2.5.1 Les méthodes de Runge-Kutta implicites et explicites

La méthode de Runge-Kutta sert à calculer itérativement la solution discrète U^{n+1} à partir de la connaissance de la solution U^n en utilisant un ensemble de points intermédiaires définis sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Les schémas numériques associés à cette approche peuvent être explicites ou implicites.

- Dans les cas explicites, la stabilité et la convergence des schémas numériques dépendent de la condition (Courant - Friedrichs - Levy) imposé sur le pas de temps. On rappelle que cette condition contraint le pas de temps δt afin de garantir la convergence. Celui-ci doit satisfaire à l'inégalité suivante :

$$\max_{\Omega_e \in \mathcal{I}} \left(\frac{c}{h} \right) \delta t \leq A \quad (2.33)$$

où h désigne le rayon de courbure des éléments du maillage, A une constante et c la vitesse de propagation de l'onde.

- Dans les cas implicites, les schémas numériques sont inconditionnellement stables sans

aucune restriction sur le pas de temps, mais nécessitent la résolution de systèmes linéaires ce qui est un inconvénient en terme de temps de calcul à cause des opérations d'inversions matricielles.

Une approche de Runge-Kutta à s étapes intermédiaires repose sur la connaissance des coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{s \times s}$ et de deux vecteurs b et c de \mathbb{R}^s . Ceux-ci sont généralement présentés sous la forme d'un tableau appelé tableau du Butcher.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 2.1 – Tableau de butcher

1. Runge-Kutta explicite

L'algorithme explicite consiste à calculer U^{n+1} à partir de U^n en effectuant les opérations suivantes :

(a) Solutions intermédiaires :

$$U^k = U^n + \delta t \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj} K_j \text{ avec } 1 \leq k \leq s$$

$$K_k = F(U^k, t_n + c_k \delta t)$$

(b) Solution à t_{n+1} :

$$U^{n+1} = U^n + \delta t \sum_{k=1}^s b_k K_k$$

Les schémas Runge-Kutta explicites couramment rencontrés sont ceux à 1, 2, 3, 4 étapes intermédiaires dont la matrice A et les vecteurs b et c sont respectivement donnés par :

— $s = 1$ (Euler explicite) : $A = (0)$, $b = (0)$ et $c = (1)$

— $s = 2$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

— $s = 3$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

— $s = 4$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Runge-Kutta implicite

L'algorithme implicite à s étapes est quasiment identique à celui du cas explicite :

(a) Solutions intermédiaires :

$$U^k = U^n + \delta t \sum_{j=1}^k A_{kj} K_j \text{ avec } 1 \leq k \leq s$$

$$K_k = F(U^k, t_n + c_k \delta t)$$

(b) Solution à t_{n+1} :

$$U^{n+1} = U^n + \delta t \sum_{k=1}^s b_k K_k$$

La différence se trouve dans le calcul des solutions intermédiaires U^k . Puisque la grandeur K_k dépend de U^k , il est alors nécessaire de résoudre un système matriciel à chaque étapes intermédiaires. Les schémas Runge-Kutta implicites couramment rencontrés sont ceux à 1, 2 étapes intermédiaires dont la matrice A et les vecteurs b et c sont donnés par :

- $s = 1$ étape intermédiaire (Euler implicite) : $A = (1)$, $b = (1)$ et $c = (1)$
- $s = 2$ étapes intermédiaires : $A = \begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

En pratique, pour de grands systèmes, les schémas explicites sont préférés aux schémas implicites car ne nécessitent pas la résolution de problèmes matriciels aux étapes intermédiaires. Malheureusement la convergence de ces approches explicites est liée au pas de temps donné par la condition CFL. Généralement celui utilisé est calculé sur le plus petit élément du maillage, ce qui conduit à des coûts de calcul très importants notamment lorsque le système modélisé contient de petits détails nécessitant des maillages fins.

2.5.2 Runge-Kutta explicite avec pas de temps local

Dans de nombreuses applications, il est nécessaire de raffiner localement le maillage pour pouvoir capter certain phénomènes. Dans ces cas, l'utilisation du pas de temps calculé sur le plus petit élément du maillage conduit à des coûts de calcul très importants. Afin de réduire ces coûts, il faut pouvoir utiliser un pas de temps supérieur que celui calculé par le plus petit élément.

Des approches dites à pas de temps local font parties des techniques développées pour modifier localement le pas de temps dans un schéma numérique [35, 59]. Dans nos travaux nous nous sommes intéressés à une approche dite "multirate" Runge-Kutta explicite qui a été initialement mise en place pour résoudre les équations de la dynamique des fluides discrétisées par une approche de Galerkin discontinue [96, 99]. Notre travail a consisté à transposer cette approche à la résolution des équations de Maxwell pour le calcul des champs électromagnétiques rayonnés. L'approche "multirate" Runge-Kutta repose sur le choix d'une méthode Runge-Kutta de base,

et sur le tri des éléments du maillage en fonction de leur taille avec constitution de plusieurs groupes d'éléments. Pour chaque groupe, la méthode Runge-Kutta explicite de base est stable pour le pas de temps calculé sur son plus petit élément. D'une manière générale, cette méthode consiste à résoudre le problème algébrique issu de la discrétisation spatiale des équations, sur différents groupes d'éléments, en utilisant des pas de temps différents, et en s'assurant que les échanges d'informations entre les différents groupes se fassent aux mêmes moments. Pour mettre cela en place, il faut modifier pour chaque groupe les étapes intermédiaires de l'approche Runge-Kutta explicite de base, et introduire des zones dite tampon qui serviront à l'échange d'informations entre les groupes. Dans l'article ci-après **Multirate Technique for Explicit Discontinuous Galerkin Computations of Time-Domain Maxwell Equations on Complex Geometries** publié dans *IEEE Transactions On Magnetics* nous présentons une approche "Multirate" basée sur la méthode Runge-Kutta explicite à deux étapes intermédiaires [RI.12]. Dans cet article, on montre notamment que pour des simulations sur des géométries complexes, on peut réduire considérablement le temps de calcul par rapport à l'approche Runge-Kutta de base utilisant le pas de temps calculé sur le plus petit élément du maillage.

Multirate Technique for Explicit Discontinuous Galerkin Computations of Time-Domain Maxwell Equations on Complex Geometries

A. Kameni,¹ B. Seny,² and L. Pichon¹

¹Group of Electrical Engineering-Paris, CentraleSupélec, Université Paris Sud, Université Pierre et Marie Curie, Gif-sur-Yvette 91192, France

²Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve B-1348, Belgium

This paper presents a multirate technique to improve and optimize the time step of a second-order two-stage explicit Runge–Kutta (ERK) scheme. In this technique, the mesh elements are stored in different groups according to their stable time steps. These groups are sorted into two classes: 1) the bulk groups, where the two-stage ERK method is applied once or repeatedly; 2) the buffer groups that are used to accommodate the transition between two bulk groups. This technique is proposed for accelerating the explicit discontinuous Galerkin computations of the time-domain Maxwell equations. An application example on a human skull is proposed to show the efficiency of this technique and to simulate wave propagation on complex geometries.

Index Terms—Discontinuous Galerkin method, explicit Runge–Kutta (ERK) schemes, Maxwell equations, multirate technique.

I. INTRODUCTION

EXPLICIT methods, such as the explicit Runge–Kutta (ERK) schemes, are commonly used to perform the electromagnetic modeling of complex systems. The maximum allowable time step to ensure stability and convergence depends on the Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) condition. The time step must be proportional to the element size and inversely proportional to the maximum eigenvalue of the Jacobian of the system. Unstructured meshes are often required to capture a wide spectrum of physical scales. Local mesh refinements may be responsible for the significant gaps between the smallest and average element sizes. In such cases, the efficiency of the traditional single-rate explicit time-stepping methods may be drastically low with respect to the problem size.

The discontinuous Galerkin methods are well suited to be used in combination with a local time-stepping strategy to reduce the expensive computations by adapting the time step under local stability conditions [1], [2]. The multirate methods are a subset of the local time-stepping schemes family. They allow the use of different time steps that are integer ratios of each other to solve a discrete system [3]. This technique has been used with a multistep Adams–Bashforth scheme to improve the discontinuous Galerkin computations of the Maxwell equations when the mesh is sorted in two groups [4]. The first group is constituted by fine elements, where the Adams–Bashforth scheme is applied repeatedly, and the second group is constituted by coarse elements, where the Adams–Bashforth scheme is applied once.

The development and the implementation of the ERK multirate schemes have been recently proposed to accelerate geophysical flow computations when the mesh is sorted in few groups [5]. An extension of these strategies to the parallel framework has also been proposed in [6].

In this paper, a multirate technique based on a second-order accurate two-stage ERK method (Heun’s method) is presented and applied on the Maxwell equations. This approach consists of gathering the mesh elements in different groups that satisfy the CFL condition for a certain range of time steps. These groups are sorted into two classes: 1) the bulk groups, where a two-stage ERK method is applied once or repeatedly; 2) the buffer groups that are used to accommodate the transition between two bulk groups, where a two-stage ERK scheme is adapted to coincide with the ERK schemes used in the bulk groups. The use of these buffer groups allows an increase in the reduction in the computational cost. The efficiency of this approach is shown through the computations of an electric field on a human skull.

II. MAXWELL EQUATIONS AND DISCRETE SYSTEM

Let E , H , and J be the electric field, the magnetic field, and the current density, respectively. They satisfy the Maxwell equations given by

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t E - \nabla \times H = -J \\ \mu \partial_t H + \nabla \times E = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where ϵ and μ are the permittivity and the permeability of the medium, respectively. In a conductive medium, $J = \sigma E$, with σ being the conductivity.

The discontinuous Galerkin methods are introduced for solving the conservative form of partial differential equations. This method consists of discretizing the variational formula-

Manuscript received July 5, 2015; revised September 4, 2015; accepted September 9, 2015. Date of publication September 22, 2015; date of current version February 17, 2016. Corresponding author: A. Kameni (e-mail: abelin.kameni@lgep.supelec.fr).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2015.2480537

TABLE I

(LEFT) BUTCHER TABLEAU OF RK22. (CENTER) BUTCHER TABLEAU OF RK22^{4a} ISSUED FROM APPLYING TWICE RK22. (RIGHT) BUTCHER TABLEAU OF THE EXTENDED METHOD RK22^{4b}

0	1/2	1/2	0	1	1	0	0	0	0
1	1/2	1/4	1/4	0	0	0	1	0	0
1	1/2	1/4	1/4	1/2	1	0	0	0	1
0	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4

tion of (2) on each mesh element T of the domain $\Omega = \cup T$

$$\begin{cases} \int_T \epsilon \partial_t E \phi - \int_T H \times \nabla \phi - \int_{\partial T} (n \times H) \phi = - \int_T \sigma E \phi \\ \int_T \mu \partial_t H \psi + \int_T E \times \nabla \psi + \int_{\partial T} (n \times E) \psi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

where ϕ and ψ are the test functions.

In each T , a finite-element method is applied, and the mapping technique is used to facilitate the use of high-order mesh elements. The interface terms are replaced by numerical flux expressions as in a finite-volume method. Different formulations of the flux expressions exist [7]. Expression (3), shown below, resulting in different numerical schemes, is implemented. For $\alpha = 0$, the centered fluxes are obtained, and the numerical schemes are dispersive. For $\alpha = 1$, the upwind fluxes are obtained, and the numerical schemes are dissipative

$$\begin{cases} (n \times H)^{\text{num}} = n \times \frac{\{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H\}}{\{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\}} - \alpha \left(n \times \frac{(n \times [E])}{\{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\}} \right) \\ (n \times E)^{\text{num}} = n \times \frac{\{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E\}}{\{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\}} + \alpha \left(n \times \frac{(n \times [H])}{\{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\}} \right) \end{cases} \quad (3)$$

where $[u] = (u^+ - u^-/2)$ and $\{u\} = (u^+ + u^-/2)$, with $u = (E, H)$. The superscript “-” denotes the values for the fields in the current element, while the superscript “+” is for the adjacent element.

The spatial discretization of Maxwell’s equations leads to an ordinary differential equation on each mesh element T that can be presented as a Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = f(u_i(t), t) \\ u_i(0) = u_i^0. \end{cases} \quad (4)$$

The explicit Runge–Kutta methods are set to integrate the solution in time.

III. MULTIRATE STRATEGY

A. Multirate Time Integration

In this paper, the multirate time integration is based on Heun’s method, which is a second-order accurate two-stage ERK method, that we note RK22, whose Butcher tableau is given on the left side of Table I. It allows the computation of

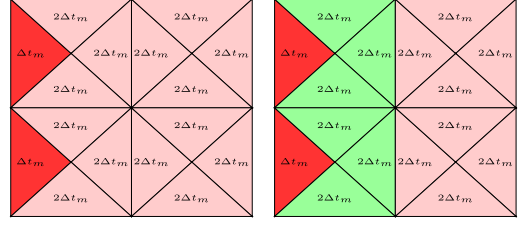


Fig. 1. Example group partitioning for multirate. (Left) Initial bulk groups P with time step $2\Delta t_m$ and R with time step Δt_m . (Right) Buffer group G with time step $2\Delta t_m$ is inserted between the two bulk groups.

the next step solution u^{n+1} from the previous one u^n

$$\begin{aligned} (s1) : u^{(1)} &= u^n \quad \text{and} \quad K^1 = f(u^{(1)}, t^n) \\ (s2) : u^{(2)} &= u^n + \Delta t K^1 \quad \text{and} \quad K^2 = f(u^{(2)}, t^n + \Delta t) \\ u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{2} \Delta t (K^1 + K^2). \end{aligned} \quad (5)$$

The aim of the multirate time integration is to compute the discrete solution in groups whose stable time steps are different. Let us consider a mesh example shown on the left side of Fig. 1. It has two bulk groups of stable time steps: 1) Δt_m and 2) $2\Delta t_m$, noted R and P . With a traditional single-rate method, the time step Δt_m is used for all the mesh elements. Our goal is to run the elements of group R with the time step Δt_m and those of P with $2\Delta t_m$ to reduce the computational cost. The idea is to apply RK22 on P once, and successively on R twice.

The use of RK22 in group R with the time step Δt_m has an influence on the integration scheme in group P . This influence is limited at the two connected neighboring elements, because the base method has two stages. If RK22 with $2\Delta t_m$ is used on these elements, the conservation of the fluxes at the interfaces is not satisfied. That is why a buffer region is introduced between the groups of different stable time steps, as shown on the right side of Fig. 1, where a buffer group, noted G , is inserted between the bulk groups P and R .

Let us denote u_0 as the solution to an element of R ; u_1 the solution on an element of G and, neighbor of R ; u_2 the solution to an element of G and neighbor of P ; and u_3 the solution to an element of P .

Applying RK22 with the time step Δt_m leads to $u_0^{n+(1/2)}$

$$\begin{aligned} (s1) : u_0^{(1)} &= u_0^n; \quad K_0^1 = f(u_0^{(1)}, t^n) \\ (s2) : u_0^{(2)} &= u_0^n + \frac{1}{2} \Delta t K_0^1; \quad K_0^2 = f\left(u_0^{(2)}, t^n + \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ u_0^{n+\frac{1}{2}} &= u_0^n + \frac{1}{4} \Delta t (K_0^1 + K_0^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Applying again RK22 allows the computation of u_0^{n+1}

$$\begin{aligned} (s3) : u_0^{(3)} &= u_0^{n+\frac{1}{2}}; \quad K_0^3 = f\left(u_0^{(3)}, t^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ (s4) : u_0^{(4)} &= u_0^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta t K_0^3; \quad K_0^4 = f\left(u_0^{(4)}, t^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ u_0^{n+1} &= u_0^n + \Delta t \left(\frac{1}{4} K_0^1 + \frac{1}{4} K_0^2 + \frac{1}{4} K_0^3 + \frac{1}{4} K_0^4 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

These four steps constitute a four-stage ERK method, noted RK22^{4a}, which is stable for the time step Δt , whose Butcher tableau is given in Table I (center).

Since RK22^{4a} has four stages, the base method RK22 is extended to a four-stage method, noted RK22^{4b}, which is stable for the time step Δt , whose Butcher tableau is given on the right side of Table I. For the elements of P whose integration schemes are not influenced by the use of RK22^{4a}, the solution u_3^{n+1} is computed by RK22^{4b} in four stages

$$\begin{aligned}
(s1) : u_3^{(1)} &= u_3^n; K_3^1 = f(u_3^{(1)}, t^n) \\
(s2) : u_3^{(2)} &= u_3^{(1)} + \Delta t K_3^1; K_3^2 = f(u_3^{(2)}, t^n + \Delta t) \\
(s3) : u_3^{(3)} &= u_3^{(2)}; K_3^3 = K_3^2 \\
(s4) : u_3^{(4)} &= u_3^{(3)}; K_3^4 = K_3^3 \\
u_3^{n+1} &= u_3^n + \Delta t \left(\frac{1}{4}K_3^1 + \frac{1}{4}K_3^2 + \frac{1}{4}K_3^3 + \frac{1}{4}K_3^4 \right). \quad (8)
\end{aligned}$$

The solutions in the buffer group G are obtained using the coefficients of the Butcher tableau [see the right side of Table I].

The solution u_1^{n+1} is obtained by

$$\begin{aligned}
(s1) : u_1^{(1)} &= u_1^n; K_1^1 = f(u_1^{(1)}, t^n) \\
(s2) : u_1^{(2)} &= u_1^{(1)} + \Delta t K_1^1; K_1^2 = f(u_1^{(2)}, t^n + \Delta t) \\
(s3) : u_1^{(3)} &= u_1^{(2)}; K_1^3 \neq K_1^2 \\
(s4) : u_1^{(4)} &= u_1^{(3)} + \Delta t K_1^3; K_1^4 = f(u_1^{(4)}, t^n + \Delta t) \\
u_1^{n+1} &= u_1^n + \Delta t \left(\frac{1}{4}K_1^1 + \frac{1}{4}K_1^2 + \frac{1}{4}K_1^3 + \frac{1}{4}K_1^4 \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

Note that $K_1^3 \neq K_1^2$, because it depends on the interface term with an element of group R , whose stage (s3) in (7) is computed at $t^{n+(1/2)}$.

The solution u_2^{n+1} is obtained by

$$\begin{aligned}
(s1) : u_2^{(1)} &= u_2^n; K_2^1 = f(u_2^{(1)}, t^n) \\
(s2) : u_2^{(2)} &= u_2^{(1)} + \Delta t K_2^1; K_2^2 = f(u_2^{(2)}, t^n + \Delta t) \\
(s3) : u_2^{(3)} &= u_2^{(2)}; K_2^3 = K_2^2 \\
(s4) : u_2^{(4)} &= u_2^{(3)}; K_2^4 \neq K_2^3 \\
u_2^{n+1} &= u_2^n + \Delta t \left(\frac{1}{4}K_2^1 + \frac{1}{4}K_2^2 + \frac{1}{4}K_2^3 + \frac{1}{4}K_2^4 \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

In this case, $K_2^4 \neq K_2^3$, because it depends on the interface term with an element of group G , whose stage (s4) in (9) has been influenced by stage (s3) in (7) computed at $t^{n+(1/2)}$.

RK22^{4a} and RK22^{4b} have the same number of stages and the same weighting coefficients, as shown in Table I. This allows preservation of flux conservation at the interfaces between these two groups. The resulting multirate scheme is a second-order accurate method that is, stable for the time step $\Delta t = 2\Delta t_m$.

B. Construction of the Multirate Groups

Let us consider a mesh of the domain defined by the tessellation $\Omega = \cup T$. In this paper, the multirate groups are built for having their stable time steps of ratio $\kappa = 2$. Let us denote δt_m and δt_M as the time steps according to the CFL of the smallest and biggest elements, respectively.

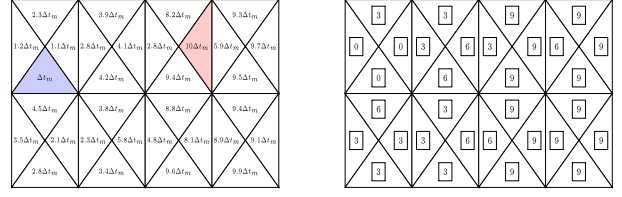


Fig. 2. Example of the sorting of mesh elements into different groups. (Left) Time steps of each element according to their CFL condition. (Right) Sorting of elements in four groups of tag 0, 3, 6, and 9.

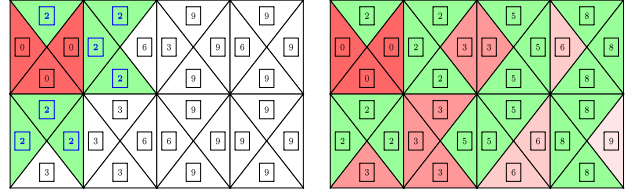


Fig. 3. Introduction of buffer groups. (Left) First buffer elements are introduced around the group of tag 0. (Right) Four bulk groups of tag 0, 3, 6, and 9, and three buffer groups of tag 2, 5, and 8 are obtained.

The mesh elements are gathered in different groups that satisfy the CFL condition for a certain range of time steps.

If the time step of the multirate strategy is $\Delta t \in [\Delta t_m, \Delta t_M]$, the number of multirate groups $N_g = z_g + 1$, where z_g is an integer defined by $z_g = \log_2(\Delta t / \Delta t_m)$. The multirate group number 0 is constituted by the elements whose time steps are in $[\Delta t, \Delta t_M]$. The multirate group number z is constituted by the elements whose time steps are in $[(\Delta t / 2^{z+1}), (\Delta t / 2^z)]$, with $z \leq z_g$. The time step of the multirate strategy Δt that guarantees the stability of the method has to be chosen, such that $\Delta t \in [\Delta t_m, 2^z \Delta t_m]$, where $2^z \Delta t_m \leq \Delta t_M$.

For the construction of multirate groups, we choose in the first step to assign a tag $\theta = 3(z_g - z)$ at each group. The example mesh presented in Fig. 2 shows the organization of the elements in four multirate groups. The tag 9 is assigned to group number 0, whose elements have stable time steps in the interval $[8\Delta t_m, 10\Delta t_m]$. The tag 6 is assigned to group number 1, whose elements have stable time steps in the interval $[4\Delta t_m, 8\Delta t_m]$. The tag 3 is assigned to group number 2, whose elements have stable time steps in the interval $[2\Delta t_m, 4\Delta t_m]$. The tag 0 is assigned to group number 3, whose elements have stable time steps in the interval $[\Delta t_m, 2\Delta t_m]$.

The next step is to introduce the buffer groups that serve to accommodate the transition between bulk groups. These buffers have two connected elements, because the base method ERK22 has two stages. To distinguish groups, the tag $\theta = 3(z_g - z) + 2$ is attributed to buffer groups, and the tag $\theta = 3(z_g - z)$ is conserved for bulk groups. The group of tag 0 remains the same, and the buffer elements are successively introduced. During this process, it is ensured that two neighboring elements have neighboring tags.

The illustration presented in Fig. 3 shows the introduction of buffer elements. The first buffer elements are introduced around the bulk group of tag 0. Four bulk groups of tag 0, 3, 6, and 9 and three buffer groups of tag 2, 5, and 8 are constituted.

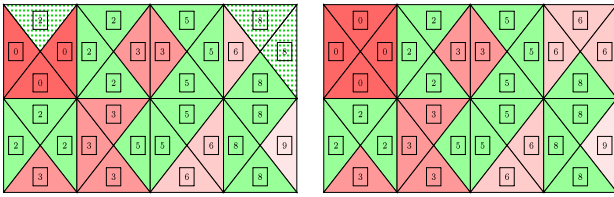


Fig. 4. (Left) Location of the unnecessary buffer elements. (Right) Final multirate partitioning.

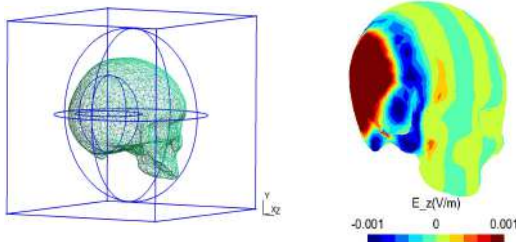


Fig. 5. (Left) Simulation domain. (Right) Illustration of the electric field that propagates.

TABLE II

CPU TIME OF MULTIRATE SIMULATIONS AND THE GAINS VERSUS LeapFrog SCHEME ($GAIN_{LF}$) AND THE SINGLE-RATE SCHEME ($GAIN_{RK22}$)

N_g	$\Delta t(s)$	buffer elts	$CPU_{tot}(s)$	$Gain_{LF}$	$Gain_{RK22}$
2	$2\Delta t_m$	1%	137100	1.02	1.85
3	$2^2\Delta t_m$	14%	71100	1.97	3.57
4	$2^3\Delta t_m$	34%	49200	2.84	5.16
5	$2^4\Delta t_m$	38%	45200	3.09	5.62
6	$2^5\Delta t_m$	39%	42040	3.33	6.04

The last step consists of transferring the unnecessary buffer elements to the bulk group with an inferior tag. These elements appear at the boundary and are not located between the two bulk groups. Fig. 4 shows the unnecessary buffer elements corresponding to the groups of tag 2 and 8 (dotted elements), which are transferred to groups 0 and 6.

IV. NUMERICAL EXAMPLE

The simulation domain is a box B ($\epsilon_B = \epsilon_0$, and $\sigma_B = 0$ S/m), containing a skull S_K ($\epsilon_{S_K} = 32\epsilon_0$, and $\sigma_{S_K} = 0.8$ S/m) that is inside a sphere S_1 ($\epsilon_{S_1} = 14\epsilon_0$, and $\sigma_{S_1} = 0.1$ S/m), as shown in Fig. 5. Inside the skull, there is another sphere S_2 ($\epsilon_{S_2} = 49\epsilon_0$, and $\sigma_{S_2} = 1.15$ S/m). The permeability of vacuum μ_0 is assumed in all the domains.

The faces of the box oriented along the y -axis are magnetic walls, and those oriented along the z -axis are electric walls. On the left-hand side, an absorbing Silver-Müller boundary condition is set. An incident field $\vec{E}_{inc} = (0, 0, E_z^{inc})$ propagates from the right-hand side. It is a Gaussian-modulated pulse of center frequency $f_0 = 1.2$ GHz, such that $E_z^{inc}(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-a(t-t_0)^2}$, $t_0 = 2.5$ ns and $a = 15 \cdot 10^8$. The simulations are carried out for a duration $T_f = 25$ ns. They are performed on an 8core-15Go/RAM-2.3 GHz computer.

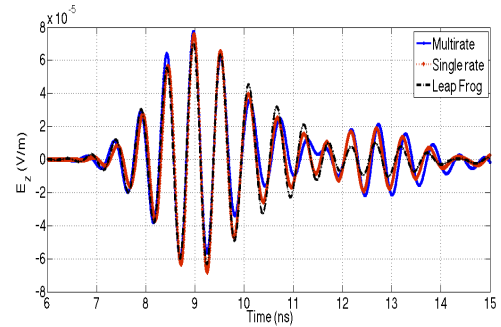


Fig. 6. Comparison of E_z recorded at the center of the sphere S_2 .

A tetrahedral mesh of 279 802 third-order spatial elements is used. The minimum and maximum elementwise stable time steps according to the CFL condition are $\Delta t_m = 24 \cdot 10^{-14}$ s and $\Delta t_M = 17 \cdot 10^{-12}$ s, respectively. The single-rate RK22 and the LeapFrog scheme are first used with Δt_m . Their CPU times are $CPU_{RK22} = 254\,100$ s and $CPU_{LF} = 140\,100$ s. They are compared with those obtained by the multirate strategy in Table II to show the computational gain. The setup of the groups takes a few seconds, which are neglected in the CPU times. When N_g increases, the percentage of the buffer elements also increases, and the gain is improved. The higher stable time step is $2^5 \Delta t_m$, because $2^6 \Delta t_m > \Delta t_M$. The electric field recorded at the center of the sphere S_2 is plotted in Fig. 6 to show that the results of the three methods are very close.

V. CONCLUSION

In this paper, a multirate technique to reduce the computational cost of the explicit computations of the time-domain Maxwell equations on complex geometries is presented. A numerical example shows the gain obtained, compared with the simulations performed by the classical LeapFrog and Heun methods.

REFERENCES

- [1] S. Schomann, N. Gödel, T. Warburton, and M. Clemens, "Local timestepping techniques using Taylor expansion for modeling electromagnetic wave propagation with discontinuous Galerkin-FEM," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3504–3507, Aug. 2010.
- [2] S. Descombes, S. Lanteri, and L. Moya, "Locally implicit time integration strategies in a discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations," *J. Sci. Comput.*, vol. 56, no. 1, pp. 190–218, Jul. 2013.
- [3] E. M. Constantinescu and A. Sandu, "Multirate timestepping methods for hyperbolic conservation laws," *J. Sci. Comput.*, vol. 33, no. 3, pp. 239–278, Dec. 2007.
- [4] N. Gödel, S. Schomann, T. Warburton, and M. Clemens, "GPU accelerated Adams-Bashforth multirate discontinuous Galerkin FEM simulation of high-frequency electromagnetic fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2735–2738, Aug. 2010.
- [5] B. Seny, J. Lambrechts, R. Comblen, V. Legat, and J.-F. Remacle, "Multirate time stepping for accelerating explicit discontinuous Galerkin computations with application to geophysical flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 71, no. 1, pp. 41–64, Jan. 2013.
- [6] B. Seny, J. Lambrechts, T. Toulorge, V. Legat, and J.-F. Remacle, "An efficient parallel implementation of explicit multirate Runge-Kutta schemes for discontinuous Galerkin computations," *J. Comput. Phys.*, vol. 256, pp. 135–160, Jan. 2014.
- [7] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno, "Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes," *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 39, no. 6, pp. 1149–1176, 2005.

2.6 Modélisation de boîtiers de blindage

En compatibilité électromagnétique, la protection des systèmes contre les agressions extérieures est une question importante pour en garantir la fiabilité des systèmes. Dans le cas des dispositifs électromagnétiques du génie électrique, cette protection consiste en des solutions pour contrôler les niveaux d'émission et de réception d'ondes électromagnétiques. Pour plusieurs systèmes comme par exemple l'électronique embarquée, cette protection est réalisée par des boîtiers fabriqués à partir de matériaux homogènes ou hétérogènes. Les parois de ces boîtiers sont généralement fines et présentent des ouvertures, servant au passage des câbles de connections ou encore à la ventilation. Le dimensionnement de ces boîtiers s'appuie sur l'évaluation des champs électromagnétiques à l'intérieur et à l'extérieur ce qui permet de déterminer l'efficacité de blindage de ceux-ci. Mais lorsque les fréquences de fonctionnement sont élevées, la présence de plaques fines conductrices introduit une difficulté de modélisation à cause des faibles valeurs de l'épaisseur de peau. En effet l'évaluation rigoureuse des champs électromagnétiques dans ces cas passe par la prise en compte de la décroissance des champs dans l'épaisseur de peau. Dans les modèles numériques d'étude de boîtiers, la solution la plus simple consiste à mailler finement ces plaques, ce qui malheureusement conduit à des systèmes très coûteux à résoudre. Des approches ont été proposées pour éviter cette difficulté lors de la modélisation de ces boîtiers. L'une des plus répandue consiste en la représentation du boîtier sous forme de circuit électrique équivalent et à l'utilisation de la méthode des lignes de transmission. Elle a donné lieu à des développements analytiques [88, 119] et numériques [4, 48]. Malheureusement, dans cette approche, les parois conductrices sont considérées comme des conducteurs parfaits et seul le rayonnement à travers les ouvertures est modélisé. Une autre pour simplifier la modélisation de ces boîtiers est basée sur l'utilisation de conditions d'impédances de surfaces. Ces conditions sont couramment utilisées pour traiter les problèmes de diffractions d'ondes électromagnétiques par des objets partiellement ou totalement pénétrables [36, 98, 123]. C'est autour de ce type de conditions que nous avons réalisé nos développements.

2.6.1 Interface simulant les plaques minces homogènes

L'utilisation des conditions d'impédances dans les travaux de modélisation en électromagnétisme a fait l'objet de nombreux développements numériques [54, 69, 92]. Ce type de condition qui permet d'éviter d'avoir à mailler les parties conductrices de faibles épaisseurs, a été implémentée en éléments finis et différences finies, pour faciliter la modélisation de nombreux dispositifs en domaine fréquentiel et temporel [40, 41, 93].

Notre contribution a été d'introduire ce type de condition dans une méthode Galerkin discontinue en domaine temporel en vue du calcul de l'efficacité de blindage des boîtiers [RI.20].

La construction de cette condition repose sur l'hypothèse selon laquelle la propagation des grandeurs électromagnétiques dans une plaque mince conductrice est mono-dimensionnelle et peut être décrite à partir d'expressions analytiques. Notre travail d'implémentation a consisté à introduire, dans la méthode de Galerkin discontinue, les expressions analytiques permettant d'évaluer les champs réfléchis et transmis par une plaque. Pour construire ces expressions, on utilise les résultats du modèle analytique 1D d'une plaque conductrice en domaine fréquentiel que l'on transporte dans le domaine temporel grâce à une transformée de Fourier inverse. Comme l'évolution des champs électromagnétiques dans la plaque est décrite analytiquement, celle-ci est enlevée et remplacée par une interface dotée d'une condition de type impédance de surface. L'utilisation d'une telle interface permet de réduire la taille du maillage ((Fig.2.1) et Fig.2.2), ce qui a un impact sur le temps de simulation.

En pratique, introduire cette condition dans la méthode Galerkin discontinue consiste à définir des termes de flux spécifiques pour l'interface qui remplace la plaque conductrice. Pour cela, établit des relations entre les champs de part et d'autre de l'interface (\mathbf{E}^- , \mathbf{H}^-) et (\mathbf{E}^+ , \mathbf{H}^+), en utilisant les expressions analytiques reliant les champs aux bords intérieurs de la plaque (\mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0) et (\mathbf{E}^d , \mathbf{H}^d) (Fig.2.3).

Ces travaux ont fait l'objet de publications dont celle présentée ci-après **3-D Modeling of Thin Sheets in the Discontinuous Galerkin Method for Transient Scattering Analysis** parue dans *IEEE Transactions On Magnetics* qui présente la construction, l'implémentation et la validation de cette condition d'interface.

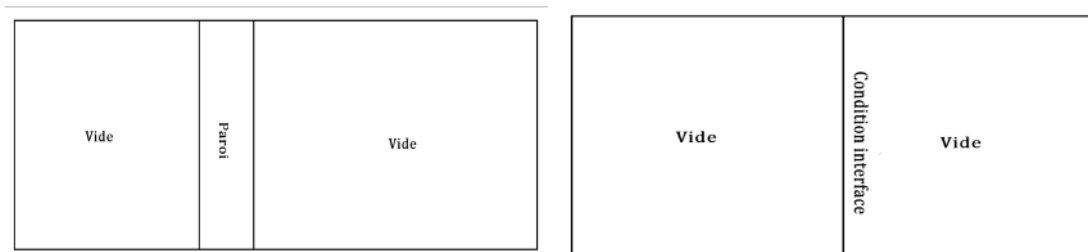


FIGURE 2.1 – Paroi et interface

3-D Modeling of Thin Sheets in the Discontinuous Galerkin Method for Transient Scattering Analysis

Mohamed Boubekeur¹, Abelin Kamani¹, Laurent Bernard¹, Axel Modave², and Lionel Pichon¹

¹Laboratoire de Genie Electrique de Paris, SUPELEC, Université Paris Sud et Université Pierre et Marie Curie, Gif sur Yvette cedex 91192, France

²Department of Electrical Engineering and Computer Science, Montefiore institute, Université de Liège, Liège 4000, Belgique

This paper presents a modeling of thin sheets. An interface condition based on analytical solution is used to avoid a fine mesh. This condition is integrated in a time-domain discontinuous Galerkin method to evaluate the shielding effectiveness. This approach is validated by a comparison with analytical solution. 2-D and 3-D cavities are simulated to illustrate the efficiency of the condition.

Index Terms—Discontinuous Galerkin (DG) methods, electromagnetic compatibility, interface condition, thin sheet.

I. INTRODUCTION

MANY problems in electromagnetic compatibility require adequate numerical approaches to evaluate shielding effectiveness. The ability to model features that are small relative to the cell size is often important in electromagnetic simulations. This may lead to subsequent increase in memory and execution time due to a refined mesh around small details of the geometry. In addition, the quality of the mesh can be strongly affected. The impact of thin sheets is even more so consequent for the time-domain computations.

To avoid the spatial discretization of thin sheets, different interface conditions have been proposed. In the frequency domain, interface condition is developed using analytical solutions [1]. This condition can be included in a 3-D model [2]. In the time domain, an inverse Fourier or Laplace transform is combined to a convolution product. Many papers have been devoted to implement this approach in the FDTD method [3]– [5]. Nevertheless, the stair casing error present in the FDTD method may affect significantly the numerical results.

The discontinuous Galerkin (DG) method is a powerful approach for solving time-dependent problems [6]. It is based on the local solution of the equations in each cell and uses flux terms to connect adjacent elements. It has the advantage of the unstructured mesh and high spatial order scheme unlike the conventional FDTD. Such a high spatial scheme can reduce the dispersive error induced by the low level of the spatial approximation in the FDTD.

In this paper, a sheet interface condition is built to replace a thin sheet. A general time-domain formulation is proposed to consider the physical characteristics of the sheet. The approach is based on rational approximation and a recursive algorithm to compute the convolution products. For low frequencies (when the skin depth is larger than the thickness), a simplified expression is derived.

This interface condition is implemented in a DG module of the software GMSH [7].

II. PROBLEM FORMULATION

Maxwell's equation is solved in the time domain

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t \vec{E} - \nabla \times \vec{H} = -\vec{J} \\ \mu \partial_t \vec{H} + \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where ϵ is the permittivity of the medium and μ is its permeability. The current density of the conductive medium is such as $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, with σ the conductivity.

The DG variational formulation of (1) in each element T is given by [6]

$$\begin{cases} \int_T \epsilon \partial_t \vec{E} \cdot \vec{\phi} - \int_T \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{\phi} - \int_{\partial T} (\vec{n} \times \vec{H})^{\text{num}} \cdot \vec{\phi} = - \int_T \sigma \vec{E} \cdot \vec{\phi} \\ \int_T \mu \partial_t \vec{H} \cdot \vec{\psi} + \int_T \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{\psi} + \int_{\partial T} (\vec{n} \times \vec{E})^{\text{num}} \cdot \vec{\psi} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

where $\vec{\phi}$ and $\vec{\psi}$ are the test functions.

The interface terms between adjacent elements are evaluated using numerical fluxes $(\vec{n} \times \vec{E})^{\text{num}}$ and $(\vec{n} \times \vec{H})^{\text{num}}$ given by [6]

$$\begin{cases} (\vec{n} \times \vec{H})^{\text{num}} = \vec{n} \times \frac{\{Z\vec{H}\}}{\{Z\}} - \alpha (\vec{n} \times \frac{(\vec{n} \times \{\vec{E}\})}{\{Z\}}) \\ (\vec{n} \times \vec{E})^{\text{num}} = \vec{n} \times \frac{\{Y\vec{E}\}}{\{Y\}} + \alpha (\vec{n} \times \frac{(\vec{n} \times \{\vec{H}\})}{\{Y\}}) \end{cases} \quad (3)$$

where $Z = 1/Y = \sqrt{\mu/\epsilon}$, $[u] = u^+ - u^-/2$ and $\{u\} = u^+ + u^-/2$.

The $-$ denotes the values in the current element and $+$ for the adjacent element. For $\alpha = 0$, centered fluxes are obtained and the numerical scheme is only dispersive [8]. For $\alpha = 1$, upwind fluxes are obtained and the numerical scheme is additionally dissipative [6].

For simulations, an implicit second-order Runge–Kutta scheme that permits a large time step is considered for time discretization, and a first spatial order with upwind fluxes is used for the spatial scheme.

Manuscript received June 28, 2013; revised September 19, 2013; accepted September 25, 2013. Date of current version February 21, 2014. Corresponding author: M. Boubekeur (e-mail: mohamed.boubekeur@lgep.supelec.fr).
Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2013.2284505

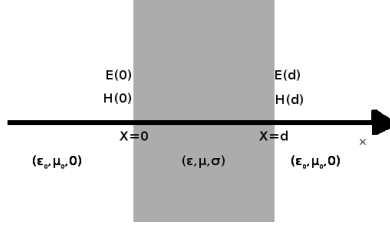


Fig. 1. Geometry of the thin sheet.

III. CONSTRUCTION OF THE INTERFACE CONDITION

The electromagnetic field equations in the sheet are considered in 1-D and in the frequency domain [1]

$$\begin{cases} \partial_x E_y = -j\omega\mu H_z \\ \partial_x H_z = -(\sigma + j\omega\epsilon)E_y \end{cases} \quad (4)$$

where ϵ , μ , and σ are, respectively, the permittivity, the permeability, and the conductivity of the sheet (Fig. 1), its thickness is d .

Using the analytical 1-D solution of (4), the electromagnetic fields on the both sides of the sheet are connected by

$$\begin{pmatrix} E_y(\omega, d) \\ H_z(\omega, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma d) & \eta \sinh(\gamma d) \\ \eta^{-1} \sinh(\gamma d) & \cosh(\gamma d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y(\omega, 0) \\ H_z(\omega, 0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

where γ is the planar propagation constant

$$\gamma = \sqrt{\mu\omega(j\sigma - \epsilon\omega)} \quad (6)$$

and η is the intrinsic impedance of the sheet

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\epsilon\omega - j\sigma}}. \quad (7)$$

This relation can be rewritten as an impedance relation for a layer

$$\begin{pmatrix} E_y(\omega, 0) \\ E_y(\omega, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1(\omega) & -\hat{z}_2(\omega) \\ \hat{z}_2(\omega) & -\hat{z}_1(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z(\omega, 0) \\ H_z(\omega, d) \end{pmatrix} \quad (8)$$

with

$$\begin{cases} \hat{z}_1(\omega) = -\frac{\eta}{\tanh(\gamma d)} \\ \hat{z}_2(\omega) = -\frac{\eta}{\sinh(\gamma d)}. \end{cases} \quad (9)$$

The time-domain relation of (8) is a convolution product

$$\begin{pmatrix} E_y(t, 0) \\ E_y(t, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) & -z_2(t) \\ z_2(t) & -z_1(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} H_z(t, 0) \\ H_z(t, d) \end{pmatrix} \quad (10)$$

where z_1 and z_2 are, respectively, the inverse Fourier transform (IFT) of \hat{z}_1 and \hat{z}_2 .

Let note (\vec{E}^0, \vec{H}^0) and (\vec{E}^d, \vec{H}^d) the fields on the sides of the sheet and \vec{n} the outward unit normal. The relation (10) can be reformulated with tangential components of the fields in the general case and becomes

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{E}^0(t) = \vec{n} \times [\vec{n} \times (z_1 * \vec{H}^0(t) - z_2 * \vec{H}^d(t))] \\ \vec{n} \times \vec{E}^d(t) = \vec{n} \times [\vec{n} \times (z_2 * \vec{H}^0(t) - z_1 * \vec{H}^d(t))] \end{cases} \quad (11)$$

IV. IMPLEMENTATION OF THE SHEET CONDITION

A. General Sheet Condition

The implementation of the relation (11) is performed in two steps, the first step consists to compute the IFT of the impedance functions \hat{z}_1 and \hat{z}_2 . The second step consists in computing the convolution production between the impedance functions and the magnetic fields.

The impedance functions \hat{z}_1 and \hat{z}_2 are characterized by a wideband spectrum. Evaluation of their discrete IFT has a significant time cost and sometimes the results are not very accurate. The equivalent rational approximations are considered in the frequency domain using the vector fitting procedure [9].

The rational approximations of the impedance functions defined in (9) are

$$\begin{cases} \hat{z}_1(\omega) = z_{1,0} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{R_{1,k}}{j\omega - p_{1,k}} \\ \hat{z}_2(\omega) = z_{2,0} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{R_{2,k}}{j\omega - p_{2,k}} \end{cases} \quad (12)$$

where $z_{i,0}$ are the asymptotic high-frequency value of $\hat{z}_i(\omega)$, $R_{i,k}$ is the k th residue, $p_{i,k}$ is the k th pole, and N_i the number of poles of the rational approximation.

The IFT is calculated analytically from the rational approximation, the transient impedance functions are

$$\begin{cases} z_1(t) = z_{1,0}\delta(t) + \sum_{k=1}^{N_1} R_{1,k} \exp(p_{1,k}t) \\ z_2(t) = z_{2,0}\delta(t) + \sum_{k=1}^{N_2} R_{2,k} \exp(p_{2,k}t). \end{cases} \quad (13)$$

The convolution integrals are determined numerically using the piecewise linear recursive formulation proposed in [10]. The numerical formulation of the relation (11) for the m th time iteration is written as

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{E}^{0,m} = \vec{n} \times \left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_1^{0,m} - \vec{E}_2^{d,m} \right) \right] \\ \vec{n} \times \vec{E}^{d,m} = \vec{n} \times \left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_2^{0,m} - \vec{E}_1^{d,m} \right) \right] \end{cases} \quad (14)$$

with

$$\begin{cases} \vec{E}_i^{j,m} = z_{i,0} \vec{H}^{j,m} + \sum_{k=1}^{N_i} \zeta_{i,k}^{j,m} \\ \zeta_{i,k}^{j,m} = q_{1,k} \zeta_{i,k}^{j,m-1} + q_{2,k} \vec{H}^{j,m-1} + q_{3,k} \vec{H}^{j,m} \\ q_{1,k} = \exp(\beta_k) \\ q_{2,k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} [1 + (\beta_k - 1) \exp(\beta_k)] \\ q_{3,k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} [\exp(\beta_k) - \beta_k - 1] \\ \alpha_k = \frac{R_{i,k}}{p_{i,k}} \\ \beta_k = p_{i,k} \Delta t \end{cases} \quad (15)$$

for $j \in \{-, +\}$, $i \in \{1, 2\}$, $k \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ and the time step Δt .

For an interface representing the sheet, let consider $(\vec{E}^-, \vec{H}^-) = (\vec{E}^0, \vec{H}^0)$ the fields for the current element $-$, and $(\vec{E}^+, \vec{H}^+) = (\vec{E}^d, \vec{H}^d)$ the fields for the adjacent

element $+$. The resulting flux terms for the current element for this interface are obtained by taking only the magnetic field for the current element, and the electric field is taken from the second expression of the relation (14)

$$\begin{cases} (\vec{n} \times \vec{H})^{\text{num},n} = \vec{n} \times \vec{H}^{-,n} \\ (\vec{n} \times \vec{E})^{\text{num},n} = \vec{n} \times \vec{E}^{+,n}. \end{cases} \quad (16)$$

B. Simplified Sheet Condition

For the low frequencies, the electric fields are supposed constant inside the sheet, and $\epsilon\omega \ll \sigma$.

When $\omega \rightarrow 0$, $\omega\epsilon$ can be neglected. The impedance and the propagation constant can be rewritten as

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{\frac{J\omega\mu}{\sigma}} \\ \gamma = \sqrt{J\omega\mu\sigma}. \end{cases} \quad (17)$$

The asymptotic behavior of $(\hat{z}_1 + \hat{z}_2)$ is

$$(\hat{z}_1 + \hat{z}_2) = -\frac{2}{\sigma d}. \quad (18)$$

The relation (10) is rewritten using the average of the electric field

$$\begin{cases} \vec{E}^d(\omega) = \vec{E}^0(\omega) \\ \frac{\vec{E}^d(\omega) + \vec{E}^0(\omega)}{2} = \frac{1}{2}(\hat{z}_1 + \hat{z}_2) * (\vec{H}^0 - \vec{H}^d). \end{cases} \quad (19)$$

A simple form of (11) is obtained by supposing the average of the electric fields on the sides of the sheet

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{E}^0(t) = \frac{1}{\sigma d} \vec{n} \times \left[\vec{n} \times (\vec{H}^d(t) - \vec{H}^0(t)) \right] \\ \vec{n} \times \vec{E}^d(t) = \frac{1}{\sigma d} \vec{n} \times \left[\vec{n} \times (\vec{H}^d(t) - \vec{H}^0(t)) \right]. \end{cases} \quad (20)$$

The resulting flux terms for this simplified sheet condition are

$$\begin{cases} (\vec{n} \times \vec{H})^{\text{num}} = \vec{n} \times \vec{H}^- \\ (\vec{n} \times \vec{E})^{\text{num}} = \frac{1}{\sigma d} \vec{n} \times \vec{n} \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-). \end{cases} \quad (21)$$

These flux terms are independent of the recursive procedure, and are the same complexity as an ordinary flux terms. This condition is valid when the thickness of the sheet is smaller than the skin depth.

V. NUMERICAL RESULTS

A. 1-D Validation Test

To validate the general sheet condition, $\vec{E} = (0, 0, E_z)$, $\vec{H} = (0, H_y, 0)$, and two vacuum mediums separated by a conducting sheet are considered. The permittivity, the permeability, the conductivity, and the thickness of this sheet are, respectively, $\epsilon = 5\epsilon_0$, $\mu = 5\mu_0$, $\sigma = 2000 \text{ S/m}$, and $d = 1 \text{ mm}$, where ϵ_0 and μ_0 are the permittivity and the permeability of the vacuum medium (Fig. 1). This sheet is illuminated by an harmonic plane wave for different frequencies. The skin depth varies between 1 and 0.22 mm. Let note \vec{E}_i , \vec{E}_t the incident and the transmitted electric fields. The shielding effectiveness for the electric field (SE_E) is defined by the following expression:

$$SE_E = 20 \log_{10} \left(\frac{|\vec{E}_i|}{|\vec{E}_t|} \right). \quad (22)$$

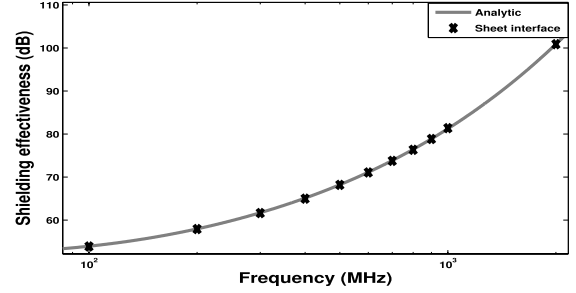


Fig. 2. Shielding effectiveness.

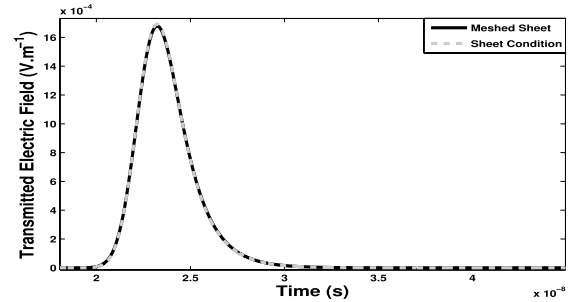


Fig. 3. Transient transmitted field.

Fig. 2 shows the comparison of the SE_E between the solution computed with the general sheet condition and the analytical solution calculated in the frequency domain. The transmitted electric field is taken in the harmonic regime to calculate SE_E . The difference is negligible.

The same sheet is illuminated by an incident Gaussian pulse. The minimum of the skin depth is 0.3 mm. The computed solution using the general sheet interface is compared with the solution obtained when the sheet is meshed in Fig. 3. The difference is also negligible and demonstrates that the transient regime is also considered.

This condition is also valid for low conductivities, even if the wavelength is smaller than the skin depth. For $\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$, the error of the transmitted electric field between analytical and computed solutions remains less than 1%.

These examples validate the sheet condition for the general case.

B. 2-D Cavity

Let us consider 50 cm \times 40 cm cavity. A 10-cm aperture is located on the front side. The characteristics of the walls are $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 50 \text{ S/m}$, and $d = 1 \text{ mm}$ (Fig. 4). This cavity is illuminated by the Gaussian pulse used in the 1-D example. The incident field is normal to the aperture. This pulse excites the frequencies up to 1 GHz and the minimum of the skin depth is 4.5 mm.

The solution is computed for two cases. The first case using the simplified sheet condition and the second when the sheet is meshed. For the first case, 3000 elements are used. For the second case, 13 000 elements are used with 10 000 elements only for the walls of 1-mm thickness. A personal computer

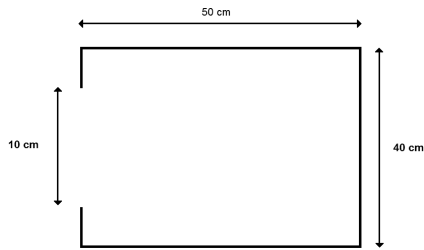


Fig. 4. 2-D cavity.

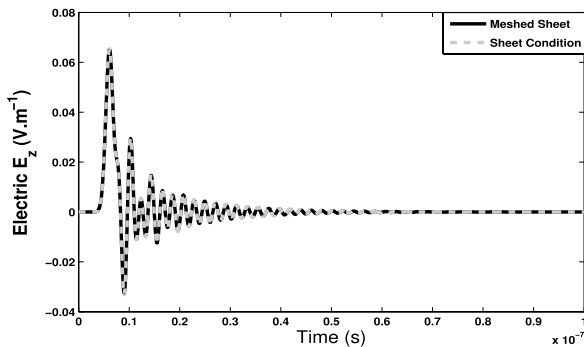


Fig. 5. Electric field at the center of the cavity in the time domain.

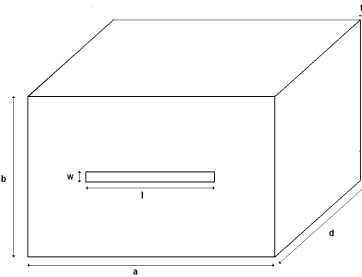


Fig. 6. 3-D cavity.

3.05-GHz Pentium is used. The time cost of simulation is 4 h for the first case and 20 h for the second.

In Fig. 5, the electric field in the center of the cavity is shown. This example illustrates the efficiency of the condition for problems with thin conductive walls.

C. 3-D Cavity

A transient scattering problem is studied. Let consider a 3-D cavity (Fig. 6) [11], whose dimensions are $a = 300$ mm, $b = 120$ mm, $d = 300$ mm, $l = 100$ mm, $w = 5$ mm, and $t = 1$ mm.

This cavity is illuminated by the previous incident Gaussian pulse. Different cases of conductivity of the walls are compared: $\sigma = 200$ S/m, $\sigma = 50$ S/m and perfect electric conductor (PEC). For finite conductivities, the simplified sheet condition is used. A fast Fourier transform is applied to the electric field in the center of the cavity, and the shielding effectiveness is plotted in Fig. 7. The result obtained for the PEC case is similar to the analytical formulation [11]. For the

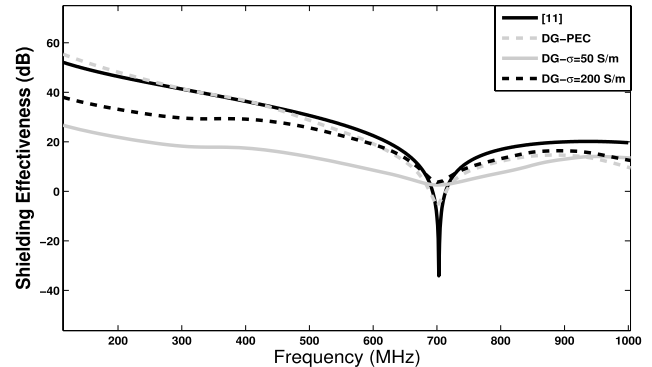


Fig. 7. Shielding effectiveness of the electric field in the center of the cavity in the frequency domain.

finite conductivities, the shielding effectiveness is lower and the resonance peaks are attenuated.

VI. CONCLUSION

An interface condition to avoid the mesh of thin sheets is presented. It allows a reduction of the computational time cost. The interface condition is implemented in a 3-D time-domain DG method and is validated. Future developments will extend the interface condition for the case of multilayer and heterogeneous material.

REFERENCES

- [1] K. M. Mitzner, "Effective boundary conditions for reflection and transmission by an absorbing shell of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 16, no. 6, pp. 706–712, Nov. 1968.
- [2] F. Bocquet, L. Pichon, and A. Razek, "3D FEM analysis of electromagnetic wave scattering from a dielectric sheet in EMC problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 2791–2794, Sep. 1998.
- [3] M. S. Sarto, "A new model for the FDTD analysis of the shielding performances of thin composite structures," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 41, no. 4, pp. 298–306, Nov. 1999.
- [4] M. Feliziani, F. Maradei, and G. Tribellini, "Field analysis of penetrable conductive shields by the finite-difference time-domain method with impedance network boundary conditions (INBCs)," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 41, no. 4, pp. 307–319, Nov. 1999.
- [5] M. Feliziani, "Subcell FDTD modeling of field penetration through lossy shields," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 54, no. 2, pp. 299–307, Apr. 2012.
- [6] J. S. Hesthaven and T. Warburton, "Nodal high-order methods on unstructured grids: I. Time-domain solution of Maxwell's equations," *J. Comput. Phys.*, vol. 181, no. 1, pp. 186–221, Sep. 2002.
- [7] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, "Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 77, no. 11, pp. 1309–1331, Sep. 2009.
- [8] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno, "Convergence and stability of a discontinuous galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes," *Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 39, no. 6, pp. 1149–1176, Nov. 2005.
- [9] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain response by vector fitting," in *Proc. IEEE Power Eng. Soc. Winter Meeting*, Feb. 1998, pp. 1–9.
- [10] K. S. Oh and J. E. Shutt-Aine, "An efficient implementation of surface impedance boundary condition for the finite-difference time domain method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 43, no. 7, pp. 660–666, Jul. 1995.
- [11] M. P. Robinson, T. M. Benson, C. Christopoulos, J. F. Dawson, M. D. Ganley, A. C. Marvin, *et al.*, "Analytical formulation for the shielding effectiveness of enclosures with apertures," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 40, no. 3, pp. 240–248, Aug. 1998.

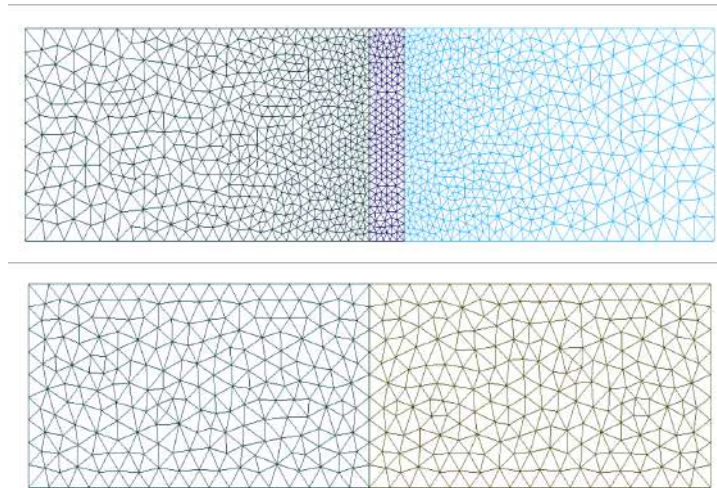


FIGURE 2.2 – Maillage paroi et interface

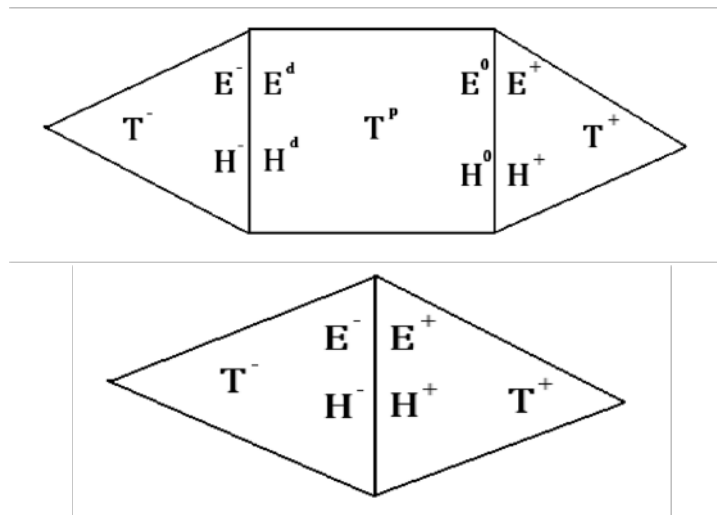


FIGURE 2.3 – éléments paroi

2.6.2 Modélisation 3D de boîtiers à parois composites

Le développement et l'utilisation des matériaux composites dans l'industrie offrent des perspectives intéressantes en terme de gain de poids et de place pour de nombreux dispositifs. Ils sont progressivement introduits dans l'industrie aéronautique et automobile notamment pour la fabrication des boîtiers servant à la protection des équipements. Les matériaux composites utilisés dans ces boîtiers sont généralement constitués de fibres (carbone, verre,...), noyés dans une matrice epoxy [55]. Si ces matériaux offrent l'immense avantage d'être légers tout en étant

résistants, il n'en demeure pas moins que leur modélisation est plus compliquée que celle des matériaux homogènes. Si l'utilisation des matériaux composites, pour des applications mécaniques a été rendue possible par l'expertise acquise dans ce domaine depuis plusieurs décennies [52], l'emploi des composites pour des applications de blindage électromagnétique est en revanche freinée par le manque de modèles. Des modèles analytiques d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique ont été développés au sein de GeePs à travers plusieurs travaux de thèses [80, 84]. Grâce à ces travaux, le milieu hétérogène peut être remplacé par un milieu homogène équivalent dont les paramètres effectifs (conductivité, perméabilité, permittivité) qui dépendent de la fréquence tiennent compte de la structure et des propriétés locales du milieu d'origine.

Pour modéliser en régime fréquentiel les boîtiers dont les parois sont en matériaux composites, les propriétés effectives du milieu homogénéisé équivalent sont simplement introduites dans un modèle numérique [80]. Mais lorsque la modélisation est réalisée en domaine temporel comme dans nos travaux, l'utilisation de ces propriétés effectives nécessite des traitements supplémentaires. Notre contribution pour la modélisation de ce type de boîtiers a été d'introduire les résultats d'homogénéisation de matériaux composites dans l'approche Galerkin discontinue pour des simulations en domaine temporel [RI.11, RI.19]. Le travail réalisé est une extension de la condition d'interface pour paroi homogène décrite dans la section précédente. Cette implémentation nous a permis de proposer un modèle de calcul de l'efficacité de blindage d'un boîtier dont les parois sont faites de deux plaques composites ayant leurs fibres orientées perpendiculairement. Ces résultats sont présentés dans l'article ci-après **Modeling of thin heterogeneous sheets in the discontinuous Galerkin method for 3D transient scattering problems** paru dans *European Physical Journal Applied Physic*.

Modeling of thin heterogeneous sheets in the discontinuous Galerkin method for 3D transient scattering problems[★]

Mohamed Boubekour^a, Abelin Kameni Ntichi, and Lionel Pichon

Group of Electrical Engineering – Paris (GeePs), UMR CNRS 8507, CentraleSupélec, Univ. Paris-Sud, Sorbonne Université, UPMC Univ. Paris 06, 11 rue Joliot Curie, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Received: 30 July 2015 / Received in final form: 6 November 2015 / Accepted: 12 January 2016

Published online: 22 February 2016 – © EDP Sciences 2016

Abstract. This paper presents a modeling of heterogeneous sheets in the time domain discontinuous Galerkin method. An homogenization model combined to a sheet interface condition is used to avoid the mesh of these sheets in order to study the transient response of heterogeneous enclosures. The validation of this approach is based on a comparison with the case when the sheet is meshed. To illustrate the efficiency of the interface condition, the simulation of a 3D cavity is performed.

1 Introduction

Thanks to the gain of the mass, composite materials are increasingly used in automotive and aircraft industry. If their mechanic behaviour is well controlled, it is not the same for the electromagnetic behaviour, especially for electromagnetic compatibility (EMC) applications. Electronic equipments enclosures are generally made with metal sheets. The presence of metal is easily taken into account in numerical methods by considering the material as a perfect electric conductor (PEC). Natural boundary conditions avoid the mesh of metallic sheets. The replacement of metal by composite materials, such as a resin reinforced by a conductive fibers must be accompanied by appropriate modeling tools to predict their shielding effectiveness (SE). Unfortunately different difficulties arise in the modeling of such materials. For example, take into account features that are small relative to the cell size is difficult. This leads to subsequent increase in memory and execution time due to a refined mesh around small details of geometries. Also the quality of the mesh can be strongly affected. The impact of thin heterogeneous sheets is even more so consequent for the time domain computations. To avoid the mesh of thin sheets, an interface condition based on 1D analytical solution is proposed [1] for homogeneous sheets. This condition has been included in a three dimensional model based on finite element [2]. Thanks to an inverse Fourier transform this condition can be introduced in the time domain computations. It is implemented in FDTD for multilayer sheet [3], and recently included in

the time domain discontinuous Galerkin (DG) method [4]. Another difficulty concerns the dependence of the sheet electromagnetic properties to the microstructures. The effective parameter of composite materials have to be established. Many papers have been devoted for determining the effective parameter of heterogeneous materials in the transverse electric case [5] or in the transverse magnetic case [6,7]. In the transverse magnetic case, the Maxwell-Garnett model is the most popular model to compute the effective parameter in electromagnetic excitation. It provides satisfying results as long as the wavelength is larger than the size of heterogeneities [8]. In references [9,10], a new model is proposed for composite materials illuminated by an electromagnetic wave to provide the effective parameter in high frequency. These works take into account the influence of conductive fibers diluted into a dielectric host matrix under dynamic conditions.

In this paper, the interface condition implemented in the time domain DG method [4] is extended for heterogeneous sheet composed by a resin and reinforced by a conductive fibers. The effective parameters are computed with the dynamic homogenization model presented in reference [10] or the Wiener model [5], and used in the time domain thanks to a Fourier transform combined with a convolution product.

2 Problem formulation

Maxwell's equations are solved in the time domain:

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J} \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

^a e-mail: mohamed.boubekour@centralesupelec.fr

[★] Contribution to the topical issue "Numelec 2015 – Elected submissions", edited by Adel Razek

where ϵ is the permittivity of the medium and μ is the permeability. The current density of the conductive medium is such as $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, with σ the conductivity.

The DG variational formulation of (1) in each element T is given by [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T \epsilon \partial_t \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\phi} - \int_T \mathbf{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\phi} \\ \quad - \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})^{\text{num}} \times \boldsymbol{\phi} = - \int_T \sigma \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\phi} \\ \int_T \mu \partial_t \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_T \mathbf{E} \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} \\ \quad + \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mathbf{E})^{\text{num}} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\phi}$ and $\boldsymbol{\psi}$ are test functions.

The interface terms between adjacent elements are evaluated using numerical fluxes $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})^{\text{num}}$ and $(\mathbf{n} \times \mathbf{H})^{\text{num}}$ given by [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{n} \times \frac{\{Z\mathbf{H}\}}{\{Z\}} - \mathbf{n} \times \frac{(\mathbf{n} \times \{\mathbf{E}\})}{\{Z\}} \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{n} \times \frac{\{Y\mathbf{E}\}}{\{Y\}} + \mathbf{n} \times \frac{(\mathbf{n} \times \{\mathbf{H}\})}{\{Y\}} \end{array} \right. \quad (3)$$

where $Z = \frac{1}{Y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, $[u] = \frac{u^+ - u^-}{2}$ and $\{u\} = \frac{u^+ + u^-}{2}$. The “-” denotes the values in the current element, and “+” for the adjacent element.

3 The interface condition

Let's consider the one dimensional electromagnetic field equations in the frequency domain. The electromagnetic fields on the both sides of the sheet are connected by:

$$\begin{pmatrix} E_y(\omega, 0) \\ E_y(\omega, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1(\omega) & -\hat{z}_2(\omega) \\ \hat{z}_2(\omega) & -\hat{z}_1(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z(\omega, 0) \\ H_z(\omega, d) \end{pmatrix} \quad (4)$$

with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_1(\omega) = -\frac{\eta}{\tanh(\gamma d)} \\ \hat{z}_2(\omega) = -\frac{\eta}{\sinh(\gamma d)} \end{array} \right. \quad (5)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \sqrt{\mu\omega(j\sigma - \epsilon\omega)} \\ \eta = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\epsilon\omega - j\sigma}} \end{array} \right. \quad (6)$$

with d the thickness of the sheet, and ϵ , μ , σ are respectively the permittivity, the permeability and the conductivity of the sheet (Fig. 1).

The time domain equivalent relation of (4) is a convolution product:

$$\begin{pmatrix} E_y(t, 0) \\ E_y(t, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) & -z_2(t) \\ z_2(t) & -z_1(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} H_z(t, 0) \\ H_z(t, d) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

where z_1 and z_2 are respectively the inverse Fourier transform (IFT) of \hat{z}_1 and \hat{z}_2 .

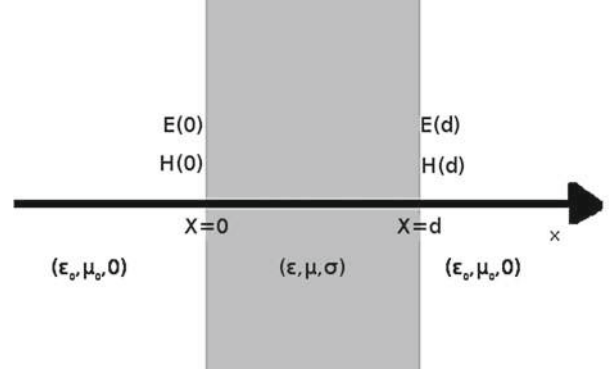


Fig. 1. Geometry of the thin sheet.

Let's note $(\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$ and $(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d)$ the fields on the sides of the sheet and \mathbf{n} the outward unit normal. The relation (7) can be reformulated with tangential components of the fields and becomes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(t) = \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times (z_1 * \mathbf{H}^0(t) - z_2 * \mathbf{H}^d(t))] \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}^d(t) = \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times (z_2 * \mathbf{H}^0(t) - z_1 * \mathbf{H}^d(t))] \end{array} \right. \quad (8)$$

In the DG formulation, the interface condition representing a thin sheet is constructed as follows: let's consider $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-) = (\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$ the fields for the current element “-”, and $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) = (\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d)$ the fields for the adjacent element “+”. The magnetic field is taken from the adjacent element, and the electric field is taken from the second expression of the relation (8).

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})^{\text{num},n} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{-,n} \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{E})^{\text{num},n} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{+,n} \end{array} \right. \quad (9)$$

4 The dynamic homogenization model

The homogenization consists in defining a fictive homogeneous medium with the same behaviour than the heterogeneous medium. The effective parameter are determined in the frequency domain. Let's note ϵ^* the complex permittivity:

$$\epsilon^* = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (10)$$

For a medium constituted by a resin reinforced by a conductive fibers (Fig. 2), the effective permittivity in direction perpendicular to the fibers is given by [9]:

$$\epsilon_{\perp}^* = \frac{\epsilon_1^* \frac{f_1}{\epsilon_{\infty}^* + \epsilon_1^*} + \epsilon_2^* \frac{f_2}{\epsilon_{\infty}^* + \epsilon_2^*}}{\frac{f_1}{\epsilon_{\infty}^* + \epsilon_1^*} + \frac{f_2}{\epsilon_{\infty}^* + \epsilon_2^*}}, \quad (11)$$

where ϵ_1^* et f_1 are respectively the complex permittivity and volume fraction of the resin, and ϵ_2^* and f_2 are respectively the complex permittivity and volume fraction of the fibers, ϵ_{∞}^* is the complex permittivity of the infinite medium, suggested in reference [12].

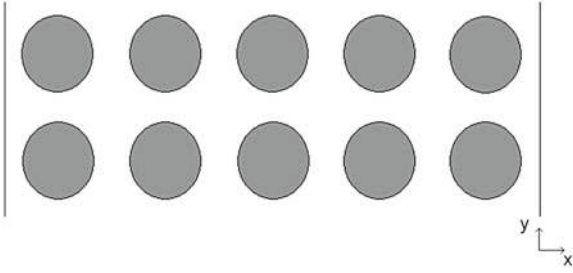


Fig. 2. Geometry of the composite medium.

In this study, the expression of ϵ_∞^* proposed in reference [10], is given by:

$$\epsilon_\infty^* = \epsilon_1^* - j \frac{\sigma_\infty}{\omega}, \quad (12)$$

with

$$\frac{\sigma_\infty}{\omega} = \frac{2}{R^2} (1 + f_2) \int_0^R r \left| \frac{\mathcal{J}_1(r\gamma_2)}{\mathcal{J}_0(R\gamma_2)} \right| dr, \quad (13)$$

where R is the radius of the fiber, γ_2 the propagation constant of the fiber defined in equation (6), \mathcal{J}_α is the first kind Bessel function of order α .

The effective permittivity of the homogenized medium ϵ_\perp and his conductivity σ_\perp are obtained from equation (11) and are used to compute the impedance functions \hat{z}_1 and \hat{z}_2 given in equation (5). These parameters depend on the singular frequency ω and the properties of the heterogeneous medium ($f_1, f_2, R, \epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$).

5 Validation example

Let's consider $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$, a composite sheet constituted by a resin ($\epsilon_1 = 2\epsilon_0, \mu_0, \sigma_1 = 0.01$ S/m) reinforced by 30 conductive fibers ($\epsilon_2 = \epsilon_0, \mu_0, \sigma_2$) located in the vacuum ($\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0 = 0$ S/m). The volume fraction of the resin is $f_1 = 80.37\%$, and the volume fraction of the conductive fibers is $f_2 = 19.63\%$. The radius of the fiber is $R = 0.05$ mm and the thickness of the sheet is $d = 6$ mm (Fig. 3). This sheet is illuminated by a Gaussian pulse including frequencies up to 100 GHz. Two values of σ_2 are considered, $\sigma_2 = 1000$ S/m and $\sigma_2 = 10000$ S/m. The fibers are oriented in the direction \mathbf{e}_z , and the incident wave is oriented in the direction \mathbf{e}_x .

The solutions are computed for two cases. The first case uses the interface condition with the effective permittivity and the effective conductivity computed with the dynamic homogenization model. The size of the mesh is 1346 elements, The effective parameters are computed for the composite sheet described previously (Fig. 3). The effective permittivity and the effective conductivity are computed for the same configuration presented in Figure 3. They are presented in Figures 4 and 5. The effective permittivity can be considered constant, but the effective conductivity is not constant.

In the second case, the sheet is meshed. The size of the mesh is 4350 elements. A computer with 32 CPU



Fig. 3. Computational domain for the validation example.

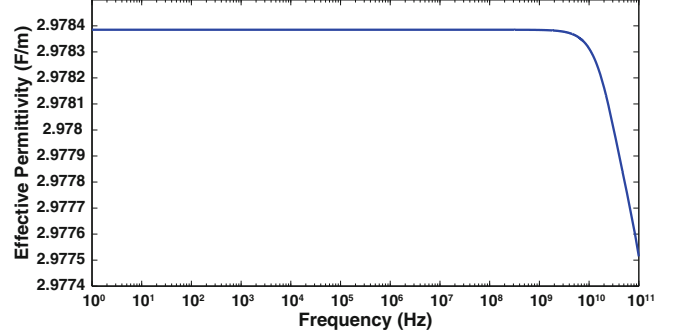


Fig. 4. Effective permittivity of the sheet for $\sigma_2 = 10000$ S/m.

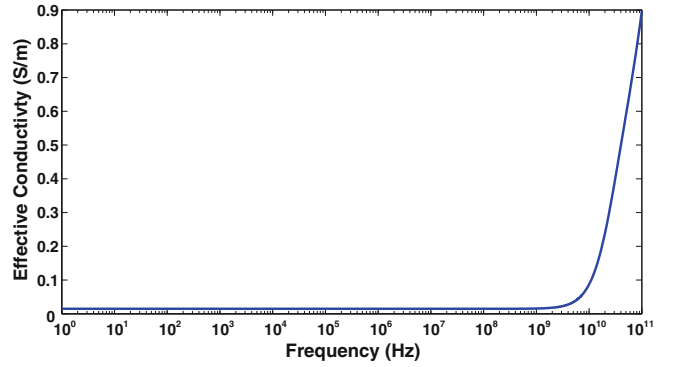


Fig. 5. Effective conductivity of the sheet for $\sigma_2 = 10000$ S/m.

(2 GHz Pentium Xeon, Intel, Santa Clara, California, USA) is used. The CPU time is 4 min for the first case and 25 min for the second case.

For $\sigma_2 = 1000$ S/m, the transmitted electric field in the time domain is the same for the two cases (Fig. 6). The shielding effectiveness of the electric field (SE_E) is defined by the following expression:

$$SE_E = 20 \log_{10} \left(\frac{|\mathbf{E}_i|}{|\mathbf{E}_t|} \right). \quad (14)$$

The SE_E is presented in Figure 7. Three cases are compared. The solution computed when the sheet is meshed, the solution computed with the interface condition, and the analytical solution computed using the effective parameters. The difference is negligible. This example validates the interface condition for heterogeneous sheet in the time domain.

For $\sigma_2 = 10000$ S/m, the transmitted fields for the case when the interface condition and the case when the sheet is meshed are plotted in Figure 8. They have the same behaviour.

The comparison of the shielding effectiveness shows (Fig. 9) that the interface condition is similar to the analytical solution using the effective parameters.

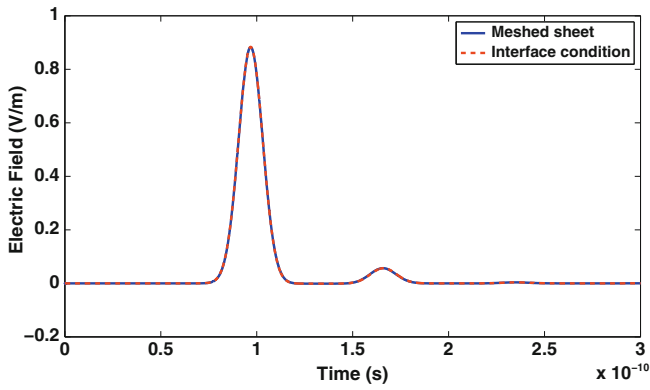


Fig. 6. Transient transmitted electric field.

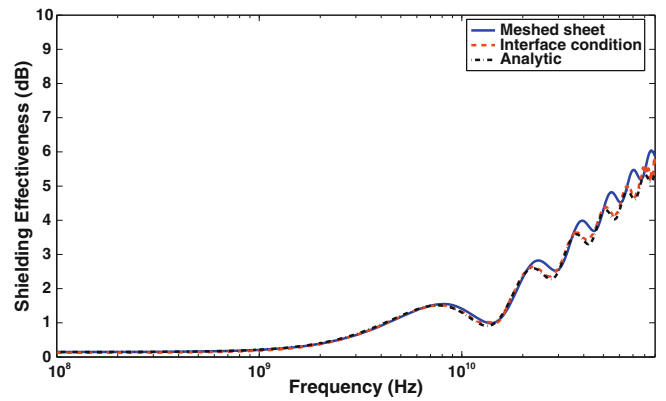


Fig. 9. Shielding effectiveness.

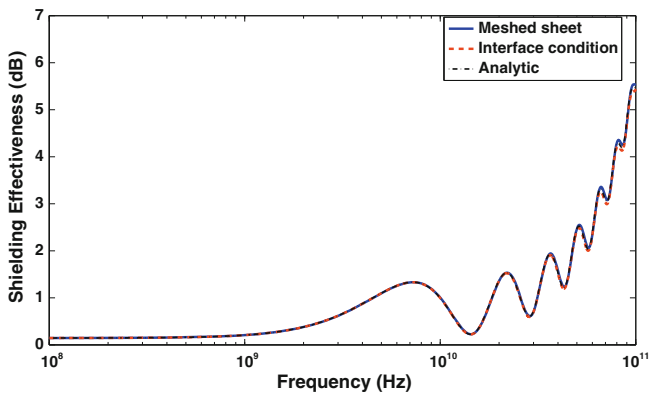


Fig. 7. Shielding effectiveness.

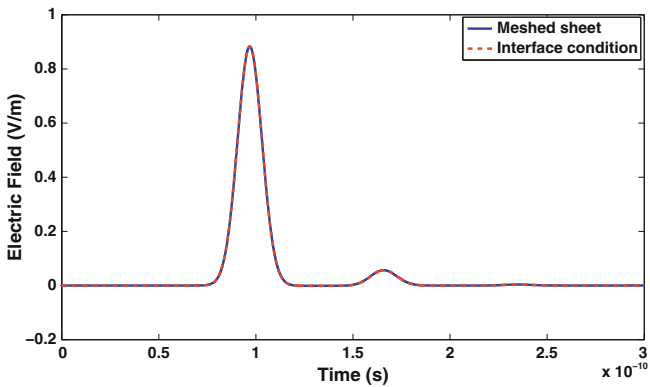


Fig. 8. Transient transmitted electric field.

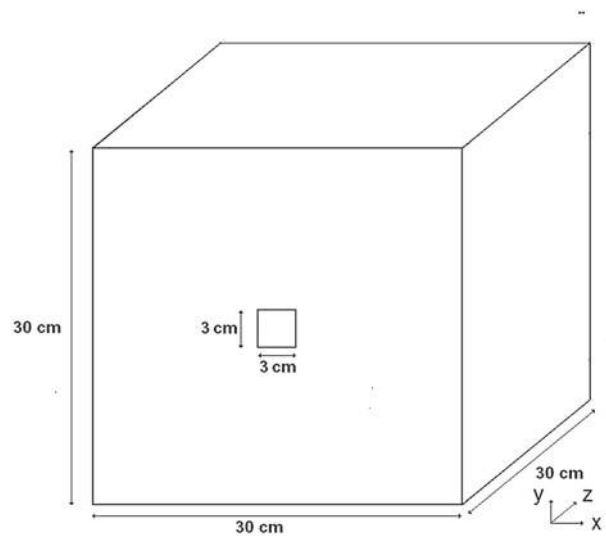


Fig. 10. 3D cavity.

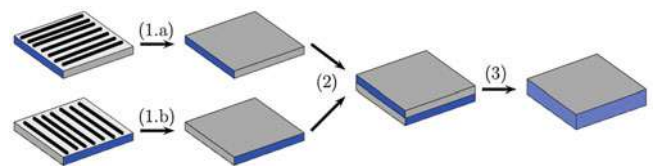


Fig. 11. Homogenization steps.

The difference is from the homogenization model to explain the error between the case with interface condition and the case when the sheet is meshed [10], but this difference is acceptable and the model remains valid.

6 Thee dimensional cavity

Let's consider a 30 cm × 30 cm × 30 cm cavity with 3 cm × 3 cm aperture located on the front size (Fig. 10). The wall is constituted by two composite sheets. Each sheet is constituted by fibers reinforced by resin. The characteristics of the resin are $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, μ_0 , $\sigma_1 = 0.01$ S/m and

characteristics of the fibers are $\epsilon_2 = \epsilon_0$, μ_0 , $\sigma_2 = 10\,000$ S/m. The thickness of the sheets is 6 mm. The fibers are oriented in the same direction. The sheets are assembled such that the fibers belonging to two adjacent sheets are oriented perpendicularly (Fig. 11) [13]. Each heterogeneous sheet is homogenized separately (Figs. 11.1.a and 11.1.b). The obtained homogenized sheets are associated (Fig. 11.2). A homogenization procedure is performed again to obtain an equivalent homogeneous wall (Fig. 11.3).

The homogeneous wall is anisotropic and his properties depends on the polarization of the electromagnetic field. They are defined by the orientation of the normal vector (Wiener model [5] or dynamic homogenization model).

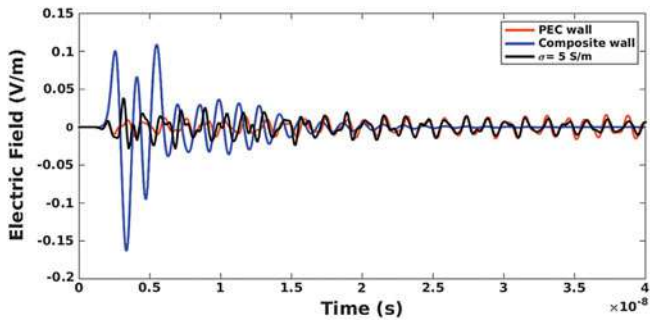


Fig. 12. Electric field in the center of the cavity.

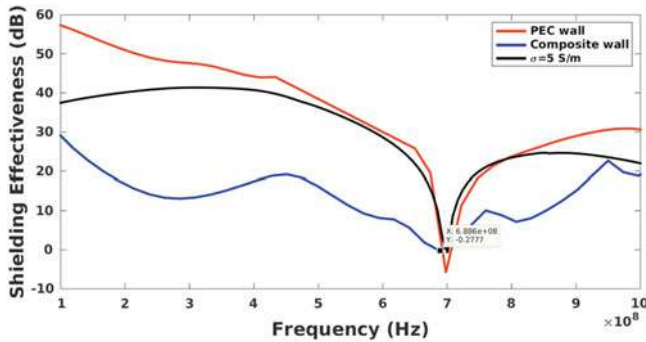


Fig. 13. Electric field in the center of the cavity.

In this study, the normal vectors of the walls are oriented along the canonical basis (e_x, e_y, e_z):

- where the normal vectors are oriented along e_x and e_z , the effective parameter are obtained with the Wiener model, the effective permittivity is $\epsilon = 2.38\epsilon_0$, and the effective conductivity is $\sigma = 990$ S/m;
- where the normal vectors are oriented along e_y , the effective parameter are presented in Figures 4 and 5.

The cavity is illuminated by a Gaussian pulse, $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$ and $\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$, which excites frequencies up to 1.5 GHz. The magnitude of the Gaussian pulse is 1. The simulations are performed on a computer with 32 CPU (2 GHz Pentium Xeon, Intel, Santa Clara, California, USA). The size of the mesh is about 15 000 elements. An explicit Runge-Kutta 44 scheme is used. The CFL time step is 4×10^{-14} s. The time cost of one simulation is about 5 days.

The electric field in the center of the cavity is plotted in Figure 12, and compared to the case where the walls of the cavity are perfect electric conductor (PEC) and the case walls of the cavity are conductive $\sigma = 5$ S/m (the thickness of the walls is the same than composite walls). The electric field remains important with composite walls because the conductivity of the walls oriented along e_y is low. The attenuation of the electric field in the case of

conductive walls is more important than of the case with PEC walls. A FFT is applied and the shielding effectiveness is evaluated and presented in Figure 13. A resonance frequency is excited in the PEC case and is attenuated in the cases of conductive and composite walls. The shielding effectiveness is less important than the PEC case due to the transmission of the walls.

This simulation demonstrates the efficiency of the approach for studying a cavity with heterogeneous walls. If the walls of the cavity were meshed, the computational cost would be strongly increased due to the presence of microstructures, and the simulation would become cumbersome.

7 Conclusion

An interface condition to avoid the mesh of heterogeneous sheets in 3D geometries is proposed in a DG method. This interface condition is issued from analytical solution of 1D Maxwell equations in frequency domain. It allows a reduction of the computational time cost. This interface condition was validated on homogenization cases. A study of a 3D cavity was presented to illustrate the efficiency of the approach.

References

1. K.M. Mitzner, IEEE Trans. Antennas Propag. **16**, 706 (1968)
2. F. Bocquet, L. Pichon, A. Razek, IEEE Trans. Magn. **34**, 2791 (1998)
3. M.S. Sarto, IEEE Trans. Electromagn. Compat. **41**, 298 (1999)
4. M. Boubekeur, A. Kameni, L. Bernard, A. Modave, L. Pichon, IEEE Trans. Magn. **50**, 493 (2014)
5. O. Wiener, Abhandlungen der Kniglich Schsischen Gesellschaft der Wissenschaften **32**, 604 (1912)
6. A. Sihvola, IEEE Electromagnetic Waves Series 47, (1999)
7. G.W. Milton, The Theory of Composites (Cambridge University Press, 2002)
8. C.L. Holloway, M.S. Sarto, M. Johansson, IEEE Trans. Electromagn. Compat. **47**, 833 (2005)
9. V. Preault, R. Corcolle, L. Daniel, L. Pichon, IEEE Trans. Electromagn. Compat. **55**, 1178 (2013)
10. V. Preault, R. Corcolle, L. Daniel, L. Pichon, J. Appl. Phys. **115**, 154904 (2014)
11. A. Kameni Ntichi, A. Modave, M. Boubekeur, V. Pr eault, L. Pichon, C. Geuzaine, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **64**, 24508 (2013)
12. T. Mori, R. Tanaka, Acta Metall. Mater. **21**, 597 (1973)
13. G. Wasselynck, D. Trichet, J. Fouladgar, IEEE Trans. Magn. **49**, 1825 (2013)

2.7 Diagnostic de réseau filaire

Les réseaux filaires occupent une place importante dans les systèmes tels que la voiture, l'avion ou encore le train. La fiabilité de ces réseaux repose sur la qualité des outils et techniques de maintenance employés, notamment ceux de la maintenance prédictive car un dysfonctionnement dans le réseau peut conduire à des accidents mettant en péril la sécurité des biens et des personnes. La détection de petites dégradations de câbles avant que celles-ci ne deviennent plus importantes est d'un intérêt majeur pour la fiabilité de ces réseaux. Cette problématique autour des défauts naissants est notamment étudiée au laboratoire GeePs à travers des travaux de thèse de Mostapha SMAIL [104] et a bénéficié de plusieurs financements ANR dont SODDA. Ma contribution sur ce thème a consisté en la mise en place et à l'utilisation des modèles numériques 3D pour la caractérisation de ces défauts naissants [67, RI.4, RI.7].

La technique la plus couramment utilisée pour le diagnostic des réseaux filaires est la réflectométrie. Celle-ci consiste à injecter un signal dans le réseau et à étudier les signaux réfléchis (Fig.2.4) dont la présence dénote de l'existence d'un ou plusieurs défauts [101, 103]. Les caractéristiques telles que la nature et la position des défauts détectés sont obtenus après l'analyse de la forme et du déphasage des signaux réfléchis [42, 91].

Dans les travaux de modélisation, les reflectogrammes utilisés pour caractériser les défauts

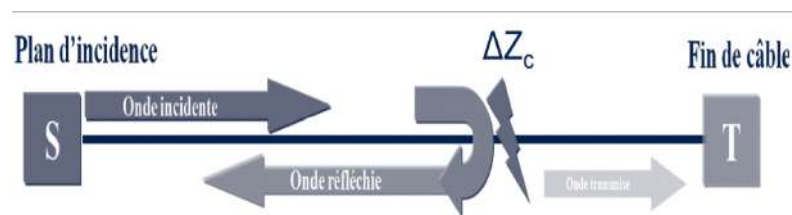


FIGURE 2.4 – Schéma de principe de la réflectométrie.

d'un réseau filaire sont très généralement issus de la résolution des équations des télégraphistes. C'est un système d'équations mono-dimensionnelles dont les inconnues sont la tension $V(z, t)$ et le courant $I(z, t)$. Il est issu de la représentation quadripolaire électrique d'une ligne de transmission en fonction des éléments suivants : R (Résistance), L (Inductance), C (Capacité), G (Conductance), et est établi en utilisant la loi des noeuds et la loi des mailles sur un tronçon de câble de longueur Δz (Fig.) [90].

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI(z, t) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial z} + C \frac{\partial V}{\partial t} + GV(z, t) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Pour déterminer les paramètres électriques RLCG nécessaires au système des télégraphistes,

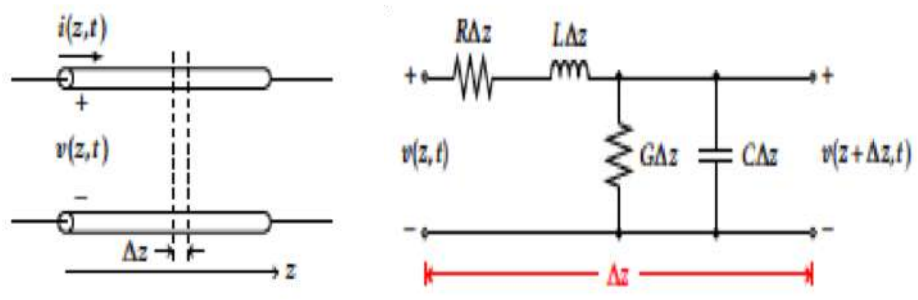


FIGURE 2.5 – Représentation RLCG d’une ligne de transmission.

on utilise généralement deux types d’approches qui sont définies uniquement sur la section de la ligne étudiée :

- Une approche analytique : elle donne les paramètres électriques en fonction des caractéristiques géométriques du câble [106]. Dans le cas de câbles co-axiaux sans pertes, l’inductance et la capacité sont données par : $L = (\mu/2\pi) \ln(r_a/r_b)$, $C = 2\pi\epsilon/\ln(r_a/r_b)$, où r_a est le rayon du conducteur intérieur et r_b le rayon du conducteur extérieur.
- Une approche numérique 2D : elle consiste à résoudre l’équation de Poisson $\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0$ [65]. Le potentiel V solution de ce problème statique est utilisé pour le calcul des paramètres électriques de la ligne.

Malheureusement, les paramètres électriques calculés par ces deux approches ne tiennent pas compte de l’aspect tri-dimensionnel du câble et des défauts. L’un des objectifs de nos travaux a été de mettre en évidence l’apport de la modélisation 3D sur la détermination de ces paramètres électriques RLCG [RI.7].

2.7.1 Modèle de réflectométrie pour la caractérisation des défauts non-francs

Pour mener nos travaux sur l’étude des défauts non-francs, un modèle numérique tri-dimensionnel basé sur la résolution des équations de Maxwell en domaine temporel a été mis en place et ses résultats ont été confrontés aux mesures expérimentales.

Le modèle numérique proposé est défini sur un tronçon de câble contenant le défaut à étudier. Un champ électrique incident est appliqué à l’une des extrémités du câble et les signaux réfléchis et transmis sont enregistrés sur des plans situés en avant et en arrière du défaut. À partir de ces signaux temporels, les coefficients de réflexion et de transmission du défaut sont calculés. Le modèle expérimental quant à lui a consisté à fabriquer des défauts le plus proche possible de ceux modélisés, et à mesurer leurs coefficients de réflexion grâce à un analyseur de réseau.

Contrairement aux réflectogrammes numériques, les réflectogrammes expérimentaux sont bruités par des signaux parasites non désirés. Des techniques permettant d'isoler la réponse du défaut sont mise en oeuvre et rendent les résultats expérimentaux comparables à ceux de la simulation [46].

Dans les développements réalisés, on s'est particulièrement intéressé aux trois type de défauts non-francs suivant :

- Le défaut d'écrasement qui traduit une variation de la section du câble sur une longueur L_f (Fig.2.6).
- Le défaut de blindage qui traduit l'arrachement du blindage sur un angle θ_f et une longueur L_f (Fig.2.7).
- Le défaut d'épaulement qui traduit l'arrachement du blindage et du di-électrique sur une profondeur p_f et une longueur L_f (Fig.2.8).

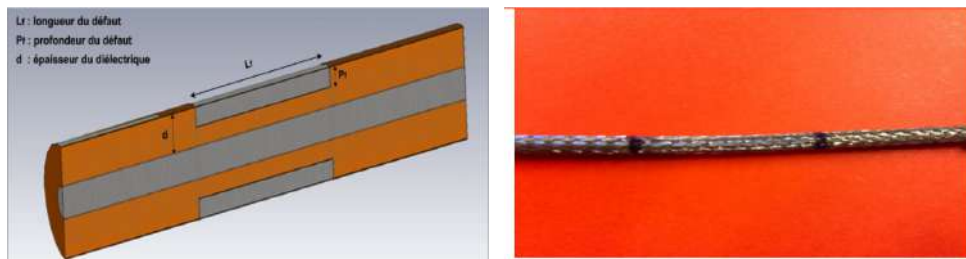


FIGURE 2.6 – Défaut d'écrasement

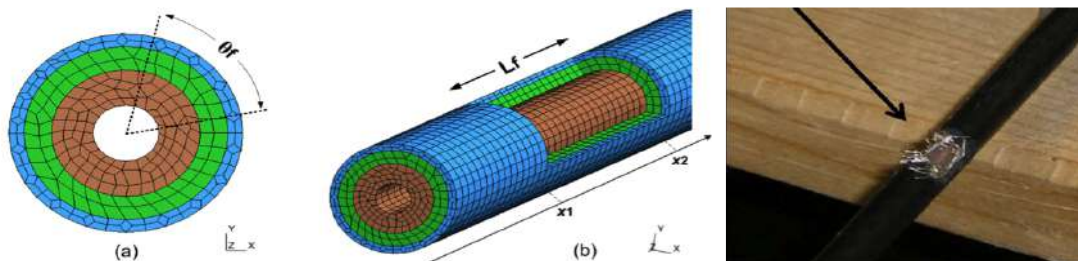


FIGURE 2.7 – Défaut de blindage

Le cas du défaut d'épaulement est présenté dans l'article ci-après **Time domain reflectometry model : analysis and characterization of a chafing defect in a coaxial cable** publié dans le journal *The European Physical Journal, Applied Physics*. La comparaison aux résultats expérimentaux réalisée montre la validité de l'approche numérique mise en place. Ces résultats sont exploités pour l'évaluation des paramètres électriques équivalents dans le but de proposer une représentation quadripolaire plus fine prenant en compte les aspects 3D.

Time domain reflectometry model: analysis and characterization of a chafing defect in a coaxial cable[★]

Abelin Kameni^{*}, Florent Loete, and Lionel Pichon

GeePs – Group of electrical engineering – Paris, UMR CNRS 8507, CentraleSupélec, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, Sorbonne Université, 11 rue Joliot-Curie, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Received: 22 December 2017 / Received in final form: 7 June 2018 / Accepted: 11 June 2018

Abstract. This paper presents experimental and numerical studies of a chafing soft defect realized by partially milling coaxial cables. The approach is based on the time domain reflectometry technique. The numerical model consists in solving Maxwell's equations while an incident Gaussian pulse is injected on the faulty line. The experimental time domain measurements are performed with a vector network analyzer. To get the experimental results comparable to the numerical ones, a process to denoise the measured impulse responses is proposed. The reflection coefficients obtained are compared to those given by a classical approach based on a chain matrix model to show the impact of 3D numerical modeling in studying soft faults.

1 Introduction

One of the crucial issues in domains such as aerospace and automotive is to keep electrical networks undamaged by detecting and repairing the defects that can appear on the wires [1]. The hard faults which are characterized as open-circuit or short-circuit have been well studied and are efficiently characterized by traditional reflectometry techniques [2]. The soft faults which are characterized by partial damage to the wire have been far less studied because the generated reflections are very small and hard to detect [3]. To improve the analysis and diagnosis of wired networks, it is crucial to have numerical models whose results are comparable to those obtained from measurements.

Modeling a wiring system generally consists in computing the voltage potential on the faulty section by solving a 2D static Poisson equation and using the Gauss theorem to determine the distributed electrical parameters: the resistance R , the inductance L , the capacitance C , and the conductance G (RLCG). These parameters are used in a longitudinal model such as telegrapher's equations or chain matrix model to compute the reflection coefficient [4]. Unfortunately, this modeling approach does not take into account the three-dimensional aspect of wave propagation in the wire. In our previous works, we have proposed how to compute the equivalent electrical parameters of shielding soft defects through 3D time domain numerical modeling and use frequency domain reflectometry measurements for validation [5]. Unfortunately, in these works, because of the considered fault lengths and the cable type, the description of reflection

coefficient is limited on the growing part of the first lobe. This does not allow to clearly determine the frequency signature of the shielding defect.

In this paper, we use time domain reflectometry measurement and a 3D time domain numerical simulation to describe evolution of the frequency signature of soft fault defects. The damage is a partial chafing of the shield and the insulator on a coaxial cable RG58. The fault lengths and the frequency band are chosen sufficiently large to have several lobes on the reflection coefficient. In this work, we also show how to treat experimental time domain measurements to get results which can be compared to those obtained from numerical modeling. Because of very weak contribution of the soft defect on the response of the line, the proposed process combines different existing techniques such as de-embedding [6] and clean algorithm [7], in order to remove the unwanted signals on the measured impulse responses. The experimental and numerical reflection coefficients due to the soft defect are compared to that obtained from a chain matrix model to show benefit of 3D modeling.

2 Numerical modeling

A 3D numerical modeling consists in solving the time domain Maxwell's equations to compute the reflection coefficient of the faulty section. A nodal discontinuous Galerkin method is adopted for the spatial discretization [8]. Its discontinuous aspect allows to easily discretize objects of different sizes or shapes, and provides a better representation of discontinuous properties. These kind of methods are well adapted for parallel computing and high order spatial elements are easily used to improve the accuracy of the results.

[★] Contribution to the topical issue "Numelec 2017", edited by Adel Razek.

^{*} e-mail: abelin.kameni@lgep.supelec.fr

2.1 Numerical method

Let \mathbf{E} , \mathbf{H} , and \mathbf{J} represent, respectively, the electric field, the magnetic field, and the current density. The time domain Maxwell's equations form a system (1) of 6 unknowns that are components of \mathbf{E} and \mathbf{H} :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J} \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

where ε is the permittivity of the medium, μ its permeability. In a conductive medium, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, with σ the conductivity.

The discontinuous Galerkin method is introduced for solving the conservative form of partial differential equations. This method consists in discretizing the variational formulation of (1) on each mesh element T of the domain $\Omega = \cup T$:

$$\begin{cases} \int_T \varepsilon \partial_t \mathbf{E} \varphi - \int_T \mathbf{H} \times \nabla \varphi - \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \varphi = - \int_T \sigma \mathbf{E} \varphi \\ \int_T \mu \partial_t \mathbf{H} \psi + \int_T \mathbf{E} \times \nabla \psi + \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \psi = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

where φ and ψ are test functions. In each T , a finite element method is applied and a mapping technique is employed to facilitate the use of high order mesh elements. The interface terms $(\mathbf{n} \times \mathbf{H})$ and $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ are replaced by numerical flux expressions $(\mathbf{n} \times \mathbf{H})^{\text{num}}$ and $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})^{\text{num}}$ as in a finite volume method. Different formulations of the flux expressions exist [9]. The following expressions (3) resulting in different numerical schemes are implemented. For $\alpha = 0$, centered fluxes are obtained and numerical schemes are dispersive. For $\alpha = 1$, upwind fluxes are obtained and numerical schemes are dissipative. We have

$$\begin{cases} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})^{\text{num}} = \mathbf{n} \times \frac{\{\mathbf{ZH}\}}{\{\mathbf{Z}\}} - \alpha \left(\mathbf{n} \times \frac{(\mathbf{n} \times \llbracket \mathbf{E} \rrbracket)}{\{\mathbf{Z}\}} \right) \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{E})^{\text{num}} = \mathbf{n} \times \frac{\{\mathbf{YE}\}}{\{\mathbf{Y}\}} + \alpha \left(\mathbf{n} \times \frac{(\mathbf{n} \times \llbracket \mathbf{H} \rrbracket)}{\{\mathbf{Y}\}} \right) \end{cases}, \quad (3)$$

where $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, $Y = 1/Z$, $\llbracket u \rrbracket = \frac{u^+ - u^-}{2}$, and $\{u\} = \frac{u^+ + u^-}{2}$. The superscript “-” denotes the values for fields in the current element, while “+” is for the adjacent element. In this work, the upwind fluxes are considered, the time integration is ensured by an explicit four stages Runge-Kutta method (RK44) and the spatial discretization is performed with the third order tetrahedral mesh elements to improve accuracy of the results.

2.2 Numerical results

The coaxial cable model is designed by four concentric cylinders as shown in Figure 1a. At the center, the copper core diameter is 0.43 mm. The first layer of diameter 2.9 mm is the inner dielectric insulator whose relative permittivity is $\varepsilon_{r_i} = 2.3$. The second layer of diameter 3.2 mm is the woven copper shield whose conductivity is $\sigma = 6.10^7 \text{ S/m}^{-1}$. The third layer of diameter 3.6 mm is an

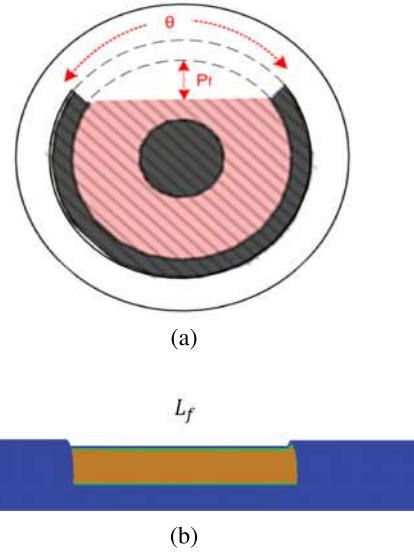


Fig. 1. Modeling of a damaged coaxial cable. (a) Section of the coaxial cable, (b) chafing of the shield and insulator.

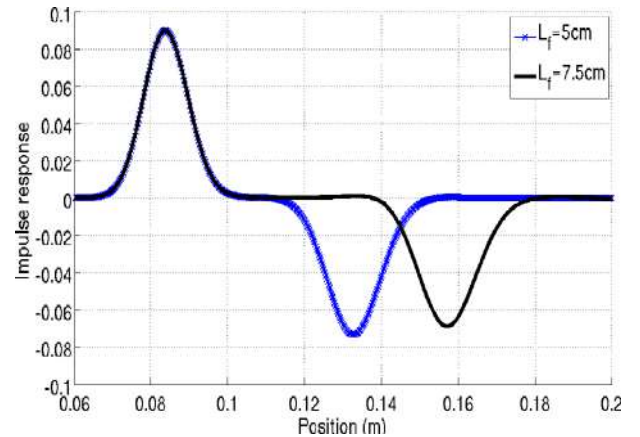


Fig. 2. Impulse responses of a chafing soft fault of length $L_f = \{5, 7.5\}$ cm.

outer plastic jacket whose relative permittivity is $\varepsilon_{r_j} = 2.1$. The soft fault presented in Figure 1b is a partial chafing of the jacket, the shield, and the insulator on a length L_f , and the damaged depth of the dielectric insulator is noted as $p_f = 1$ mm. Since a part of the field is radiated outside, a surrounding cylindrical vacuum volume is added with perfectly matched layers to operate like free space as in experimental measurements [10].

The simulation consists in injecting a Gaussian pulse of frequency band $[0, 7]$ GHz in the cable. The incident radial electric field is given by: $E_r^{\text{inc}}(t) = e^{-a(t-t_0)^2}$ with $a = 3.10^{20}$ and $t_0 = 0.3$ ns. The reflected field is recorded on an observation plane S located in front of the soft fault. It is computed as

$$E_r^{\text{refl}} = S^{-1} \int E_r dS. \quad (4)$$

Two lengths $L_f = \{5, 7.5\}$ cm are considered and the impulse responses versus the position $z = 2vt$, with $v = c/\sqrt{2.3}$, are presented in Figure 2. For each case,



Fig. 3. A two port a vector network analyzer (VNA) is connected to a faulty line through the fixtures *A* and *B*.

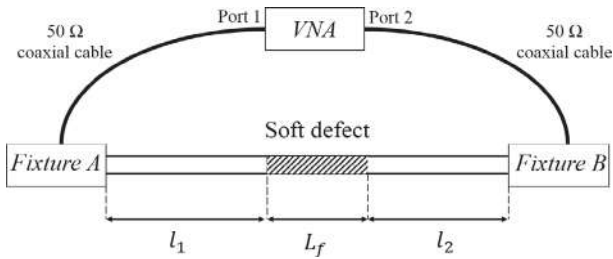


Fig. 4. The faulty line includes a chafing soft defect realized by partially removing by milling the shielding and the isolator.

the first reflection is positive and the second is negative. This is due to the higher wave velocity value in the defective zone. The distance between the positive and negative peaks is equal to the length of the damaged part. The amplitudes of the negative pulses are lower than those of the positive pulses. This is due to the radiated field outside the coaxial cable. When L_f increases the amplitude of the second reflection decreases because the field is radiated outside along the defective zone.

3 Experimental approach

In this section we will focus on the comparison between the numerical simulation and the experimental results on chafing defects for diagnosis purposes. The early diagnosis of such defects is very important since they correspond to electrical wire damaged by abrasion against sharp edges caused by poor design, bad or broken holding of the cable. This results in a chafing of the insulator as modeled in the previous section and ultimately, in an extreme case where the insulator is completely removed over an angular portion, can lead to severe system failures.

3.1 Experimental setup

The experimental setup is shown in [Figure 3](#). A faulty line is connected to a vector network analyzer through two $50\ \Omega$ coaxial cables equipped with N connectors. The *A* and *B* fixtures are N to BNC coaxial adaptors. Since the SOLT (Short Open Load Thru) calibration is realized at the extremities of those cables, the position of the reference plane will be at the end of the cable connected to port 1. The scattering parameters are measured with an Agilent N9914 Fieldfox over a $[0, 4]$ GHz range.

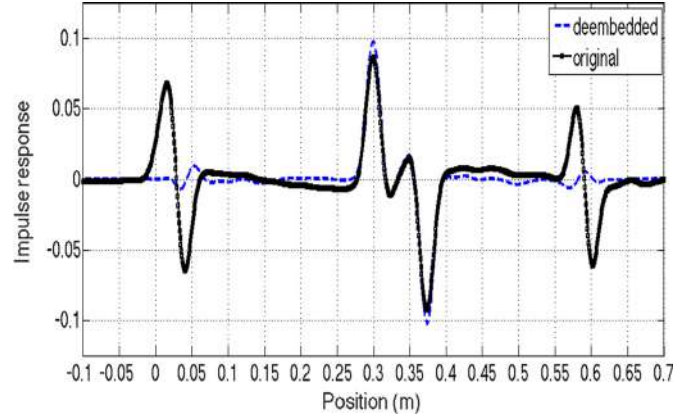


Fig. 5. Original and de-embedded impulse responses of a defective line under test. The line is a 60 cm $50\ \Omega$ RG58 coaxial cable including a 7.5 cm chafing defect.

In this work, the faulty line including a chafing defect ([Fig. 4](#)) is realized by partially milling the shielding and the insulator on a limited portion of a 60 cm, $50\ \Omega$ RG58 coaxial cable, as shown in [Figures 1](#) and [3](#). Two lengths $L_f = \{5, 7.5\}$ cm with a depth $d = 1$ mm were realized.

3.2 Experimental results

A common problem, when trying to characterize a soft defect on an electrical line by reflectometry, is that the fixtures at each extremity of the line also introduce insertion or return losses. In that case, the measured impulse responses also contains the signatures of the fixtures. Although very weak, the fixtures contribution cannot be neglected when dealing with soft defects since the perturbation they create on the line are of the same order of magnitude. In this work the two-window time gating method presented in reference [\[6\]](#) is used to remove the contribution of the fixtures. It is based on the measurement of the four scattering parameters of the network and a selective gating of the mismatches caused by each fixture. Consequently the full de-embedding of the fixtures effect and the quantitative characterization of the signature of defects can be achieved. The result of the de-embedding process on the defective line is presented in [Figure 5](#) and one can see that the contribution of the fixtures are mostly removed. Despite this technique, it remains a non-negligible noise level that leads on ripples of the reflection coefficient in frequency domain.

To avoid these ripples, a clean algorithm procedure [\[7\]](#) is applied in order to remove the noise and the unwanted inhomogeneities on the time domain impulse response. In this work, the shape of the impulse response at one interface of the defect can not be considered as a *sinc* function. As a matter of fact, the leakage of the field with frequency will affect the reflection coefficient and consequently the shape of the impulse response. The interface impulse response used in the clean algorithm procedure was taken as the main lobe of the first reflection ([Fig. 6](#)).

[Figure 7](#) shows the comparison of the reflection coefficients between the experimental measurements and the numerical model for $L_f = \{5, 7.5\}$ cm. The error over

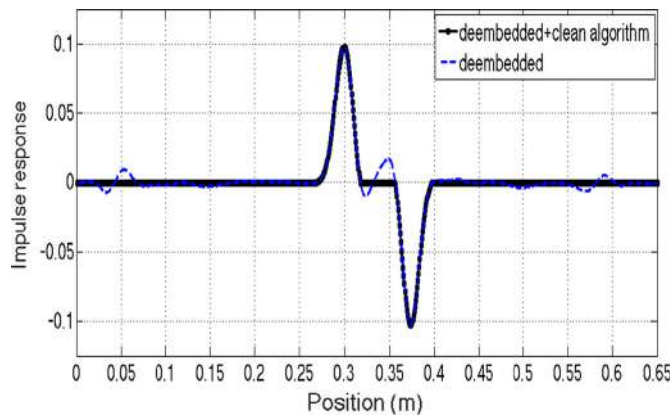


Fig. 6. Result of the de-embedding and clean algorithm procedure on the impulse responses of the defective line under test with a chafing defect of length $L_f = 7.5$ cm.

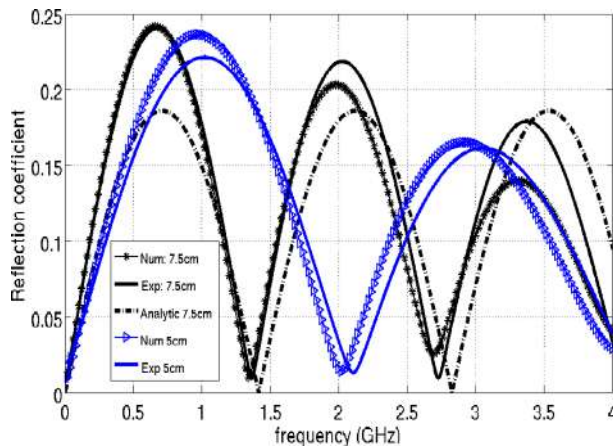


Fig. 7. Comparison of reflection coefficient between the experimental measurements, the numerical DG model and a simple chain matrix model for $L_f = 7.5$ cm and $d = 1$ mm.

frequency is around 5% below 1.5 GHz and increases with frequency since many experimental parameters can have an influence on the losses. The reflection coefficient obtained from a chain matrix model, that consists in a transmission line model with the three sections cascaded, is also added for $L_f = 7.5$ cm. This chain matrix model does not take into account the losses due to the leakage in the outer medium, and can account for the model of a crushing defect where the shielding would not have been damaged. The periodicity of the lobes with frequency is in very good agreement but this result more importantly clearly emphasizes the effect of the losses on the frequency response. Consequently, the specific signature of the chafing defect evidenced here is very important since it

allows us to discriminate a simple crushing defect (no leakage, no short circuit risk) from a chafing defect potentially more severe. The length of the defect can be estimated through the measurement of lobes periodicity and the identification of the nature of the defect through the recognition of the attenuation pattern by cross correlation analysis.

4 Conclusion

A numerical model, as well as an experimental validation, of chafing soft defects on an electrical line was presented. The model is based on the implementation of the discontinuous Galerkin method and the defects created by milling coaxial cables were characterized by time and frequency domain reflectometry. A de-embedding and clean algorithm procedure was also used in order to denoise, extract, and quantitatively identify the signature of the soft defect. The method is very efficient and, for the first time to our knowledge, a frequency signature allowing to discriminate a crushing from a chafing defect was evidenced. This result can be a powerful tool for the preventive diagnosis and maintenance of potentially severe soft defects.

References

1. F. Auzanneau, Prog. Electromagn. Res. B **49**, 253 (2013)
2. M. Franchet, N. Ravot, O. Picon, IEEE Electromagn. Compat. Mag. **2**, 54 (2013)
3. F. Loete, Q. Zhang, M. Sorine, IEEE Trans. Antennas Propag. **63**, 2532 (2015)
4. E.J. Lundquist, J.R. Nagel, S. Wu, B. Jones, C. Furse, IEEE Sens. J. **13**, 1172 (2013)
5. A. Manet, A. Kameni, F. Loete, G. Genoulaz, L. Pichon, O. Picon, IEEE Trans. Electromagn. Compat. **59**, 533 (2017)
6. G. Gronau, I. Wolff, IEEE Trans. Microw. Theory Tech. **37**, 479 (1989)
7. C. Buccella, M. Feliziani, G. Manzi, IEEE Trans. Electromagn. Compat. **46**, 597 (2007)
8. A. Kameni, A. Modave, M. Boubekeur, V. Preault, L. Pichon, C. Geuzaine, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **64**, 24508 (2013)
9. J.S. Hesthaven, T. Warburton, J. Comput. Phys. **181**, 186 (2002)
10. A. Modave, A. Kameni, J. Lambrechts, E. Delhez, L. Pichon, C. Geuzaine, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **64**, 24502 (2013)

Open Access This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0> which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author(s) and source are credited.

Cite this article as: Abelin Kameni, Florent Loete, Lionel Pichon, Time domain reflectometry model: analysis and characterization of a chafing defect in a coaxial cable, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **83**, 30601 (2018)

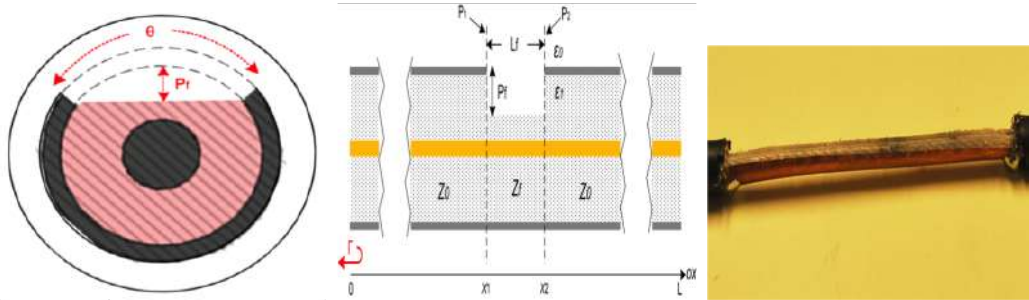


FIGURE 2.8 – Défaut de blindage et de di-électrique

2.7.2 Evaluation des paramètres électriques équivalent

Pour mettre en évidence l'apport de la modélisation 3D, on a comparé le coefficient de réflexion issu du modèle numérique à celui obtenu d'un modèle de ligne de transmission utilisant les paramètres $(RLCG)_{an}$ analytiques. Dans le cas d'un défaut d'écrasement sur une ligne sans pertes, les travaux de thèse de Hossein Manesh (Anthony Manet) ont montrés qu'il y a un décalage en fréquence sur les coefficients de réflexion Fig.2.9. Ce décalage est dû à une différence sur la valeur de l'élément capacitif.

L'observation d'une cartographie du champ électrique du modèle numérique 3D, montre la

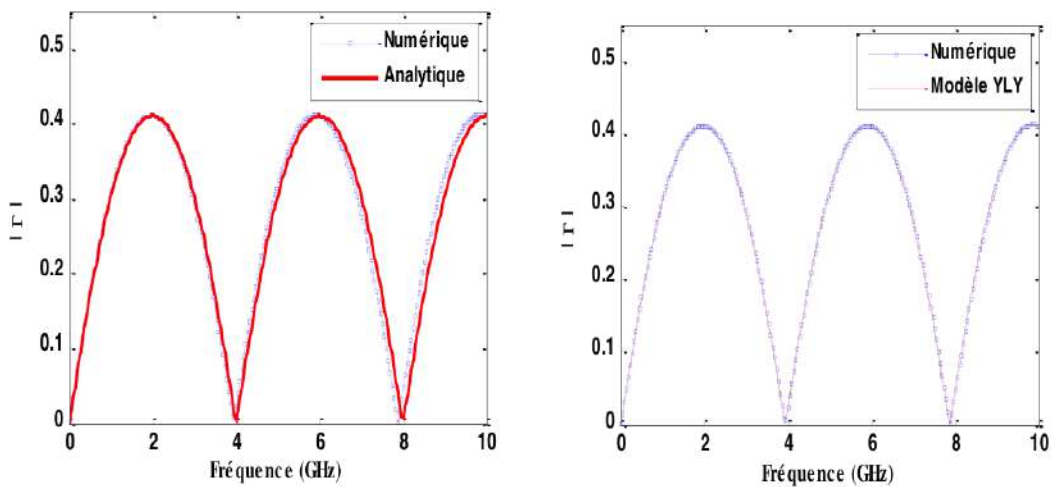


FIGURE 2.9 – Comparaison des coefficient de réflexion : (g) modèle numérique 3D et modèle des télégraphistes avec les paramètres $(RLCG)_{an}$, (d) modèle numérique 3D et modèle des télégraphistes avec les paramètres $(RLCG)_{num}$

présence d'effets capacitifs dus à la propagation d'une composante E_z au niveau des arêtes de changements de section du câble (Fig.2.10). A partir de l'évaluation des paramètres électriques

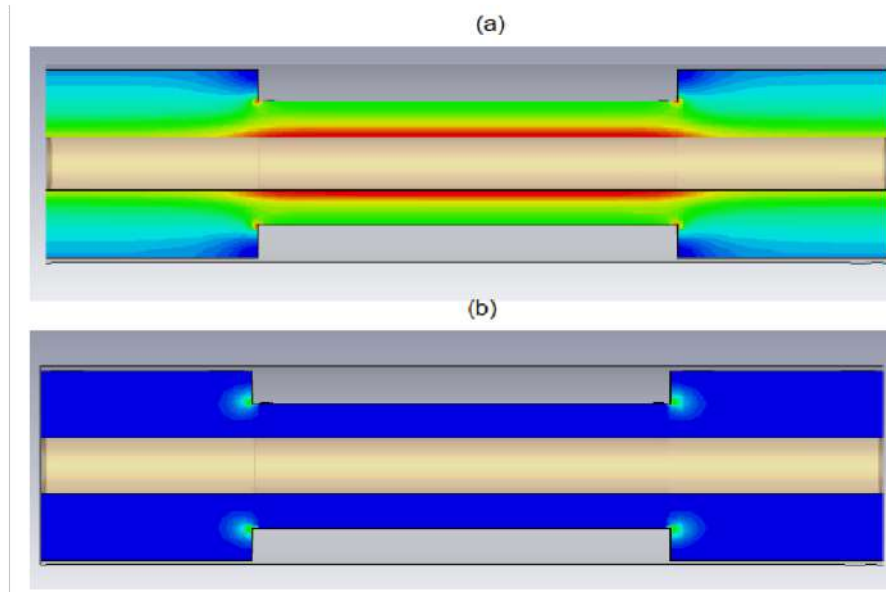


FIGURE 2.10 – Cartographie du champ électrique

$(RLCG)_{num}$, une solution d'amélioration de la représentation électrique quadripolaire a pu être proposée une amélioration. Celle-ci consiste en l'ajout d'éléments capacitifs en entrée et en sortie du quadripôle représentant la zone déficiente (Fig.2.11). Cette solution proposée a permis d'éliminer le décalage en fréquence observé précédemment (Fig.2.9).

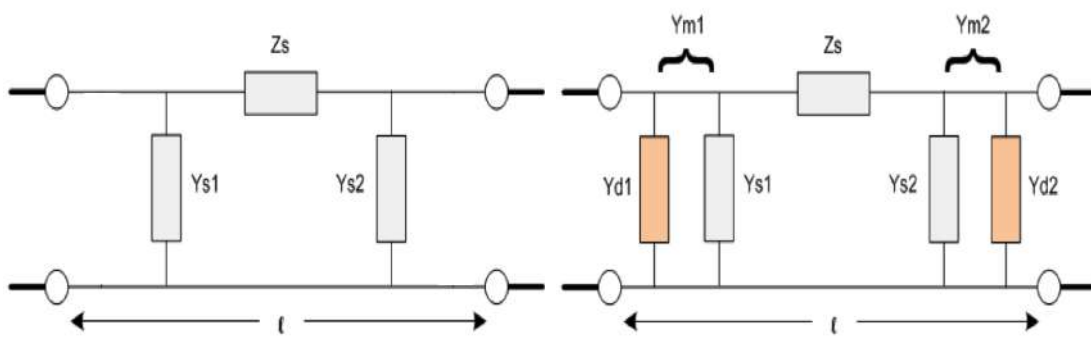


FIGURE 2.11 – (g) Représentation quadripolaire classique, (d) Représentation quadripolaire avec ajout d'éléments capacitifs

Lorsque le défaut comporte une perte de blindage (défaut de blindage et épaulement), le modèle 3D montre qu'il y a un rayonnement vers l'extérieur du câble. Ce rayonnement conduit à l'atténuation des ondes à la traversée de la zone déficiente. Lorsque la fréquence augmente, celui-ci devient plus important ce qui se traduit par la diminution de l'amplitude des lobes du coefficient de réflexion. Ces travaux de thèse ont permis de mettre en évidence que en plus des

effets capacitifs dus aux changements de section du câble, il y a des effets dissipatifs. Pour prendre en compte ces effets dissipatifs, la solution proposée dans ces travaux est d'ajouter dans la représentation électrique de la zone défectueuse, un élément résistif qui est mis en série avec l'inductance. Dans le tableau présenté ci-après, on récapitule les modèles électriques équivalent améliorés des trois types de défauts étudiés. L'article ci-après **Equivalent Circuit Model of Soft Shield Defects in Coaxial Cables Using Numerical Modeling** publié dans le journal *IEEE Transactions On Electromagnetic Compatibility* présente la méthodologie et les résultats obtenus pour le cas du défaut de blindage avec détérioration de la couche diélectrique.

Type du câble	Câble coaxial RG-58 (50 Ω, 66% cc)		Câble coaxial WD (50 Ω, 83% cc)		Câble coaxial WN (50 Ω, 81% cc)				
Type du défaut	Ecrasement								
Sévérité du défaut	Pf en % de Df (Lf = 2.5 cm)								
	Sain	10 %	14 %	38 %	Sain	50°	90°	130°	
Paramètres électriques	L' (uH/m)	0.248	0.234	0.228	0.185	0.189	0.193	0.204	0.225
	C' (pF/m)	100	106	109	134	81.52	80.02	77.74	75.17
	C_d (pF)	0.0	0.0010	0.0016	0.009	0.0	0.007	0.015	0.024
	f_1 = 3 GHz f_2 = 6 GHz					f_1^2	0.0	0.037	1.361
Module du coefficient de la réflexion					f_2^2	0.0	0.353	10.44	74.25
					R_s (Ω/m)				
Impédance du défaut					f_1				
					f_2				
forme du signal réfléchi					$ Γ_{max} $	0.0	0.057	0.083	0.284
					$\%Z_d^4$	0.0%	-2.60%	-2.90%	-7.53%
Schéma équivalent									
Modèle de la géométrie du défaut									

<ol style="list-style-type: none"> 1. Lf : est la longueur du défaut 2. f1 : fréquence du travail = 3 GHz 3. f2 : fréquence du travail = 6 GHz 4. Variation nominal en %
--

Tableau 5-2: Etude paramétrique de l'évolution des caractéristiques du défaut par rapport au type et leur degré de la sévérité.

Equivalent Circuit Model of Soft Shield Defects in Coaxial Cables Using Numerical Modeling

Anthony Manet, Abelin Kameni, Florent Loete, Jérôme Genoulaz, Lionel Pichon, and Odile Picon

Abstract—This paper presents a three-dimensional modeling study to investigate the effects of one type of soft fault problem in electrical fault diagnosis, the impacts of partial degradation in the coaxial cable shielding or other shielded lines. At first, a time domain nodal discontinuous Galerkin method is used to solve Maxwell's equations and simulate reflectometry responses of soft faults. Then, the numerical simulation results for soft defects in cable shields are compared with experimental measurements for validation purposes. Finally, the shield defects that can arise on coaxial cables are modeled by an equivalent circuit and compared to illustrate their impacts on the electrical characteristic parameters as a function of their severity.

Index Terms—Cable shielding, coaxial cables, discontinuous Galerkin, equivalent circuits, fault diagnosis, reflectometry, simulation, soft fault.

I. INTRODUCTION

THE fault-detection feature is certainly a very important aspect of wire health monitoring and an important process required in electrical wiring system operation. It has a great influence on security and quality. In transmission line networks, this feature is needed for the early identification of the faulty line in order to anticipate severe consequences that can be costly and even catastrophic.

Two main categories of defects can occur on transmission lines [1]: hard faults like short or open circuits resulting from a significant change in line impedance and the soft faults that include partial degradation such as insulation damage, natural aging, water infiltration, etc, leading to very small impedance changes along transmission lines. These defects can be studied by the reflectometry technique, which is based on electrical signal injection into the network from one or both extremities of a line followed by an analysis of the reflected signals resulting from impedance discontinuities [2], [3]. Whereas hard faults are easy to find, soft faults are difficult to detect because they do not significantly affect the received signal in

traditional reflectometry measurements. These soft faults have been less studied and they are more difficult to identify because of their low-level reflection signatures until they become hard faults [4]–[6]. In order to anticipate the appearance of severe faults that are initially caused by soft fault degradation, a detection feature is needed to provide timely identification of the faulted line.

The objective of this paper is to carry out a soft fault model in a coaxial line system to analyze its electrical effects caused by a discontinuity in the shield. In a previous study [7], the authors have presented a preliminary discussion on a numerical study of a soft defect by computing their reflectometry responses. This paper aims at extending the applicability of such a technique to provide an equivalent circuit for the shield defect and show the influence of fault severity on electrical parameters. The numerical results presented in this paper are obtained with the discontinuous Galerkin method. This method has been recently introduced in the modeling of electromagnetic compatibility problems and has proved to provide a powerful tool for wave problems [8]. The unstructured mesh allows a flexible discretization of complex geometries and provides adequate consideration of discontinuous physical properties. This method is well adapted for parallel computing because the generated matrices are block diagonals. The easy use of high order mesh elements allows for increasing the accuracy of the results.

II. NUMERICAL MODELING OF A SOFT DEFECT

The aim of this section is the numerical simulation of electromagnetic fields in the case of a soft defect, in order to describe the behavior of the reflection line response in the presence of soft faults. We refer to a lossless coaxial cable transmission line of characteristic impedance Z_0 , with the damaged area between two interfaces separated with a discontinuity in the shield of length L_f .

The application example was modeled in three dimensions by means of the discontinuous Galerkin method applied to the soft fault problem to numerically solve the time-dependent Maxwell's equations [8], [9], and to compute different parameters such as the time-domain reflection response, the reflection coefficient, or the impedance of the faulty section.

The discontinuous Galerkin methods are introduced for solving the conservative form of partial differential equations. This method consists of discretizing the variational formulation on each element of the computational domain. In each element, a finite-element method is applied, and the mapping technique is used to facilitate the use of high-order mesh elements. The interface terms are replaced by numerical flux expressions as in a finite-volume method [10], [11].

In this study, the coaxial cable model provides dimensionally accurate and detailed 3-D models of shielded defects (see Fig. 1)

Manuscript received March 11, 2016; accepted April 14, 2016. Date of publication October 13, 2016; date of current version December 6, 2016. This work was supported by the Association Nationale de la Recherche under Project "Soft Defects Diagnosis in Wired Networks."

A. Manet and O. Picon are with the Laboratory of Electronics, Systems of Communications and Microsystems (EA2552), Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Marne-la-Vallée 77454, France (e-mail: antony.manet@gmail.com; odile.picon@univ-mlv.fr).

A. Kameni, F. Loete, and L. Pichon are with the Group of Electrical Engineering of Paris, CentraleSupélec, Université Paris-Sud, UPMC, Gif-sur-Yvette 91192, France (e-mail: abelin.kameni@supelec.fr; florent.loete@lgep.supelec.fr; lionel.pichon@geeps.centralesupelec.fr).

J. Genoulaz is with the Safran Electrical and Power, Department of Research and Technology, Electrical Wiring Interconnection System Division (Eurasia), Blagnac 31700, France (e-mail: jerome.genoulaz@safrangroup.com).

Color versions of one or more of the figures in this letter are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TEMC.2016.2612719

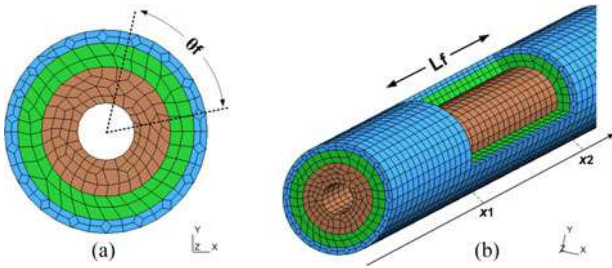


Fig. 1. Coaxial cable model: cross-sectional model (a) with different layers and (b) with the soft fault that is a shield and jacket cutaway.

TABLE I
COAXIAL CABLE MODEL DEFINITION

Parameter	Material	Diameter (mm)	Electrical properties
Core	Solid silver-plated copper	2.33	PEC
Insulation	PTFE	6.0	$v_p = 0.83$ nominal
Shield	Silver-plated copper	7.10	PEC
Jacket	FEP	7.70	$\epsilon_r = 2.1$

to describe the effects of the soft fault in a realistic coaxial line system.

Three concentric cylinders define the geometry: 1) outer plastic jacket; 2) double-braided shield; and 3) inner dielectric insulator made from aerated fluoropolymer insulation (PTFE). Fig. 1 shows the mesh used to simulate the coaxial cable with dimensions listed in Table I. At the center, the solid silver plated copper core is considered a perfect electrical conductor (PEC) boundary condition. Note that the double-braided shield is considered as a PEC due to its excellent shielding coverage and meshed because it is located between two dielectric materials.

The considered cable length is $L = 5$ cm and a soft fault occurs at $x_f = 2.25$ cm from the beginning of the line, with lengths of 5, 10, and, 20 mm defects on the shield, at various widths (angle cutaways “ θ ”) of 50° , 90° , and 130° , as shown in Fig. 1. The example given in this paper pertains to vary low loss coaxial cable with signal loss 105 dB/ 100 m up to 8 GHz. Due to the very short length of our cable model, the losses are neglected in the present analysis. Since a part of the field radiates outside the cable due to the discontinuous shield, a surrounding cylindrical air volume truncated with absorbing Silver–Muller boundary conditions is added to the computational domain and operates like free space as in experimental measurements.

The simulation consists in injecting a Gaussian pulse U_i of the unit amplitude of frequency band $[0; 6$ GHz] in the cable. The reflected and transmitted fields are recorded on the observation planes located in front of and behind the soft fault. Fig. 2 illustrates the time-domain response of the faulty line as a function of the fault angle values “ θ ” and the length of the defect “ L_f ”.

For both cases in Fig. 2, the shape of the reflected signal exhibits a positive and negative reflection due to the sign of the reflection coefficient at the discontinuity interfaces at $x = x_1$ and $x = x_2$ (see Fig. 1). The shape and amplitude of the time domain response due to the defect depend on the nature and severity of the fault. Moreover, as shown in these figures, the amplitude of the reflected waves is generally very small. The time domain result is significantly lower than the incident signal

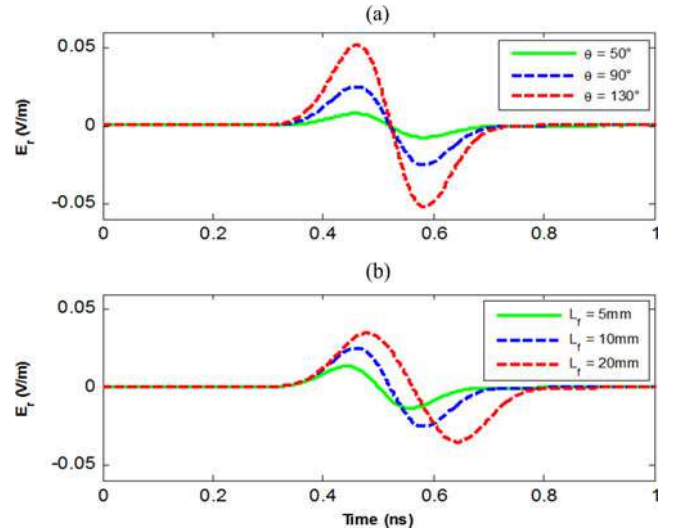


Fig. 2. Signal reflected for different simulated cases versus: (a) fault angle with $L_f = 10$ mm and (b) fault length with $\theta = 90^\circ$.

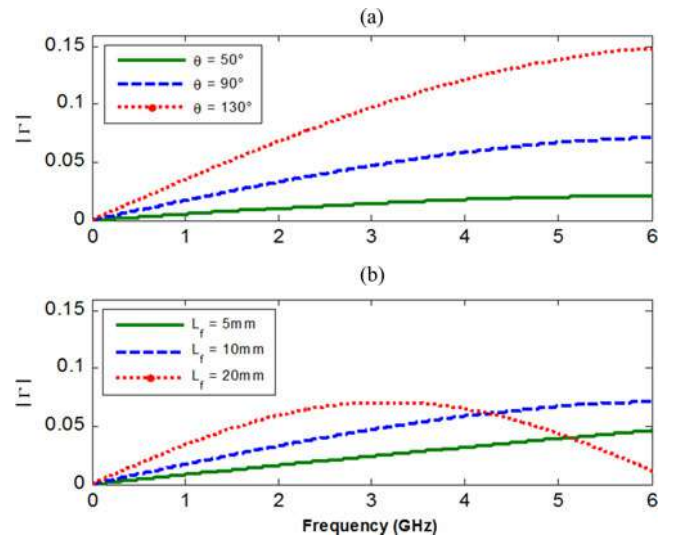


Fig. 3. Reflection coefficients results versus: (a) fault angle with $L_f = 10$ mm and (b) fault length with $\theta = 90^\circ$.

(here about 5% of U_i), and therefore, the reflected pulse cannot be detected easily by means of the measurement devices. As shown in Fig. 2(a), the reflected signal can change significantly due to the radiation leakage that increases with the angle of the shielding defect “ θ ”. In the same way, Fig. 2(b) shows that the amplitude of the reflected signal is increased with the length of the defect. The observed phase shift between the reflected waves of the simulated cases shown in Fig. 2(b) is due to the length of fault. For the fault of 20 mm length, the second reflection appears later than for the defect with smaller length.

The time-domain responses in Fig. 2 allow us to compute the reflection coefficients $\Gamma(f)$ in the frequency domain [12]. Fig. 3 shows the reflection coefficient $\Gamma(f)$ in a frequency range from 0 to 6 GHz for the two aforementioned cases above, against the fault angle and length, respectively.

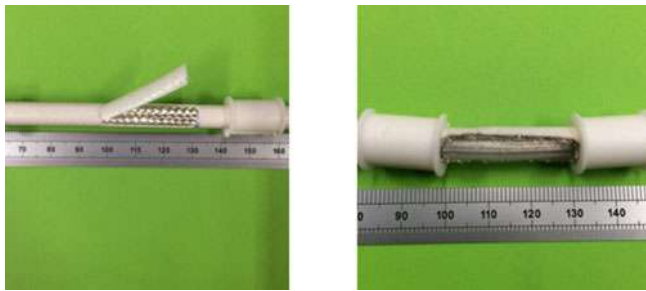


Fig. 4. Shield damage at 8.4 m on a 25 m coaxial cable, with different lengths.

III. EXPERIMENTAL VALIDATION

In this section, the experimental measurements that were performed with discontinuities in the coaxial cable shield are presented. The measurement was carried out using an aircraft coaxial cable EN 04604 WD ($Z_0 = 50 \pm 2 \Omega$ at 200 MHz). This type of coaxial cable is designed for high-frequency radio communication applications in aeronautic environments with frequency operation up to 8 GHz. As shown in Fig. 4, the faults were made of 130° shield cutaway sections, with lengths of 1 and 2 cm. The line terminals were attached with 50- Ω N series RF coaxial cable connectors. These N connectors used to join coaxial cables were designed to carry signals at radio frequencies up to 18 GHz. The reflected signals from the cable under test were measured by means of a VNA (Rohde & Schwarz ZNB8). In the case of a measurement with $\Delta f = 100$ kHz and a span of 6 GHz, the time domain range is sufficient to prevent the responses from overlapping or aliasing for reflection measurements for a 25 m cable length. The reflection and transmission coefficients (S-parameters) for a healthy cable and a shield damage located at 8.4 m on a 25 m cable were measured by means of a full 2-port VNA, with improved TRL calibration to acquire highly accurate measurements. The frequency-domain response is a mix of all the signals reflected by the discontinuities present in the cable such as mismatch effects and thus it is difficult to estimate the contribution of the sole fault. However, using both damaged and undamaged results, a time domain filter can be applied to remove unwanted signal components, in order to compute the reflection coefficient corresponding to the reflections initiated by the fault. Then, the measured data filtered and gated in the time domain are transformed back to the frequency domain to obtain the reflection coefficient of the soft fault (Γ_{Gate}) [13].

As discussed above, Γ_{Gate} is measured at the beginning of the line placed at 8.4 m from the fault position and, consequently, the measured reflection response will be lower than the simulation response of a small section of the cable, because of the loss of the cable and connector. In order to improve the accuracy of the reflection values between the simulation and experimental measurements, we need to compensate the loss for the measured reflection coefficient. In the case of the defect placed halfway along the test cable, the attenuation due to the cable and connector losses for reflection at the halfway point is very nearly equal to the S_{21} transmission loss in the undamaged case. Then, the reflection-gated response loss can be compensated by dividing the gated response by original transmission coefficient S_{21} of

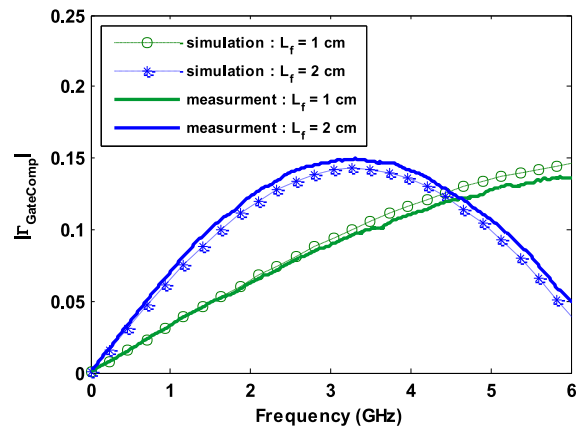


Fig. 5. Measurement and simulation reflection coefficient results for shield damage on the coaxial cable (fault angle $\theta = 90^\circ$).

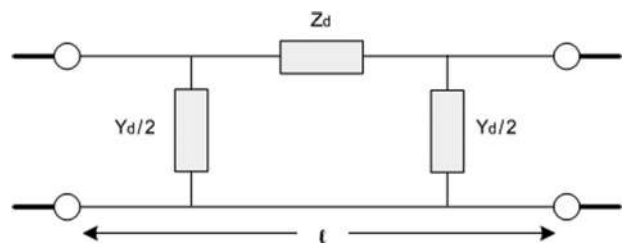


Fig. 6. Equivalent circuit model at the faulty section.

the undamaged case [13]:

$$\Gamma_{\text{GateComp}}(f) = \frac{\Gamma_{\text{Gate}}(f)}{S_{21}(f)}. \quad (1)$$

In our case, where the defect is not placed halfway along the test cable, the reflection gated and compensated response can be computed by taking the average between two values obtained from (1) at both line extremities. An example of the measured reflection coefficient gated and compensated (Γ_{GateComp}) is shown in Fig. 5 for the test case with the lengths of 1 and 2 cm defect on shield. In this figure, the results are compared with the numerical simulation results obtained by means of the discontinuous Galerkin method and good agreement is achieved.

IV. EQUIVALENT CIRCUIT

Circuit models are useful to predict system responses to different types of fault behaviors. This permits the representation of the discontinuity by simple electrical element combinations and, consequently, analysis of its behavior in terms of classical RLCG electrical parameters. As a matter of fact, depending on the nature of the defect, one can expect one or several parameters to be altered.

The interruption of the shield provides an impedance discontinuity Z_d , which can be due to radiation and induction effect changes. There are also shunt admittance elements Y_d , usually in the form of capacitance elements, which also arise from the change in outer conductor radius [14]. Fig. 6 shows the equivalent circuit model of the cable system at the faulty section, assuming that the electric charge density on the faulty region is uniform and neglecting the fringing fields of the edges of the shield discontinuity.

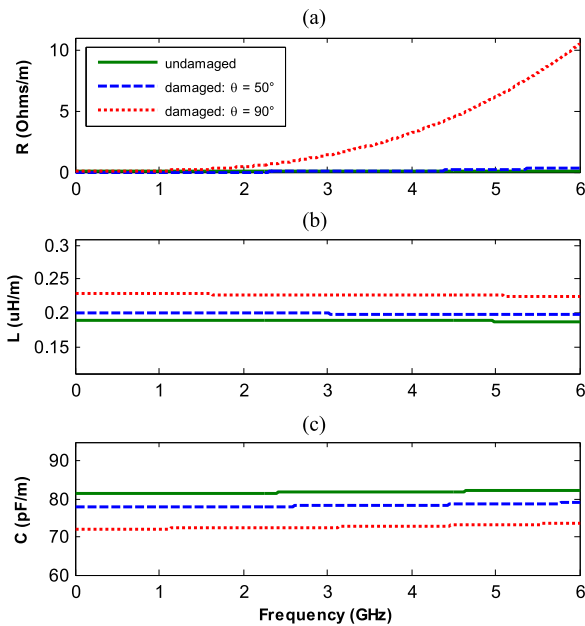


Fig. 7. Comparison of characteristic per-unit-length distributed parameters for the coaxial cable in the undamaged and damaged conditions with $L_f = 5$ mm: (a) resistance, (b) inductance, and (c) capacitance.

The values of the circuit elements containing two shunt elements and one series element can be determined from the chain matrix [14] calculated from the S-matrix. The S-parameters used in this section were calculated from the simulation results presented in Section II.

The chain parameter matrix of the faulty region between two interfaces at $x = x_1$ and $x = x_2$ (see Fig. 1) can be calculated from the overall S-matrix calculated at the beginning and end of the line, and then shifted from the measurement reference planes to the faulty region location. In representing the soft defect in this way, the effect of the fault in the coaxial cable shield can be modeled by the distributed parameters. The application example is related to the coaxial cable with the inner dielectric insulator made from an aerated PTFE whose dielectric loss is lower than PTFE with $1.5E-4$ at 10 GHz, and that the conductance G can be neglected.

Fig. 7 shows the comparison of characteristic per-unit-length distributed parameters, R , L , C , for the undamaged lossless coaxial cable and damaged with 5 mm long shield cutaways of 50° and 90° . Fig. 7(a) presents the per-unit-length resistance R simulated for the undamaged and damaged model. The loss due to the radiation of electromagnetic waves from discontinuity increases with an increase in frequency.

From the coaxial cable characteristics definition listed in Table I, the per-unit-length inductance and capacitance can be calculated directly from analytical expressions: $L' = 0.189 \mu\text{H}/\text{m}$; $C' = 81.5 \text{ pF}/\text{m}$. In Fig. 7(b) and (c), the simulated results are compared with the calculated per-unit-length inductance and capacitance in the undamaged and damaged model separately. As expected, the shielding defect modifies the capacitance and inductance of the line, because the presence of the discontinuity in the shield affects the propagation characteristics inside the cable. Fig. 7(b) and (c) represents small

changes to line inductance and capacitance in the case of damage. These may be due to small negative lumped capacitance and positive lumped inductance changes on the line at the place of the defect.

V. CONCLUSION

In this paper, we presented a soft shield defect model on a coaxial cable to analyze and estimate the reflection response.

The numerical simulation results, performed with a time domain nodal discontinuous Galerkin method, are validated by comparison with experimental measurements, and have shown good agreement over a frequency range that widely covers the band usually used for the diagnosis of faults in electric transmission lines.

The shield defect was modeled from reflectometry responses, in terms of the distributed transmission line parameters. A soft fault could result in variation of distributed parameters along the transmission line. The sensitivity analysis about electrical circuit parameter is derived to infer the nature of this kind of defect in terms of changes to per-unit-length resistance, inductance, and capacitance at the place of the defect, as a function of frequency, and could provide more useful information for diagnosis.

REFERENCES

- [1] L. Griffiths, R. Parakh, C. Furse, and B. Baker, "The invisible fray: A critical analysis of the use of reflectometry for fray location," *IEEE Sensors J.*, vol. 6, no. 3, pp. 697–706, Jun. 2006.
- [2] P. Tsai, C. Lo, Y. C. Chung, and C. Furse, "Mixed-signal reflectometer for location of faults on aging wiring," *IEEE Sensors J.*, vol. 5, no. 6, pp. 1479–1482, Dec. 2005.
- [3] C. Furse *et al.*, "Frequency-domain reflectometry for on-board testing of aging aircraft wiring," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 45, no. 2, pp. 306–315, May 2003.
- [4] G. Cerri *et al.*, "Fault location of shielded cables: Electromagnetic modelling and improved measurement data processing," *Proc. IEE—Sci., Meas. Technol.*, vol. 152, no. 5, pp. 217–226, Sep. 9, 2005.
- [5] L. Abboud, A. Cozza, and L. Pichon, "A matched-pulse approach for soft-fault detection in complex wire networks," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 6, pp. 1719–1732, Jun. 2012.
- [6] M. Franchet, N. Ravot, and O. Picon, "Soft fault detection in cables using the cluster time-frequency domain reflectometry," *IEEE Electromagn. Compat. Mag.*, vol. 2, no. 1, pp. 54–69, Jan.–Mar. 2013.
- [7] H. Manesh *et al.*, "Experimental analysis and modelling of coaxial transmission lines with soft shield defects," in *Proc. 2015 IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, Dresden, 2015, pp. 1553–1558.
- [8] L. Pebernet *et al.*, "Discontinuous Galerkin method applied to electromagnetic compatibility problems: Introduction of thin wire and thin resistive material models," *IET Sci., Meas. Technol.*, vol. 2, no. 6, pp. 395–401, Nov. 2008.
- [9] J. Hesthaven and T. Warburton, "Nodal high-order methods on unstructured grids: I. Time-domain solution of Maxwell's equations," *J. Comput. Phys.*, vol. 181, no. 1, pp. 186–221, 2002.
- [10] A. Kameni, B. Seny, and L. Pichon, "Multirate technique for explicit discontinuous Galerkin computations of time-domain Maxwell equations on complex geometries," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, pp. 1–4, Mar. 2016.
- [11] A. Kameni *et al.*, "Evaluation of shielding effectiveness of composite wall with a time domain discontinuous Galerkin method," *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 64, no. 2, pp. 24508–24511, 2013.
- [12] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. New York, NY, USA: Wesley, 2005.
- [13] J. P. Dunsmore, "Handbook of Microwave Component Measurements: With Advanced VNA Techniques." Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2012.
- [14] F. M. Tesche, M. Ianoz, and T. Karlsson, *EMC Analysis Methods and Computational Models*. New York, NY, USA: Wiley, 1997.

Chapitre 3

Calcul des champs induits dans les matériaux supraconducteurs

Sommaire

3.1	Introduction	86
3.2	Modélisation numérique des supraconducteurs	88
3.2.1	Loi de comportement électrique des supraconducteurs HTC	88
3.2.2	Formulations pour le calcul de champs électromagnétiques dans les supraconducteurs HTC	88
3.2.3	Linéarisation de la loi constitutive	90
3.3	Méthodes avec flux pour le calcul de champs dans les supraconducteurs	91
3.3.1	Méthode des volumes finis	92
3.3.2	Méthode de Galerkin discontinue	98
3.4	Modélisation des câbles supraconducteurs torsadés	114
3.4.1	Modèle équivalent des filaments torsadés	115
3.4.2	Réduction du modèle équivalent	120

3.1 Introduction

Avec l'évolution démographique, les besoins technologiques permettant de satisfaire les populations ont explosé. Dans les pays industrialisés on a besoin de fabriquer un nombre sans cesse croissant de dispositifs et systèmes pour les domaines tel que, le transport, les communications ou encore la santé. Malheureusement, on s'est progressivement rendu compte de la diminution des stocks de matières premières notamment celle extraites de la planète. Face à la pénurie programmée de certaines d'entre elles à cause de la raréfaction, et des difficultés d'extraction, on se tourne progressivement vers d'autres matières premières dont l'utilisation dans les systèmes passe par l'innovation technologique. Parmi ces matières premières on peut citer, les sources d'énergie telles que le vent, l'eau ou encore le soleil, et les nouveaux matériaux tels que les composites, les piézo-électriques ou encore les supraconducteurs. Dans le cas des supraconducteurs, ils ont vocation à remplacer les matériaux conducteurs, comme par exemple le cuivre, sur les aspects de transport de courant et production de champ magnétique. En effet ces matériaux présentent comme avantages, de conduire du courant avec très peu de pertes Joule, et d'être fortement diamagnétique [113].

Les premières observations de la supraconductivité ont été faites au début du 20^{ième} siècle par Kamerlingh ONNES. L'état supraconducteur s'est manifesté dans certains métaux par la disparition de la résistivité en dessous d'une certaine température appelée température critique. Durant les décennies suivant cette découverte, les températures critiques qui étaient de quelques dizaines de Kelvin n'ont cessé d'augmenter pour dépasser la centaine de Kelvins [14]. C'est cette augmentation de la température critique qui a conduit à l'essor des travaux de recherches sur ce domaine, car les perspectives d'utilisation sont plus importantes. L'innovation technologique autour de ces matériaux s'opère depuis plusieurs années, et on assiste au développement de dispositifs utilisant cette classe de supraconducteurs dits à haute température critique (HTC). On peut citer en exemple, les câbles de transport d'énergie, les limiteurs de courant, les moteurs supraconducteurs ou encore les appareils IRM avec des aimants supraconducteurs [58, 100]. Ces réalisations ont été rendues possibles grâce aux travaux de caractérisation qui ont été mis en place pour décrire les interactions de ces matériaux avec les champs électromagnétiques [44, 62]. Ceux-ci ont notamment permis de comprendre la phénoménologie de l'état supraconducteur et de proposer des lois constitutives décrivant son comportement thermo-électromagnétique [5, 15, 24].

L'introduction des matériaux supraconducteurs dans les dispositifs du génie électrique passe par la mise en place de modèles numériques permettant de décrire l'évolution des champs électromagnétiques dans l'environnement concerné, afin d'apporter des solutions pour le dimensionnement des dispositifs. Ces travaux de modélisation sont d'autant plus importants car l'expérimentation autour de ces matériaux est contrainte par les dispositifs cryogéniques nécessaires au

refroidissement du matériau en dessous de la température critique où se manifeste la supraconductivité. C'est sur cet aspect que se situent mes travaux sur les matériaux supraconducteurs. Ils portent notamment sur le développement d'outils numériques pour décrire l'interaction de ces matériaux avec les champs magnétiques. Cette interaction se manifeste par des courants induits dans le matériau lorsque celui-ci est soumis à une sollicitation extérieure comme par exemple un champ magnétique ou un courant. Les outils numériques que j'ai proposés sont principalement dédiés au calcul des champs dans ces matériaux dans le but d'évaluer les pertes et l'aimantation [56]. Ce calcul de champs se fait via la résolution des équations de Maxwell couplées aux lois constitutives du matériau.

Avec l'intérêt croissant autour de ces matériaux durant les dernières décennies, de nombreux modèles analytiques et numériques ont été proposés pour évaluer les grandeurs induites dans ces matériaux. Les premiers modèles ont été dédiés à l'étude des supraconducteurs à basse température critique dont la loi de comportement est donnée par le modèle de Bean, et ils ont consisté en la résolution de systèmes différentiels quasi-linéaires [23, 17, 72]. Avec la découverte des supraconducteurs à haute température critique qui sont caractérisés par une loi puissance, les modèles mis en place nécessitent la résolution de problèmes différentiels fortement non-linéaires. Des approches analytiques ont été proposées pour des configurations simples 1D et 2D [RI.25, 70, 73], mais plus généralement on a recours à des méthodes numériques. Les méthodes intégrales ont été implémentées pour résoudre ces équations pour des configurations 2D [20, 102], mais à cause des matrices pleines, elles ont été abandonnées au profit de la méthode des éléments finis.

C'est autour de la méthode des éléments finis que se concentrent les travaux de modélisation des supraconducteurs à haute température critique [19, 45, 78, 126]. De nombreux modèles 2D et 3D ont été proposés et des logiciels commerciaux tels que COMSOL Multiphysics et FLUX3D disposent de modules spécifiques pour la modélisation des matériaux supraconducteurs. Bien que cette approche soit efficace pour la plupart des configurations, il en existe néanmoins pour lesquels, la convergence n'est pas garantie, ou qui nécessitent des développements supplémentaires pour maintenir son efficacité. C'est le cas lorsque l'exposant de la loi puissance est élevé, il faut faire face à des oscillations numériques, ce qui nécessite de réduire considérablement le pas de temps utilisé et d'ajouter un terme résiduel constant dans la loi puissance [45]. Lorsque la configuration étudiée conduit à un très grand nombre d'inconnues, cette méthode est moins efficace à cause des opérations d'inversions matricielles très coûteuses en espace mémoire. Des techniques de compression matricielle ou la mise en place du calcul parallèle sont des solutions envisagées, mais qui demandent d'importants développements supplémentaires [6, 13, 16]. C'est pour ces raisons que la mise en place d'autres approches numériques offre des solutions alternatives à la méthode des éléments finis. C'est ce que j'ai notamment réalisé en proposant, des modèles de calculs de champs et de pertes dans les supraconducteurs utilisant, la

méthode des volumes finis, la méthode de Galerkin discontinue, et des techniques de réductions de modèle pour traiter les configurations conduisant à de grands systèmes comme les câbles supraconducteurs. Dans les sections suivantes, je vous présente les principales formulations utilisées pour la modélisation des supraconducteurs à haute température critique et mes principales contributions sur ce sujet.

3.2 Modélisation numérique des supraconducteurs

3.2.1 Loi de comportement électrique des supraconducteurs HTC

Une grande partie des travaux de modélisation des supraconducteurs à haute température critique s'appuie sur une loi constitutive décrivant le comportement électrique de ces matériaux. Celle-ci introduit, une résistivité non linéaire qui dépend de la densité de courant induite telle que $\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J})\mathbf{J}$ (3.1a), ou une conductivité non linéaire qui dépend du champ électrique tel que $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E})\mathbf{E}$ (3.1b) :

$$\rho(\mathbf{J}) = \frac{E_c}{J_c(\mathbf{B}, \theta)} \left\| \frac{\mathbf{J}}{J_c(\mathbf{B}, \theta)} \right\|^{n(\mathbf{B}, \theta) - 1} \quad (3.1a)$$

$$\sigma(\mathbf{E}) = \frac{J_c(\mathbf{B}, \theta)}{E_c} \left\| \frac{\mathbf{E}}{E_c} \right\|^{\frac{1}{n(\mathbf{B}, \theta)} - 1} \quad (3.1b)$$

avec, \mathbf{B} l'induction magnétique, θ la température, $J_c(\mathbf{B}, \theta)$ la densité de courant critique, E_c une grandeur constante communément fixée à $E_c = 1 \mu\text{V}/\text{cm}$ et $n(\mathbf{B}, \theta)$ un paramètre caractérisant les phénomènes d'activation thermique dans le matériau [15]. Lorsque ce dernier vaut $n = 1$, on est dans le cas d'un matériau à l'état normal résistif.

3.2.2 Formulations pour le calcul de champs électromagnétiques dans les supraconducteurs HTC

Lorsque les conditions qu'imposent les grandeurs critiques sont satisfaites, si on soumet un matériau supraconducteur à un champ magnétique ou lui injecte un courant, il se développe en son sein des courants induits. La description de ces courants induits et leur évaluation est nécessaire le dimensionnement des dispositifs utilisant ces matériaux. L'évaluation numérique de ces courants se fait via la résolution des équations de Maxwell auxquelles on associe la loi de comportement électrique du matériau. Pour la loi magnétique qui relie l'induction magnétique \mathbf{B} au champ magnétique \mathbf{H} , on utilise généralement celle du vide $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, avec μ_0 la perméabilité du vide.

Différentes formulations de ce problème peuvent être mise en place. Les principales formula-

tions rencontrées dans la littérature sont les suivantes :

1. *Formulation en \mathbf{H}* :

C'est la formulation la plus communément utilisée pour la modélisation 3D des matériaux supraconducteurs [19, 45, 126]. Le principal avantage vient du fait que la condition de champ magnétique imposé est directement traitée par une condition de Dirichlet non homogène. Cette formulation nécessite l'ajout d'un volume d'air autour du matériau afin de mieux prendre en compte les effets démagnétisants. Elle s'obtient en utilisant la forme résistive de la loi constitutive $\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J})\mathbf{J}$ qui devient $\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J})\nabla \times \mathbf{H}$. Elle s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times (\rho(\mathbf{J})\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

2. *Formulation en \mathbf{E}* :

Cette formulation est très peu utilisée pour la modélisation des matériaux supraconducteurs. Dans nos travaux nous avons montré qu'elle convient pour traiter les configurations sans effets démagnétisants comme par exemple un supraconducteur transportant un courant. Dans ces cas, l'ajout d'un volume d'air n'est pas nécessaire et la condition de courant injecté est transformée en une condition de Neumann non homogène qui est imposée sur directement les bords du matériau [RI.27]. Pour les configurations 3D avec effets démagnétisants, nous avons montré que cette formulation peut être utilisée dans le cas de géométries simples dont on connaît les coefficients démagnétisants [RI.17]. Cette formulation s'établit en utilisant la forme conductive de la loi constitutive $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E})\mathbf{E}$. Elle s'obtient en appliquant l'opérateur rotationnel sur l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\mu_0 \frac{\partial [\sigma(\mathbf{E})\mathbf{E}]}{\partial t} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

3. *Formulation en \mathbf{J}* :

C'est la formulation qui devrait être résolue lorsqu'on s'intéresse à la densité de courant induite dans ce matériau. Malheureusement, celle-ci n'est presque jamais utilisée car la mise en place des conditions aux bords est un obstacle considérable. Cette formulation s'obtient en introduisant la forme résistive de la loi constitutive dans la formulation en \mathbf{E} (3.3) :

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \nabla \times \nabla \times (\rho(\mathbf{J})\mathbf{J}) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

4. *Formulation en $\mathbf{A} - \mathbf{V}$* :

C'est l'une des formulations les plus utilisées pour la modélisation des supraconducteurs [1, 89, 105, 116]. Elle présente l'avantage de pouvoir être facilement couplée aux équations de circuits pour le calcul des pertes. Elle nécessite comme la formulation en \mathbf{H}

l'ajout d'un volume d'air pour la prise en compte des effets démagnétisants. Le principal inconvénient est qu'il y a une inconnue supplémentaire par rapport à la formulation en \mathbf{H} . Pour construire cette formulation on utilise les relations exprimant les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} en fonction du potentiel scalaire \mathbf{V} et du potentiel vecteur \mathbf{A} : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \mathbf{V}$. Elle s'obtient, avec la forme conductive de la loi constitutive et l'hypothèse selon laquelle les courants ne sortent pas du matériau $\nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$. Cette formulation est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{E}) \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \mathbf{V} \right) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0 \\ \nabla \cdot \left[\sigma(\mathbf{E}) \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \mathbf{V} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

5. Formulation en $\mathbf{T} - \phi$:

Cette formulation est très proche de la formulation en \mathbf{H} , et est utilisée dans quelques travaux de modélisation [107, 117]. Elle s'établit avec la définition des grandeurs \mathbf{T} , ϕ , $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \nabla \phi$. Elle s'obtient avec la forme résistive de la loi constitutive et l'hypothèse d'absence de charges magnétique $\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial [\mathbf{T} - \nabla \phi]}{\partial t} - \nabla \times (\rho(\mathbf{J}) \nabla \times \mathbf{T}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{T} - \Delta \phi = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Chacune de ces formulations donne lieu à un problème différentiel très non-linéaire. Cette non-linéarité est portée, par l'opérateur spatial lorsque la forme résistive $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$ de la loi constitutive est utilisée (formulations \mathbf{H} et $\mathbf{T} - \phi$), et par l'opérateur temporel lorsque c'est la forme conductive $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ de la loi constitutive qui est utilisée (formulations \mathbf{E} et $\mathbf{A} - \mathbf{V}$). Les modèles numériques développés pour le calcul des champs induits dans les supraconducteurs doivent faire face aux nombreux problèmes de convergence introduits par ces non linéarités. Dans mes développements numériques réalisés autour des formulations \mathbf{E} et \mathbf{H} , je propose d'utiliser une linéarisation de la loi constitutive pour améliorer la convergence.

3.2.3 Linéarisation de la loi constitutive

Dans nos développements, nous avons travaillé avec une loi constitutive dont les principaux paramètres sont constants, c'est à dire $J_c(\mathbf{B}, \theta) = \mathbf{J}_c$ et $n(\mathbf{B}, \theta) = \mathbf{n}$. Pour prendre en compte les dépendances en champ magnétique \mathbf{B} et température θ , il est nécessaire d'introduire des lois d'évolutions de ces paramètres, comme par exemple le modèle de Kim [24], et de combiner la résolution du problème magnétique à celle de l'équation de la chaleur. Dans ce cas, les para-

mètres J_c et n sont calculés explicitement à chaque pas de temps en utilisant les solutions du pas de temps précédent [RI.6].

La linéarisation de la loi constitutive proposée est une approximation au premier ordre de la relation $\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J})\mathbf{J}$. Nous la présentons sous la forme

$$\mathbf{E}^k = \mathbf{E}^{k-1} + (\mathbf{J}^k - \mathbf{J}^{k-1}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{J}} \quad (3.7)$$

avec k l'indice d'itération du processus de la linéarisation. Les champs \mathbf{E} et \mathbf{J} étant vectoriels, il est nécessaire de définir l'opérateur de dérivation vectoriel $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{J}}$. Nous avons proposé d'évaluer cet opérateur par un tenseur d'ordre 2 dont les termes sont les dérivées des composantes du champ électrique $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ par rapport aux composantes de la densité de courant $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial J_1} & \frac{\partial E_2}{\partial J_1} & \frac{\partial E_3}{\partial J_1} \\ \frac{\partial E_1}{\partial J_2} & \frac{\partial E_2}{\partial J_2} & \frac{\partial E_3}{\partial J_2} \\ \frac{\partial E_1}{\partial J_3} & \frac{\partial E_2}{\partial J_3} & \frac{\partial E_3}{\partial J_3} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La résolution de la formulation en \mathbf{H} en utilisant cette linéarisation a été implémentée dans une méthode des éléments finis. Elle permet une meilleure convergence notamment pour les cas où l'exposant de la loi puissance est grand. Ces résultats font l'objet d'un "benchmark" dans l'open source ONELAB développé par l'équipe du professeur Christophe Geuzaine de l'université de Liège en Belgique (<https://gitlab.onelab.info/doc/models/wikis/Superconductors>).

3.3 Méthodes avec flux pour le calcul de champs dans les supraconducteurs

L'approche des éléments finis est largement utilisée pour la modélisation des supraconducteurs. Elle présente néanmoins des points faibles tels que la consommation d'espace mémoire et le mauvais conditionnement des matrices à cause de la forte non-linéarité des équations. Il est alors important d'explorer d'autres méthodes notamment celles qui se sont avérées efficaces dans d'autres domaines, notamment en mécanique des fluides. Des travaux sur plusieurs méthodes ont été réalisés, comme par exemple, sur la méthode des différences finis et sur une méthode stochastique, qui ont été implémentées pour traiter des configurations 2D [11] [77]. Ma contribution au développement d'outils pour le calcul de champs dans ces matériaux a été de travailler sur l'utilisation des méthodes à "flux". J'ai notamment implémenté une méthode

des volumes finis et une méthode de Galerkin discontinue pour le calcul de la densité de courant induite dans les supraconducteurs.

3.3.1 Méthode des volumes finis

Mes travaux de thèse sur la modélisation des matériaux supraconducteurs se sont articulés autour du développement d'une méthode de volumes finis pour le calcul de la densité de courant induite dans le cas de configurations 2D [56]. Ces travaux ont montré que cette méthode est bien adaptée pour la résolution du problème de diffusion non-linéaire que l'on obtient lorsque le champ électrique n'a qu'une composante non nulle et satisfait à la condition $\text{div}\mathbf{E} = 0$. Ce problème est donné par la formulation en \mathbf{E} et s'écrit

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} - \Delta E = 0 \text{ in } \Omega \\ \nabla E \cdot \boldsymbol{\nu} = \nu_x \frac{\partial B_y}{\partial t} - \nu_y \frac{\partial B_x}{\partial t} \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

avec, E et J les inconnues scalaires du problème, $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$ le champ magnétique appliqué, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$ la normale extérieure au bord. Les configurations traitées sont celles de supraconducteurs massifs transportant du courant ou soumis à un champ magnétique transverse. Ces excitations sont prises en compte dans le modèle via une condition de Neumann non homogène qui est directement appliquée aux bords du matériau.

Soit $\Omega = \bigcup D$, un maillage du domaine de calcul en cellules élémentaires. Pour établir les équations algébriques à résoudre, on intègre l'équation différentielle sur chaque cellule D_i en utilisant le théorème de la divergence, ce qui donne pour le système (3.9) :

$$\mu_0 \int_{D_i} \frac{\partial J_i}{\partial t} dD_i - \int_{\Gamma} \nabla E_i \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma_i \quad (3.10)$$

avec $\Gamma_i = \partial D_i$, J_i et E_i respectivement la densité de courant et le champ électrique sur la cellule D_i et $\boldsymbol{\nu}$ la normale extérieure à Γ_i . L'intégrale sur le bord Γ_i est remplacée par une expression de flux numérique qui dépend de la solution sur les cellules voisines D_j et prend en compte les propriétés de continuité :

$$\int_{\Gamma_i} \nabla E_i \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma_i \approx \sum_{D_j} |D_i \cap D_j| \Phi_{i,j} \quad (3.11)$$

avec $|D_i \cap D_j|$ l'intersection entre les cellules D_i et D_j et $\Phi_{i,j}$ le flux numérique à construire. Dans la méthode des volumes finis construite, les expressions de flux numériques utilisées sont obtenues à partir des coefficients de la matrice de rigidité issue de la discrétisation de l'opérateur Laplacien par une méthode des éléments finis nodaux sur un maillage dual (Figure.3.1).

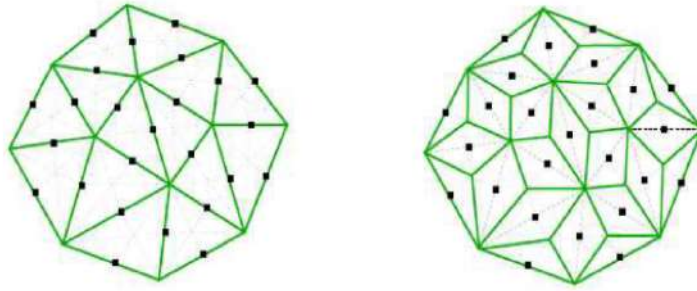


FIGURE 3.1 – (gauche) maillage éléments finis avec les noeuds au milieu des arêtes d’une triangulation de Ω , (droit) maillage volumes finis où les cellules sont construites autour des noeuds du maillage éléments finis Ω

L’équation algébrique à résoudre pour une cellule D_i à chaque pas de temps est la suivante :

$$\mu_0 |D_i| \frac{J_i^p - J_i^{p-1}}{\delta t} - \sum_{D_j} S_{i,j} (E_i^p - E_j^p) = 0 \quad (3.12)$$

avec J_i^p et E_i^p respectivement la densité de courant et le champ électrique sur la cellule D_i à l’instant t_p . La linéarisation proposée pour traiter la non-linéarité donnée par la relation (3.7) est introduite dans cette équation algébrique et une méthode de Newton Raphson est appliquée. On a ainsi pu traiter des cas où l’exposant de la loi puissance $n = 200$.

Ce travail a fait l’objet de publications dont celle-ci après **A 2-D Robust FE-FV Mixed Method to Handle Strong Nonlinearities in Superconductors** publiée dans le journal *IEEE Transactions on Magnetics*. On s’est appuyé sur ce modèle numérique pour mettre en évidence certains éléments sur la caractérisation de ces matériaux notamment celui de l’influence de la vitesse de variation du champ magnétique appliqué sur les pertes et l’aimantation des ces matériaux [RI.24].

A 2-D Robust FE-FV Mixed Method to Handle Strong Nonlinearities in Superconductors

Abelin Kameni¹, Smail Mezani¹, Frédéric Sirois², Denis Netter¹, Jean Lévêque¹, and Bruno Douine¹

¹GREEN-UHP-INPL, Faculté des Sciences, 54506, BP. 239, Vandoeuvre-lès-Nancy, France

²Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, QC H3C 3A7, Canada

A robust numerical method based on 2-D mixed finite-elements-finite volumes (FE-FV) allows the solution of diffusion problems in superconducting (SC) materials. The proposed approach handles the strong nonlinearity of the E(J) constitutive power law of high-temperature superconductors (HTS). The method is tested for a SC cylinder submitted to a sinusoidal transport current or to a transverse sinusoidal external field. The current density distributions as well as the AC losses are computed. Comparisons to a FE analyses that use the magnetic field as state variable show the validity of the proposed approach. It can be seen that the proposed method is very stable even for large n-values for which the FE method does not converge.

Index Terms—Finite elements, finite volumes, superconducting materials.

I. INTRODUCTION

THE CONSTITUTIVE power law is widely used to characterize high temperature superconductors. It is written as

$$J = J_c(E/E_c)^{1/n} \quad (1)$$

where J is the current density, E the electric field, E_c the critical electric field, J_c the critical current density, and n the power law exponent. $n = 1$ corresponds to a normal conductor and $n = \infty$ represents the critical state model suggested by Bean.

Finite-element methods are widely used to compute the magnetic field distribution in superconductors using different formulations [1], [2]. Unfortunately, the use of (1) leads to numerical oscillations and convergence problems for large n -values (typically, for $n > 50$).

In order to solve the nonlinear diffusion-convection-reaction equations in porous media, a coupled finite-elements-finite volumes (FE-FV) method has been successfully used [3]. In this paper, we propose to use a similar approach to solve the electric field diffusion equation in HTS materials. Applications to a superconducting cylinder under transport current or submitted to an external magnetic field are considered. It has been shown that the proposed approach is robust even for large n -values for which conventional approaches based on FE methods do not converge.

II. PRINCIPLE OF THE METHOD

We set $u = E/E_c$, $\beta(u) = J/J_c$, and $c = \mu_0 J_c/E_c$.

The superconductor has a vacuum magnetic permeability μ_0 .

In 2-D problems, J and E are scalar quantities having only one component in the z direction. The SC domain is noted Ω and its external boundary Γ . Using Maxwell equations and the constitutive law (1), the problem to solve is

$$\begin{cases} c \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = C_b(t) & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

Manuscript received December 21, 2009; revised February 11, 2010; accepted February 16, 2010. Current version published July 21, 2010. Corresponding author: S. Mezani (e-mail: smail.mezani@green.uhp-nancy.fr).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2010.2044025

The boundary condition on Γ results from the variation of the magnetic field according to Faraday's law

$$C_b(t) = E_c^{-1}(\partial B_y/\partial t - \partial B_x/\partial t) \cdot \vec{n} \quad (3)$$

B_x , B_y are, respectively, the x , y components of the flux density and \vec{n} is the outward normal vector on Γ .

The discretization methods (FEM or FVM) are applied to the weak formulation of (2) in the time interval $[t_p, t_{p+1}]$

$$\int_{\Omega} c \frac{\beta(u^{p+1}) - \beta(u^p)}{\Delta t_p} \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u^{p+1} \varphi d\Omega = 0 \quad (4)$$

where φ is a test function, u^p is the solution at instant t_p , and Δt_p the time step.

The method exposed here is based on the FE-FV coupling principle. It exploits the duality of the FE and FV meshes as well as the footbridge operators between FE and FV approximation spaces, and combines FE and FV discretizations terms of (4).

A. FE-FV Coupling Principle

The FE-FV coupling is widely used in fluid mechanics to solve convection-diffusion type equations. The computation procedure consists in successively solving the diffusion equation on the FE mesh and the convection equation on the FV cell. In so doing, it is necessary to calculate the projection of the FE solution on the FV mesh and *vice versa*.

Starting from a solution u^p at time t_p , the solution u^{p+1} at time t_{p+1} using the FE-FV coupling scheme is determined as follows:

- i) calculate the solution $u_{p,1}$ at t_p of the FV approach;
- ii) determine its projection $u_{p,2}$ on the FE mesh;
- iii) use $u_{p,2}$ to compute the solution $u_{p,3}$ at t_{p+1} of the FE formulation;
- iv) the needed solution u_{p+1} is the projection of $u_{p,3}$ on the FV mesh.

The problem treated here is a convection-diffusion equation. The objective is to combine the advantages of each method (FE and FV) in a single numerical scheme to solve the problem given in (2). In so doing, we have to ensure that:

- the two approaches give the same solution;
- the diffusion on a FE node is equivalent to the convection on the corresponding FV cell.

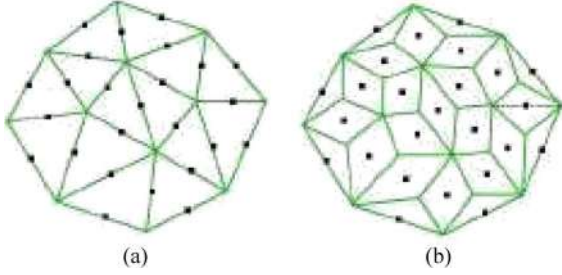


Fig. 1. Association of each node of the FE mesh to the cells of the FV mesh: we link the centers of gravity of two contiguous triangles through the vertex of their common edge. (a) The nodes N_i correspond to the middle of the edges. (b) The nodes N_i correspond to the center of the cells D_i .

B. Footbridge Operators

Let u^{FE} and u^{FV} be the respective solutions of the FE and FV approaches. The footbridge operators $\pi_{\text{EV}}(\pi_{\text{EV}}(u^{\text{FV}}) = u^{\text{FE}})$ and $\pi_{\text{VE}}(\pi_{\text{VE}}(u^{\text{FE}}) = u^{\text{FV}})$ between the FE and the FV approximation spaces are well described in [4]. They are defined as

$$\int_{\Omega} |\pi_{\text{EV}}(u) - u|^2 d\Omega = \min_{u \in \text{FE}} \int_{\Omega} |w - u|^2 d\Omega \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} \pi_{\text{VE}}(u) \varphi d\Omega = \int_{\Omega} u \varphi d\Omega. \quad (6)$$

Let \mathfrak{S} a regular triangulation of Ω and \mathfrak{V} a FV partition of Ω . When \mathfrak{V} is obtained from \mathfrak{S} , the duality between the FE and FV meshes is described by the identification of each FE node to each FV cell, Fig. 1. The basis functions of the FV approximation space are obtained from the indicatrix functions of each cell of the FV mesh. We remark that each first order FE base functions φ_i constructed on the nodes N_i of the FE triangulation can be prolonged on the corresponding FV cell.

In the case of the Fig. 1, it has been proved in a previous paper [4] that the footbridge operators ensure the equality $u^{\text{FE}} = u^{\text{FV}}$.

C. Numerical Scheme

The numerical discretization of the Laplacian operator is well established using the FE method whereas it is not adapted to the strong nonlinearity of the β term. Since β is continuous, its mean value is well defined so we use the FV method to deal with the nonlinearity

$$\int_D \frac{\beta(u^{p+1}) - \beta(u^p)}{\Delta t_p} dD = \frac{\beta^{p+1} - \beta^p}{\Delta t_p} D \quad (7)$$

where D is the surface of a FV cell and β^p is the mean value of $\beta(u^p)$.

Hence, using the footbridge operators, we combine FE-FV methods to take advantage of both of them in the same numerical scheme.

In the FV method, the flux $\Phi_{i,j}$ between two adjacent cells i and j must be continuous. The mixed numerical scheme is justified if the diffusion on a FE node is equal to the convection in the FV cell. This leads to

$$\underbrace{\int_{D_i} \text{div}(\vec{\nabla} u) dD_i}_{\text{FV}} = \underbrace{\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \varphi_i d\Omega}_{\text{FE}}. \quad (8)$$

To ensure the equality in (8), the $\Phi_{i,j}$ are constructed from the stiffness matrix coefficient $S_{i,j}$ of the FE discretization as follows:

$$\sum_{j \neq i} |D_i \cap D_j| \Phi_{i,j} = - \sum_j S_{i,j} u_j \quad (9)$$

where $s_{i,j} = \sum_{K \in \mathfrak{S}} \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dK$.

If we define $S_{i,i} = - \sum_{j \neq i} S_{i,j}$, the local conservation property of the FV formulation is ensured.

The discrete problem is formed using (7) and (9). For the internal FV cells, the discrete problem is written as

$$c \frac{\beta_i^{p+1} - \beta_i^p}{\Delta t_p} D_i = \sum_j S_{i,j} u_j^{p+1}. \quad (10)$$

and for the cells on the boundary Γ , we write

$$c \frac{\beta_i^{p+1} - \beta_i^p}{\Delta t_p} D_i = \sum_j S_{i,j} u_j^{p+1} + |\Gamma_i| C_b^{p+1}. \quad (11)$$

The existence of the discrete solution is proved by the saddle-point theorem. The numerical computation uses the unknowns $v_i^{p+1} = \beta(u_i^{p+1})$. Since β^{-1} is continuous and differentiable, we can use a Newton–Raphson algorithm

$$v_i^{p,k} = \beta^{-1} \left(v_i^{p,k-1} \right) + (\beta^{-1})' \left(v_i^{p,k-1} \right) \times \left(v_i^{p,k} - v_i^{p,k-1} \right). \quad (12)$$

III. APPLICATION EXAMPLES

We consider a superconducting cylinder having a radius $R = 1.5$ mm and characterized by $J_c = 14.15$ A/mm², $E_c = 10^{-1}$ V/m. Two values of n are considered; $n = 25$ and $n = 200$. The first value is typical for high temperature superconductors (BiSCCO or YBCO materials) and the second corresponds to low temperature superconductors (NbTi for example). For this last case, the Bean model can be used to validate the proposed method.

A. Cylinder Under Self Field (Transport Current)

The cylinder carries a sinusoidal transport current $i(t) = I_{\text{max}} \cdot \sin(2\pi f t)$, $I_{\text{max}} = 40.8$ A. Two frequency values are considered, $f = 0.5$ Hz and $f = 1$ kHz.

B_x, B_y used in the boundary condition (3) are obtained by Ampere's theorem.

Fig. 2 presents the current density distribution on the Ox axis at $t = T/4$ (T is the period) for the two considered frequencies. A comparison to the results issued from a purely FE formulation [2] where the magnetic field is used as state variable is also given. A good agreement is observed.

We have also compared in Fig. 3, the instantaneous self field losses obtained by the FE-FV method and those issued from the FE method. Once again, satisfactory results are obtained. These results validate the proposed FE-FV approach for weak n values.

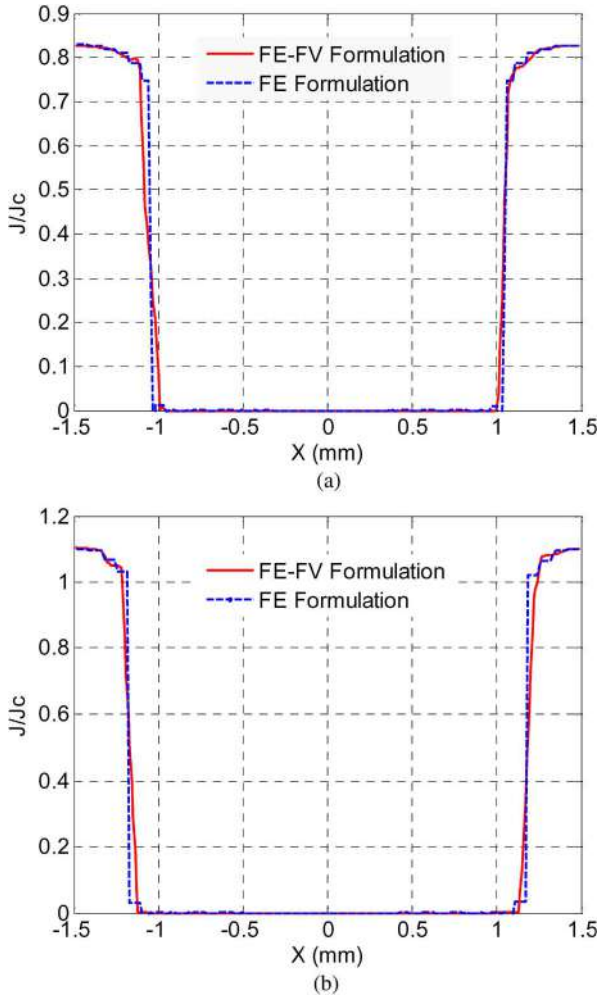


Fig. 2. Comparison of current density profiles for $n = 25$. (a) $f = 0.5$ Hz at $t = T/4 = 0.5$ s. (b) $f = 1$ kHz at $t = T/4 = 0.25$ ms.

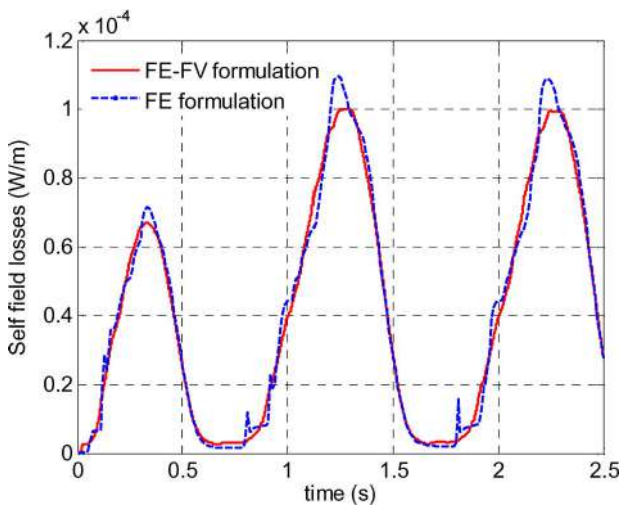


Fig. 3. Comparison of instantaneous self field losses for $n = 25$, $f = 0.5$ Hz.

In the case where $n = 200$, the FE method does not converge. The average AC losses obtained by our method are 0.024 W/mm. The Bean formula [6] gives 0.028 W/mm which also validate the FE-FV method in the case of large n values.

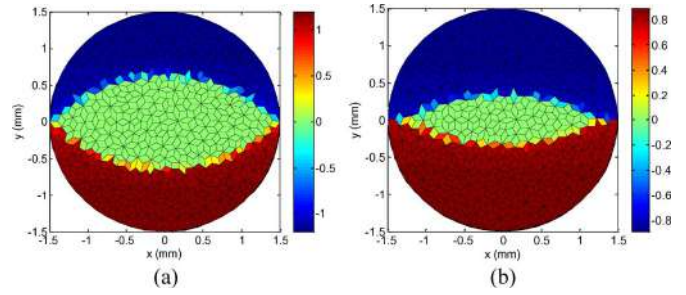


Fig. 4. Current density distribution J/J_c at $t = T/4$ for $n = 25$ ($B_{max} = 15$ mT). (a) $f = 1$ kHz. (b) $f = 0.5$ Hz.

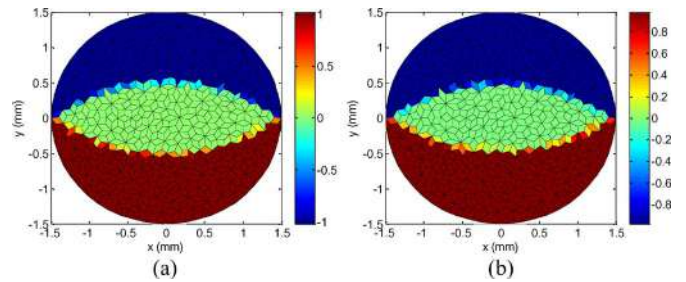


Fig. 5. Current density distribution J/J_c at $t = T/4$ for $n = 200$ ($B_{max} = 15$ mT). (a) $f = 1$ kHz. (b) $f = 0.5$ Hz.

B. Cylinder Submitted to an External Magnetic Field

The cylinder is submitted to a sinusoidal transverse magnetic field in the x direction, $b_r(t) = B_{max} \cdot \sin(2\pi ft)$. Two frequency values are considered, $f = 0.5$ Hz and $f = 1$ kHz.

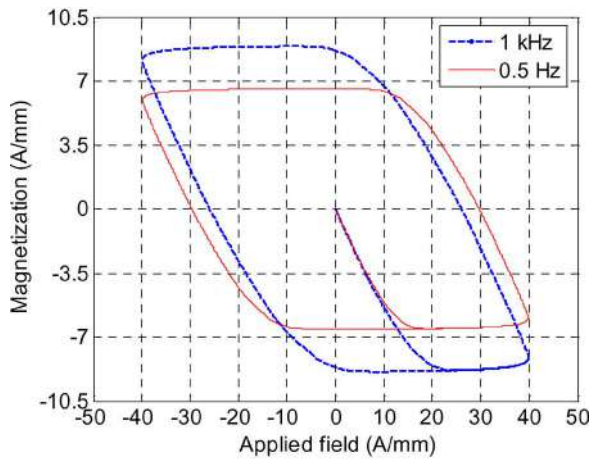
The current density distribution in the cylinder is presented in Fig. 4 for $n = 25$ and Fig. 5 for $n = 200$. The results at $t = T/4$ (when the applied field reaches its maximum value) and $n = 25$ show that the penetration of the current density at $f = 0.5$ Hz is more important than the penetration at $f = 1$ kHz. However, the current density reaches a value $J/J_c = 0.83$ for $f = 0.5$ Hz and $J/J_c = 1.3$ for $f = 1$ kHz. This shows the influence of the speed variation (i.e., the frequency) of the applied field.

For $n = 200$, it can be seen that the penetration of the current density is almost the same for both frequencies. This is in accordance with the Bean's model for which the speed variation of the applied field does not play any role when $n \rightarrow \infty$.

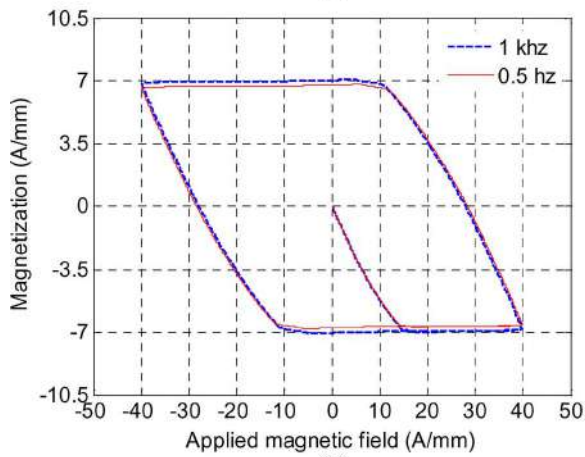
Fig. 6 presents the magnetization versus applied field. In the simulation, B_{max} is equal to 50 mT, a value for which the cylinder is in a complete penetration state.

For $n = 25$, Fig. 6(a), the maximum value of the magnetization is higher for $f = 1$ kHz than the value obtained at $f = 0.5$ Hz. Again, this shows the influence of the speed variation (i.e., the frequency) of the applied field.

For $n = 200$, the influence of the frequency is practically inexistent. The maximum value of the magnetization given by the Bean model can be computed as $M_{max} = J_c \times R/3$, which leads to a value $M_{max} = 7.07$ A/mm for the considered example. Using the proposed method, Fig. 6(b), we obtain $M_{max} = 6.95$ A/mm. Again, this validates our method in the case of large n values.



(a)



(b)

Fig. 6. Magnetization against applied field ($B_{\text{max}} = 50 \text{ mT}$). (a) $n = 25$. (b) $n = 200$.

IV. CONCLUSION

In this paper, we proposed a mixed finite elements-finite volumes numerical scheme to solve the 2-D scalar diffusion of the electric field in superconducting materials. It has been shown that the proposed approach can successfully handle the strong nonlinearity of the E-J power law. Comparisons to purely FE analyses show the validity of our method in the case of weak n -values. In the case of large n -values for which the FE method does not converge, it has been shown via the comparisons to Bean's model that the proposed approach is very robust to treat the strong nonlinearities.

REFERENCES

- [1] E. Vinot, G. Meunier, and P. Tixador, "Different formulations to model superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1226–1229, Jul. 2000.
- [2] R. Brambilla, F. Grilli, and L. Martini, "Development of an edge-element model for AC losses computation of high-temperature superconductors," *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 19, pp. 1–9, 2006.
- [3] R. Eymard, D. Hilhorst, and M. Vohralik, "A combine finite volume-nonconforming/mixed-hybrid finite element scheme for degenerate parabolic problems," *Numer. Math.*, vol. 105, pp. 73–131, 2006.
- [4] F. Pascal and J. M. Ghidaglia, "Footbridge between finite volumes and finite elements with applications to CFD," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 37, no. 8, pp. 951–986, 2001.
- [5] K. Kajikawwa, Y. Fukuda, H. Moriyama, T. Hayashi, M. Iwakuma, and K. Funaki, "Frequency dependence of AC magnetization in stacked Bi-2223 Ag-sheathed tapes," *Physica C*, vol. 382, pp. 122–126, 2002.
- [6] W. J. Carr, Jr., *AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors*. London, U.K.: Taylor & Francis, 2001.

3.3.2 Méthode de Galerkin discontinue

La méthode de Galerkin discontinue est de plus en plus employée dans des travaux de modélisation en électromagnétisme. Son utilisation pour la modélisation des matériaux supraconducteurs a été introduite grâce à nos travaux [RI.6, RI.9, RI.17, RI.23] et de nouveaux développements ont récemment été proposés [26]. Cette méthode étant bien adaptée à la mise en place du calcul parallèle et à l'utilisation des éléments d'ordre élevé, offre plusieurs possibilités d'amélioration des modèles numériques autour de ces matériaux. Ainsi, les coûts de simulation peuvent être réduits grâce au calcul parallèle et la précision des résultats peut être améliorée grâce à l'utilisation des éléments d'ordre élevé. Nous avons mis en place cette méthode pour la résolution des formulations en \mathbf{E} et \mathbf{H} données respectivement par les relations (3.3) et (3.2).

Résolution de la formulation électrique

Dans mes travaux de thèse j'ai implémenté une méthode des volumes finis pour la résolution de la formulation en \mathbf{E} pour des configurations 2D où il n'y a pas de champs démagnétisants et où l'inconnue du problème n'a qu'une composante non-nulle. Dans le cas plus général, l'inconnue est vectorielle et les effets démagnétisants doivent être pris en compte.

Nous avons proposé d'étendre les travaux de thèse, à des cas où le champ électrique \mathbf{E} a ses trois composantes non-nulles. Pour cela, nous avons supposé que le problème vectoriel satisfait par \mathbf{E} (3.3) est la superposition de trois équations scalaires satisfaites par les composantes (E_1, E_2, E_3). Pour chacune des inconnues E_i , nous avons construit une condition au bord de type Neumann non homogène en utilisant un développement explicite de la relation de Maxwell-Faraday [RI.23]. Le système pour chacune de composante est de la forme :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial J_i}{\partial t} - \Delta E_i = S_i & \text{in } \Omega \\ \nabla E_i \cdot \mathbf{v} = f \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{E} \right) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $i \in \{1, 2, 3\}$, S_i est la i ème composante de $\text{grad}(\text{div}\mathbf{E})$, et f une fonction qui dépend de la variation du champ magnétique total et des solutions E_i calculées au pas de temps précédent. Cette fonction représente le flux au bord qui est imposé directement sur le matériau. Pour éviter d'avoir à ajouter un volume d'air autour du matériau pour prendre en compte les effets démagnétisants, nous avons proposé d'utiliser la relation qui donne le champ démagnétisant en fonction de l'aimantation et les coefficients démagnétisants. Ce champ démagnétisant est calculé à chaque itération et est introduit dans les conditions aux bords. Cette approche pour prendre en compte les effets démagnétisants est uniquement utilisable pour des géométries dont on connaît les coefficients démagnétisants [RI.17].

La discrétisation par la méthode Galerkin discontinue du système (3.13) s'appuie sur la formulation faible établie sur chaque élément K du maillage $\Omega = \bigcup K$:

$$\int_K \mu_0 \frac{\partial J_i}{\partial t} \varphi dK - \int_K \nabla E_i \cdot \nabla \varphi dK - \int_{\Gamma_K} \nabla E_i \cdot \nu \varphi d\Gamma_K = \int_K S_i \varphi dK \quad (3.14)$$

Elle consiste à appliquer une approche éléments finis à valeurs nodales pour discrétiser la formulation faible sur chaque élément K (3.14) en utilisant des expressions de flux numériques pour remplacer les intégrales de bords comme dans une méthode des volumes finis. Les expressions de flux numériques adoptées pour ce système, contiennent des termes de pénalités permettant de satisfaire aux propriétés de continuité. Dans notre travail, nous avons implémenté les expressions de flux numériques issues, de la méthode de pénalité intérieure symétrique (Symmetric Interior Penalty method - SIP) et de la méthode de pénalité intérieure non-symétrique (Non-symmetric Interior Penalty method - NIP), dont les expressions sont :

$$\nabla E_i \cdot \nu \longrightarrow \begin{cases} \{\nabla E_i\} \cdot \llbracket \varphi \rrbracket \nu + \alpha \llbracket E_i \rrbracket \llbracket \varphi \rrbracket & \text{(NIP)} \\ \llbracket \nabla E_i \rrbracket \cdot \{\varphi\} \nu + \{\nabla E_i\} \cdot \llbracket \varphi \rrbracket \nu + \alpha \llbracket E_i \rrbracket \llbracket \varphi \rrbracket & \text{(SIP)} \end{cases} \quad (3.15)$$

où α est le coefficient de pénalité, $\{\bullet\}$ et $\llbracket \bullet \rrbracket$ désignent respectivement la fonction moyenne et la fonction saut à l'interface.

Ce travail a fait l'objet de deux publications **Discontinuous Galerkin Method for Computing Induced Fields in Superconducting Materials** et **A 3-D Semi-Implicit Method for Computing the Current Density in Bulk Superconductors** publiées dans *IEEE Transactions On Magnetics*.

Discontinuous Galerkin Method for Computing Induced Fields in Superconducting Materials

A. Kameni^{1,2}, J. Lambrechts³, J.-F. Remacle³, S. Mezani⁴, F. Bouillault², and C. Geuzaine¹

¹Université de Liège, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Montefiore Institute, Liège 91192, Belgium

²Laboratoire de Génie Electrique de Paris, Gif-sur-yvette 91192, France

³Université Catholique de Louvain, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics, Louvain-la-Neuve B-1348, Belgium

⁴Groupe de Recherche en Electronique et Electrotechnique de Nancy, Vandoeuvre-la-Nancy 54506, France

A discontinuous Galerkin method is proposed for computing the current density in superconductors characterized by a constitutive power law between the current density and the electric field. The method is formulated to solve the nonlinear diffusion problem satisfied by the electric field, both in the scalar and 2-D vectorial case. Application examples are given for a superconducting cylinder subjected to an external magnetic field. Results are compared to those given by the mixed finite-element/finite-volume method and those obtained using a standard finite-element software. Efficiency and robustness of the approach are illustrated on an example where the exponent in the power law is spatially dependent.

Index Terms—Discontinuous Galerkin method, finite-element method, finite-volume method, nonlinear diffusion, superconductors.

I. INTRODUCTION

THE constitutive power laws $E - J$ and $J - E$ are widely used to characterize high temperature superconductors. They are written as

$$\frac{\vec{J}}{J_c} = \left\| \frac{\vec{E}}{E_c} \right\|^{\frac{1}{n}-1} \frac{\vec{E}}{E_c} \quad (1)$$

$$\frac{\vec{E}}{E_c} = \left\| \frac{\vec{J}}{J_c} \right\|^{n-1} \frac{\vec{J}}{J_c} \quad (2)$$

where \vec{J} is the current density, \vec{E} the electric field, E_c the critical electric field, J_c the critical current density, and n the power law exponent. The case $n = 1$ corresponds to a normal conductor, while $n = +\infty$ represents the critical state model suggested by Bean [1]. Several numerical methods have been proposed to solve nonlinear diffusion problems resulting from Maxwell's equations [2]–[5]. Their results are satisfying when n is uniform and sufficiently small. Few of them are suited when n is large, and models where n locally varies are uncommon.

In this paper, we present a Discontinuous Galerkin (DG) method for computing induced fields in superconductors. We work on solving the nonlinear diffusion problem in terms of the electric field in order to determine the current density when n is large or locally varies. DG methods are well suited to treat discontinuous forms and use a piecewise high-order polynomials basis for reducing spurious oscillations. In addition, they are naturally well adapted for parallel computing.

Manuscript received July 07, 2011; revised October 05, 2011; accepted October 21, 2011. Date of current version January 25, 2012. Corresponding author: C. Geuzaine (e-mail: cgeuzaine@ulg.ac.be).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2011.2173664

II. THE DIFFERENTIAL SYSTEM

In a two-dimensional setting where the magnetic induction depends only on two space variables ($\vec{B} = (B_x, B_y)$), the electric field \vec{E} and current density \vec{J} have a single nonzero component and can thus be treated as scalar fields E and J . We set $u = E/E_c$, $\beta(u) = u^{1/n} = J/J_c$, and $c = \mu_0 J_c / E_c$. The superconductor sample has a vacuum magnetic permeability μ_0 . Denoting the superconductor domain by Ω and its border by $\partial\Omega$, Maxwell's equations and the constitutive law (1) lead to the following nonlinear diffusion problem:

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \frac{1}{c} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} = C_b(t) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

The system is established with a zero initial condition and the boundary condition on $\partial\Omega$ results from Faraday's law:

$$C_b(t) = E_c^{-1} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) \cdot \vec{\nu} \quad (4)$$

where $\vec{\nu}$ is the outward normal vector.

III. DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD

Let us consider a triangulation $\mathcal{T}_h = \bigcup K$ of the domain Ω . The DG approach combines discretization tools of finite-element (FE) and finite-volume (FV) methods. It consists in solving on each K the weak formulation of the system (3):

$$c \int_K \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} \varphi dK - \int_K \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \varphi dK - \int_{\Gamma} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \varphi d\Gamma = 0 \quad (5)$$

where φ is a test function and $\Gamma = \partial K$ is an interface between two elements of \mathcal{T}_h or a part of $\partial\Omega$.

A. FE Discretization on Each Element

On each triangle $K \in \mathcal{T}_h$ a finite-element approximation space is defined. Its basis functions are Lagrange polynomials

of degree p . The number of nodes on K is given by $(1/2)(p+1)(p+2)$. The discrete solution is written as

$$u^K = \sum_j u_j^K \varphi_j^K. \quad (6)$$

with u_j^K its value at node j . Since β is a Lipschitz function, we assume that

$$\beta(u^K) = \sum_j \beta(u_j^K) \varphi_j^K. \quad (7)$$

The elementary mass matrix M^K is determined from the L^2 scalar product:

$$M_{ij}^K = \int_K \varphi_i^K \varphi_j^K dK \quad (8)$$

and the global mass matrix M is block diagonal.

B. Flux Term on the Interface Between Two Elements

As in an FV method, the interface term $\int_{\Gamma} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \varphi d\Gamma$ is treated by a numerical flux F , which verifies $F^{K,L} = -F^{L,K}$, where K and L are neighboring elements. Its construction needs the following functions at the interface $K \cap L$: the mean value

$$\{u\} = \frac{u^L + u^K}{2} \quad (9)$$

and the jump

$$[|u|] = u^L - u^K. \quad (10)$$

Many expressions of F have been proposed in the case of the Laplace operator. We choose the expression of F based on the Non-symmetric Interior Penalty method (NIP). The NIP method consists of introducing a penalty term $\int_{\Gamma} \theta [u] [|\varphi|] d\Gamma$, in order to guarantee continuity of u and $\vec{\nabla} u$ at the interface [6]. The numerical flux is given by

$$F \rightarrow \int_{\Gamma} \{\vec{\nabla} u\} \cdot [|\varphi|] \vec{\nu} d\Gamma + \int_{\Gamma} \theta [u] [|\varphi|] d\Gamma \quad (11)$$

where θ is a positive parameter.

C. The Discrete Problem

Rules for evaluating the different terms of the weak formulation (5) exploit properties of mesh parametrization also called "mapping". The mapping is based on a bijective function Ψ such as $\Psi(x, y) = (\xi, \eta)$, which allows to transform the physical space (x, y) into a (reference) parametric space (ξ, η) [7] (see Fig. 1). The basis functions in the parametric space are the linear combinations of $\xi^\alpha \eta^\beta$, where $\alpha + \beta \leq p$. The terms of the weak formulation (5) are evaluated in the parametric space, where derivation and integration operations are more convenient, and then mapped in the physical space.

After time discretization a discrete problem is obtained on each triangle K :

$$M^K \frac{\beta(u_{k+1}^K) - \beta(u_k^K)}{\delta t} = f^K(u_{k+1}^K) \quad (12)$$

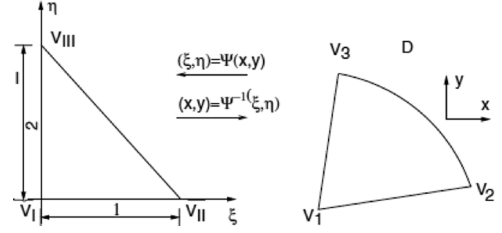


Fig. 1. Mapping of a triangle, from the (reference) parametric space to the physical space.

where δt is the time step, u_k^K is the solution at instant t_k , and $f^K(u_{k+1}^K)$ represents the discretization of the Laplace operator with numerical flux given in (11).

Unfortunately $\beta'(0) \rightarrow +\infty$ and we cannot directly use a Newton iterative method to solve (12). We thus use the change of variables: $v = \beta(u)$ and $g^K(v) = f^K(\beta^{-1}(v))$, so that the discrete problem (12) becomes

$$M^K \frac{v_{k+1}^K - v_k^K}{\delta t} = g^K(v_{k+1}^K) \quad (13)$$

which can be solved using a Newton iterative method since g^K is continuous and differentiable.

Considering the contributions of all the elements in the mesh (dropping the K superscript), we introduce the global unknown vector $dv = v_{k+1} - v_k$ which will be evaluated at each iteration (l) of the Newton method, and we define h such as

$$h(dv) = \delta t g(v_k + dv) - M dv = 0, \quad (14)$$

The iterative solution $dv^{(l+1)}$ is obtained using the following relation:

$$\frac{\partial h(dv^{(l)})}{\partial dv} (dv^{(l+1)} - dv^{(l)}) = -h(dv^{(l)}). \quad (15)$$

Thanks to relation (14), we have

$$\frac{\partial h(dv^{(l)})}{\partial dv} = \delta t g'(v_k + dv^{(l)}) - M \quad (16)$$

so that equation (15) can be written as the following linear system:

$$\begin{aligned} & \left[\delta t g'(v_k + dv^{(l)}) - M \right] dv^{(l+1)} \\ & = \left[\delta t g'(v_k + dv^{(l)}) \right] dv^{(l)} - \delta t g(v_k + dv^{(l)}) \end{aligned} \quad (17)$$

where $g'(v_k + dv^{(l)}) = (\beta^{-1})'(v_k + dv^{(l)}) f'(\beta^{-1}(v_k + dv^{(l)}))$.

The Newton iterations are started with $dv^{(0)} = 0$ and stopped when $\|h(dv^{(l)})\| < 1e-10$.

IV. EXTENSION TO A SEMI-IMPLICIT SCHEME FOR THE 2-D VECTORIAL CASE

Let us consider an infinitely long superconductor along the z axis. In a two-dimensional setting where the magnetic induction is axial ($\vec{B} = (0, 0, B_z)$), the electric field and current density have two nonzero components. The diffusion problem satisfied by the electric field becomes vectorial:

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \vec{E} = 0, \quad (18)$$

Our idea for getting the solution of this vectorial problem is to solve independently the diffusion equations of each components E_x, E_y of the electric field.

Setting $u_1 = E_x/E_c, u_2 = E_y/E_c$ and

$$\beta_1(u_1, u_2) = (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1-\nu_1}{2\nu_1}} u_1 = J_x/J_c = v_1 \quad (19)$$

$$\beta_2(u_1, u_2) = (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1-\nu_2}{2\nu_2}} u_2 = J_y/J_c = v_2 \quad (20)$$

the diffusion equations for E_x and E_y are written

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial \beta_1(u_1, u_2)}{\partial t} - c^{-1} \Delta u_1 = 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial \beta_2(u_1, u_2)}{\partial t} - c^{-1} \Delta u_2 = 0 \text{ in } \Omega \\ \vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nu} = C_{b_1}(t) \text{ on } \partial\Omega \\ \vec{\nabla} u_2 \cdot \vec{\nu} = C_{b_2}(t) \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

where $C_{b_{1,2}}$ are built from Faraday's law and the hypothesis that $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ on $\partial\Omega$.

We propose a semi-implicit approach in order to handle the nonlinearity of the problem. At each time step, the explicit form u_2^k is used to determine the solution u_1^{k+1} (and vice versa). This assumption leads to the following expression of the nonlinearities:

$$\beta_1(u_1^{k+1}, u_2^k) = \left[(u_1^{k+1})^2 + (u_2^k)^2 \right]^{\frac{1-\nu_1}{2\nu_1}} u_1^{k+1} \quad (22)$$

$$\beta_2(u_1^k, u_2^{k+1}) = \left[(u_1^k)^2 + (u_2^{k+1})^2 \right]^{\frac{1-\nu_2}{2\nu_2}} u_2^{k+1}. \quad (23)$$

The Neumann boundary conditions are constructed thanks to this semi-implicit formulation. In order to obtain the fluxes on the boundary, we consider that

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial r} = -\frac{\partial u_2^k}{\partial y} & \text{unknown is } u_1 \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial y} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial r} & \text{unknown is } u_2 \end{cases} \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial u_2^k}{\partial r} & \text{unknown is } u_1 \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial u_1^k}{\partial y} & \text{unknown is } u_2 \end{cases} \quad (25)$$

where $C_{b_{1,2}}$, given in (26) and (27), are deduced from the scalar product with the outward normal vector $\vec{\nu}$

$$C_{b_1}^{k+1} = -\frac{\partial u_2^k}{\partial y} \nu_x - \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial u_2^k}{\partial x} \right) \nu_y \quad (26)$$

$$C_{b_2}^{k+1} = \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial u_1^k}{\partial y} \right) \nu_x - \frac{\partial u_1^k}{\partial x} \nu_y. \quad (27)$$

The discrete system to solve becomes

$$\begin{cases} MK \frac{\beta_1(u_1^{k+1}, u_2^k) - \beta_1(u_1^k, u_2^k)}{\delta t} = f_1(u_1^{k+1}, u_2^k) \\ MK \frac{\beta_2(u_1^k, u_2^{k+1}) - \beta_2(u_1^k, u_2^k)}{\delta t} = f_2(u_1^k, u_2^{k+1}) \end{cases} \quad (28)$$

where f_1 and f_2 are issued from the spatial discretization of the Laplace operator. Unfortunately the inverses of these semi-implicit functions β_1 and β_2 are nontrivial.

In accordance with the $E - J$ power law (2) we suppose that

$$u_1^{k+1} = \beta_1^{-1}(v_1^{k+1}, u_2^k) = \left[(v_1^{k+1})^2 + (u_2^k)^2 \right]^{\frac{\nu_1-1}{2}} v_1^{k+1} \quad (29)$$

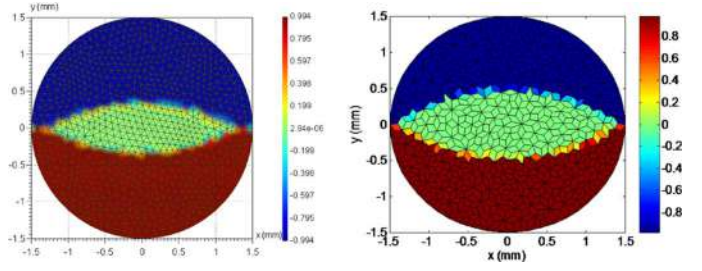


Fig. 2. Current density distribution at $t = 0.5$ s with $n = 200$: (left) DG method with $p = 1$; (right) mixed FE-FV method.

$$u_2^{k+1} = \beta_2^{-1}(u_1^k, v_2^{k+1}) = \left[(u_1^k)^2 + (v_2^{k+1})^2 \right]^{\frac{\nu_2-1}{2}} v_2^{k+1}. \quad (30)$$

These inverse functions are continuous and differentiable. The previously described Newton iterative method is applied for computing u_1^{k+1} and u_2^{k+1} .

V. NUMERICAL RESULTS

We consider a superconducting cylinder of radius $R = 1.5$ mm, characterized by $J_c = 14.15$ A/mm² and $E_c = 10^{-1}$ V/m. The external magnetic flux density field is sinusoidal of amplitude B_0 , frequency f and period $T = 1/f$.

A. Scalar Case

When the cylinder is subjected to an external transverse magnetic field in the x direction the diffusion problem of the electric field is scalar and given by (3). We report numerical results obtained with $f = 0.5$ Hz, and $B_0 = 15$ mT.

For $n = 200$, the current density distribution is plotted at $t = T/4$. Notice that we did not get convergence using the H -formulation [2] implemented in the Comsol software. Fig. 2 presents a comparison of our result to that given by the mixed FE-FV method [3]. A good agreement is observed.

B. The 2-D Vectorial Case

Let us now assume that the external magnetic field is applied in the z direction. The diffusion problem vectorial and given by (21). In this example we consider $f = 50$ Hz and $T = 20$ ms. Based on the Bean model, the field required for full penetration will occur at $t = T/4$, where the applied field reaches its maximum value [8].

For $n = 200$, we present the distributions of the components $J_x/J_c, J_y/J_c$ of and the norm $\|\vec{J}\|/J_c$ of the current density at different times. Fig. 3 shows the components in partial penetration at $t = T/8$. They have the expected symmetries because of similarities of their diffusion equations. The penetration form is different compared to the one obtained with a transverse magnetic field. Fig. 4 shows the components in full penetration at $t = T/4$. Symmetries of their distributions are unchanged. The regions where we get iso-values are in a pie chart form.

The modulus $\|\vec{J}\|/J_c = \sqrt{J_x^2/J_c^2 + J_y^2/J_c^2}$ is plotted in Fig. 5. In partial penetration at $t = T/8$, the repartition of the current density is orthoradial. The full penetration of the superconducting cylinder is reached at $t = T/4$ as in the Bean model.

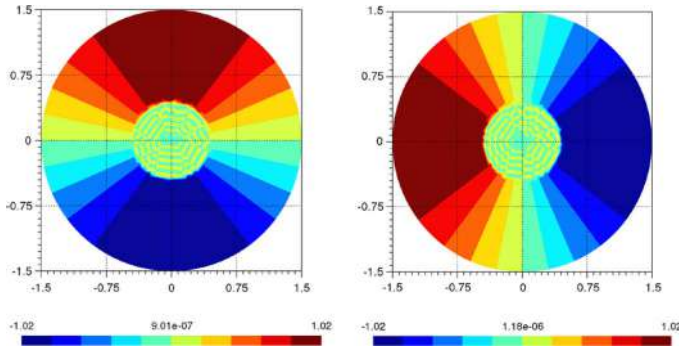


Fig. 3. Current density components at $t = T/8$: (left) J_x/J_c ; (right) J_y/J_c .

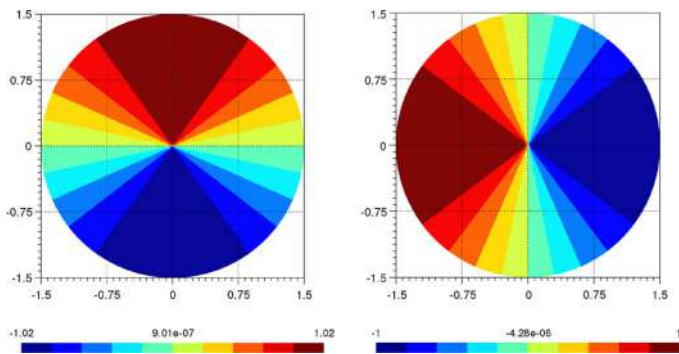


Fig. 4. Current density components at $t = T/4$: (left) J_x/J_c ; (right) J_y/J_c .

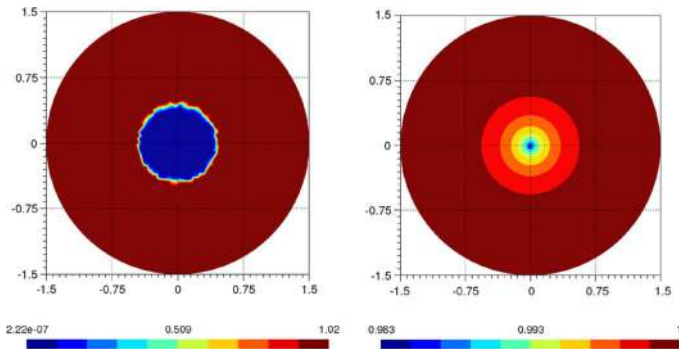


Fig. 5. Norm $J_c^{-1} \sqrt{J_x^2 + J_y^2}$ at different instants: (left) $t = T/8$; (right) $t = T/4$.

C. Example with Nonuniform n

It is well known that in practice the n exponent is not a constant: it locally varies and becomes large in regions where the temperature is close to $0K$.

In this example, we suppose that $n(r) = n_0 \exp(Ar/R)$, with $n_0 = 1$ and $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. We note that $n(R) = 54$ and $n(0) = 1$. We consider a transverse magnetic field with $B_0 = 15$ mT and $f = 0.5$ Hz. It is applied in the x -direction, and the diffusion problem of electric field is scalar.

The comparison to the results issued from II -formulation implemented in the Comsol software shows the validity of our approach. Fig. 6 presents the current density distribution at $t =$

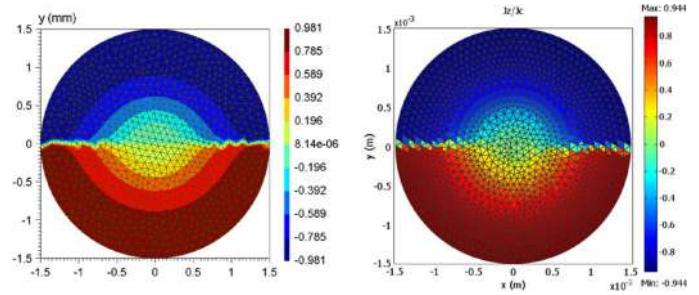


Fig. 6. Current density distribution at $t = 0.5$ s, computed by DG method with $p = 4$ (left) and H -formulation implemented in the Comsol software (right).

$T/4$. Near the border n is large and J/J_c is close to 1. When approaching the center of the cylinder, n decreases and J/J_c becomes smaller.

VI. CONCLUSION

In this paper, we presented a Discontinuous Galerkin method for solving the nonlinear diffusion problems describing the evolution of the electric field in superconducting materials. The robustness of the approach was highlighted on examples where the exponent in the power constitutive law is large and uniform (for which standard finite-element codes fail to converge), and when the exponent is space-dependent.

The implementation of a semi-implicit $3D$ scheme based on the same approach as the one used in $2D$ is currently in progress.

ACKNOWLEDGMENT

This work has been supported in part by the Belgian Science Policy (IAP P6/21) and the Belgian French Community (ARC 09/14-02).

REFERENCES

- [1] C. P. Bean, "Magnetization of hard superconductors," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 8, no. 6, pp. 250–253, 1962.
- [2] R. Brambilla, F. Grilli, and L. Martini, "Development of an edge-element model for AC losses computation of high-temperature superconductors," *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 20, no. 1, pp. 16–24, 2007.
- [3] A. Kameni, S. Mezani, F. Sirois, D. Netter, J. Leveque, and B. Douine, "A 2-D robust FE-FV mixed method to handle strong nonlinearities in superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3445–3448, 2010.
- [4] F. Sirois and F. Roy, "Computation of 2-D current distribution in superconductors of arbitrary shapes using a new semi-analytical method," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 17, no. 3, pp. 3836–3845, 2007.
- [5] Stavrev, S. Grilli, F. Dutoit, B. Nibbio, N. Vinot, E. Klutsch, I. Meunier, G. Tixador, P. Yifeng Yang, and E. Martinez, "Comparison of numerical methods for modeling of superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 849–852, 2002.
- [6] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 39, no. 5, pp. 1749–1779, 2002.
- [7] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, "GMSH: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 79, no. 11, pp. 1309–1331, 2009.
- [8] W. J. Carr, Jr., *AC Loss and Macroscopic Theory of Superconductors*, 2nd ed. London, U.K.: Taylor and Francis, 2001.

A 3-D Semi-Implicit Method for Computing the Current Density in Bulk Superconductors

Abelin Kameni¹, Mohamed Boubekeur¹, Lotfi Alloui¹, Frédéric Bouillault¹, Jonathan Lambrechts², and Christophe Geuzaine³

¹Laboratoire de Génie Electrique de Paris, Supélec, Université Paris Sud, Université Pierre et Marie Curie, Gif-sur-Yvette Cedex 91192, France

²Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics, Louvain-la-Neuve 1348, Belgium

³University of Liège, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Liège 4000, Belgium

A semi-implicit approach is proposed for computing the current density in superconductors characterized by nonlinear vectorial power law. A nodal discontinuous Galerkin method is adopted for the spatial discretization of the nonlinear system satisfied by the components of the electric field. Explicit developments are used to construct boundary conditions to avoid the modeling of a volume around the superconducting sample. A modified Newton iterative method is introduced for solving the discrete system. Numerical examples on a 2-D superconducting plate and a 3-D superconducting cube are computed. Distributions of a component of the current density are presented and differences in the diffusive process are highlighted. The penetration time and losses are compared with those obtained with an A - V formulation solved by a finite-volume method.

Index Terms—Discontinuous Galerkin method, FEM, high-temperature superconductors, Maxwell's equations, Newton iterative method, semi-implicit approach.

I. INTRODUCTION

SUPERCONDUCTING materials are increasingly introduced in electrical engineering and development of efficient numerical tools is a crucial issue for their characterization. Linear models based on critical state suggested by Bean have been widely used to evaluate losses and magnetization of low-temperature superconductors [1], but they are not suitable for high-temperature superconductors. Indeed, numerical simulations are notoriously difficult to carry out when a power law description of their behavior is assumed by J - E or E - J relations given by

$$\frac{\vec{E}}{E_c} = \left\| \frac{\vec{J}}{J_c} \right\|^{n-1} \frac{\vec{J}}{J_c} \quad (1)$$

$$\frac{\vec{J}}{J_c} = \left\| \frac{\vec{E}}{E_c} \right\|^{\frac{1}{n-1}} \frac{\vec{E}}{E_c} \quad (2)$$

with \vec{J} the current density, \vec{E} the electric field, E_c the critical electric field, J_c the critical current density, and the exponent $n > 1$ that characterizes the flux creep phenomena [2] ($n = 1$ corresponds to a normal conductor and $n = +\infty$ coincides with the Bean critical state).

Different discretization techniques have been implemented for computing 2-D induced fields in superconducting materials [3], [4]. For the 3-D case, the classical FEM is often used to deal with the E - J power law [6], [7]. Discretization concerns spatial operators with a nonlinear term of type

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (\|(\vec{J}/J_c)\|^{n-1} (\vec{J}/J_c)) \text{ or } \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\|(\vec{J}/J_c)\|^{n-1} (\vec{J}/J_c)).$$

Manuscript received June 29, 2013; revised September 13, 2013; accepted October 4, 2013. Date of current version February 21, 2014. Corresponding author: A. Kameni (e-mail: abelin.kameni@lgep.supelec.fr).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2013.2284934

Unfortunately, during computation of the discrete solution, spurious oscillations often appear. In addition, a surrounding vacuum volume is added to set the boundary conditions. This leads to solving additional equations and increases the computational cost.

In this paper, the J - E form (2) of the constitutive law is considered and the differential system satisfied by the electric field is defined. The spatial operator is kept linear and the nonlinearity is then carried by the temporal term. This paper is based on the discretization of the scalar Laplacian operator using a nodal discontinuous Galerkin method. The interface flux terms are obtained from the symmetric interior penalty method [8]. A semi-implicit scheme that consists in solving the three nonlinear diffusion equations satisfied by the components of the electric field is proposed. The boundary conditions are defined thanks to explicit developments of Maxwell-Gauss and Maxwell-Faraday relations to avoid using a surrounding volume. They considered the demagnetizing field created by the sample. This paper is an extension of the method published previously to compute vectorial 2-D current density distributions in superconductors [9].

II. DIFFERENTIAL SYSTEM

In a 3-D setting where the magnetic induction is $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, the electric field and the current density have three nonzero components. They satisfy a vectorial problem written as

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (3)$$

The main idea of this paper is to solve the diffusion equations of each component with an explicit coupling. We set $u_1 = E_x/E_c$, $u_2 = E_y/E_c$, $u_3 = E_z/E_c$, $v_1 = J_x/J_c$, $v_2 = J_y/J_c$, $v_3 = J_z/J_c$, $c = \mu_0 J_c/E_c$, and $(S_1, S_2, S_3) = -\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}/E_c)$ and define the following functions to consider

the 3-D behavior:

$$\beta_1(u_1, u_2, u_3) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{1-n}{2n}} u_1 = v_1 \quad (4)$$

$$\beta_2(u_1, u_2, u_3) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{1-n}{2n}} u_2 = v_2 \quad (5)$$

$$\beta_3(u_1, u_2, u_3) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{1-n}{2n}} u_3 = v_3 \quad (6)$$

such that $\beta_1(0, u_2, u_3) = 0$, $\beta_2(u_1, 0, u_3) = 0$ and $\beta_3(u_1, u_2, 0) = 0$.

The system of three nonlinear diffusion equations is completed by fluxes boundary conditions, leading to the following system:

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial \beta_1(u_1, u_2, u_3)}{\partial t} - c^{-1} \Delta u_1 = S_1 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial \beta_2(u_1, u_2, u_3)}{\partial t} - c^{-1} \Delta u_2 = S_2 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial \beta_3(u_1, u_2, u_3)}{\partial t} - c^{-1} \Delta u_3 = S_3 & \text{in } \Omega \\ \vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nu} = C_{b_1}(t) & \text{on } \partial\Omega \\ \vec{\nabla} u_2 \cdot \vec{\nu} = C_{b_2}(t) & \text{on } \partial\Omega \\ \vec{\nabla} u_3 \cdot \vec{\nu} = C_{b_3}(t) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

where $C_{b_{1,2,3}}$ are built from Faraday's law and the assumption that $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ holds outside the sample.

Existence and unicity of solutions are ensured since $\beta_{1,2,3}$ are monotonous Lipschitzian functions. The proof is obtained from the study of quasi-linear elliptic and parabolic equations [10].

III. SEMI-IMPLICIT APPROACH AND DISCRETE SYSTEM

A. Semi-Implicit Coupling Approach

The semi-implicit coupling approach consists in using the previous solutions u_2^k, u_3^k at time $t = t_k$ for computing the solution u_1^{k+1} at time $t = t_{k+1}$ (similarly for u_2^{k+1} and u_3^{k+1}).

We note $\beta_1(u_1^{k+1}) = \beta_1(u_1^{k+1}, u_2^k, u_3^k)$, $\beta_2(u_2^{k+1}) = \beta_2(u_1^k, u_2^{k+1}, u_3^k)$ and $\beta_3(u_3^{k+1}) = \beta_3(u_1^k, u_2^k, u_3^{k+1})$. Our coupling approach leads to these expressions of nonlinearities

$$\beta_1(u_1^{k+1}) = \left[(u_1^{k+1})^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} u_1^{k+1} \quad (8)$$

$$\beta_2(u_2^{k+1}) = \left[(u_1^k)^2 + (u_2^{k+1})^2 + (u_3^k)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} u_2^{k+1} \quad (9)$$

$$\beta_3(u_3^{k+1}) = \left[(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^{k+1})^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} u_3^{k+1}. \quad (10)$$

B. Boundary Conditions

The main difficulty in superconductor modeling is to consider the demagnetizing effects. It is common to add a volume around the sample to set boundary conditions at its borders [11], but this results in increasing the computational cost. Equivalent flux boundary conditions based on computing $\vec{\nabla} u_{1,2,3}$ are proposed to avoid this technique. Their components are expressed because of explicit developments of $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ and $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ on $\partial\Omega$.

These developments result in

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial x} = -\frac{\partial u_2^k}{\partial y} - \frac{\partial u_3^k}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial y} = \frac{\partial u_2^k}{\partial x} + E_c^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial z} = \frac{\partial u_3^k}{\partial x} - E_c^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial x} = \frac{\partial u_1^k}{\partial y} - E_c^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial y} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial x} - \frac{\partial u_3^k}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial z} = \frac{\partial u_3^k}{\partial y} + E_c^{-1} \frac{\partial B_x}{\partial t} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial x} = \frac{\partial u_1^k}{\partial z} + E_c^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial y} = \frac{\partial u_2^k}{\partial z} - E_c^{-1} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial u_3^{k+1}}{\partial z} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial x} - \frac{\partial u_2^k}{\partial y} \end{cases} \quad (13)$$

At $t = t_{k+1}$, the total magnetic field is defined as: $\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_d$, with \vec{B}_a the uniform applied magnetic field at $t = t_{k+1}$ and \vec{B}_d the demagnetized field created by the sample computed at t_k . The quasi-static approximation of electromagnetic fields defines the average demagnetizing field as: $\vec{B}_d = -\mu_0 \vec{N} \vec{M}$, where \vec{N} is a tensor of the demagnetizing factors and \vec{M} is the magnetization given at $t = t_k$ by: $\vec{M}^k = 0.5V \int_V \vec{r} \times \vec{J}^k dV$, with $\vec{r} = (x, y, z)$ and V the volume of the sample. For the most common geometries, \vec{N} is computed from analytical formulas [12].

C. Discrete System

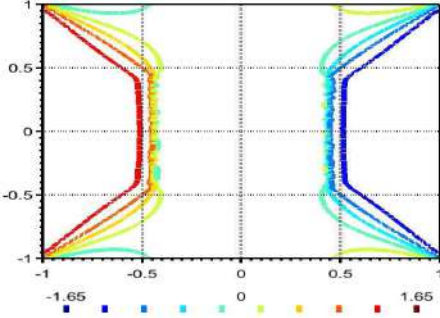
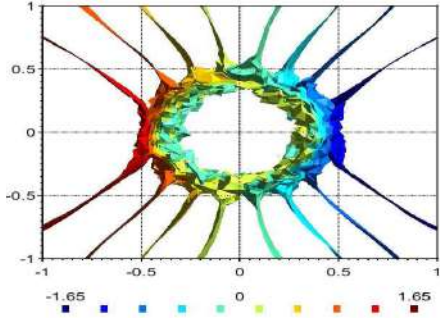
Spatial discretization of the Laplacian operator in system (7) is performed. The generated terms and the boundary conditions are represented by $F_{1,2,3}$. The nonlinear algebraic system is given by

$$\begin{cases} M_{\text{DG}} \frac{\beta_1(u_1^{k+1}) - \beta_1(u_1^k)}{\delta t} = F_1(u_1^{k+1}, u_2^k, u_3^k) \\ M_{\text{DG}} \frac{\beta_2(u_2^{k+1}) - \beta_2(u_2^k)}{\delta t} = F_2(u_1^k, u_2^{k+1}, u_3^k) \\ M_{\text{DG}} \frac{\beta_3(u_3^{k+1}) - \beta_3(u_3^k)}{\delta t} = F_3(u_1^k, u_2^k, u_3^{k+1}) \end{cases} \quad (14)$$

where M_{DG} is the global mass matrix. To avoid difficulties in linearization—which introduces the fact that β_1, β_2 , and β_3 are not continuous derivables at zero—a changing of discrete unknowns is proposed. The components of current density v_1, v_2 , and v_3 are chosen as the new unknowns. They are computed from an equivalent algebraic system given by

$$\begin{cases} M_{\text{DG}} \frac{v_1^{k+1} - v_1^k}{\delta t} = G_1(v_1^{k+1}, v_2^k, v_3^k) \\ M_{\text{DG}} \frac{v_2^{k+1} - v_2^k}{\delta t} = G_2(v_1^k, v_2^{k+1}, v_3^k) \\ M_{\text{DG}} \frac{v_3^{k+1} - v_3^k}{\delta t} = G_3(v_1^k, v_2^k, v_3^{k+1}) \end{cases} \quad (15)$$

where $G(v_1, v_2, v_3) = F(u_1, u_2, u_3)$.

Fig. 1. Partial penetration: 2-D isovalue distribution of J_y/J_c at $t = 10$ ms.Fig. 2. Partial penetration: 3-D isovalue distribution of J_y/J_c at $t = 7.5$ ms.

The linearization of G is ensured if the inverse functions β_1^{-1} β_2^{-1} β_3^{-1} exist and are derivables. Unfortunately, these derivatives are nontrivial. In accordance with the E - J power law (1), we suppose that

$$u_1^{k+1} = \beta_1^{-1}(v_1^{k+1}) = \left[(v_1^{k+1})^2 + (v_2^k)^2 + (v_3^k)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} v_1^{k+1} \quad (16)$$

$$u_2^{k+1} = \beta_2^{-1}(v_2^{k+1}) = \left[(v_1^k)^2 + (v_2^{k+1})^2 + (v_3^k)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} v_2^{k+1} \quad (17)$$

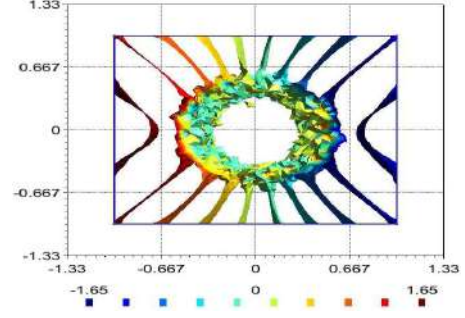
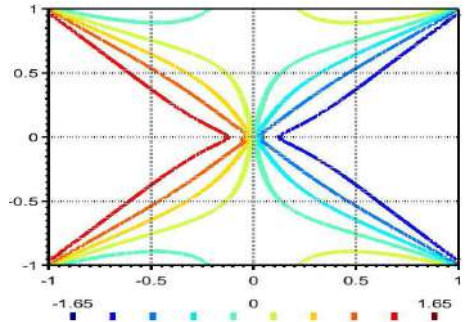
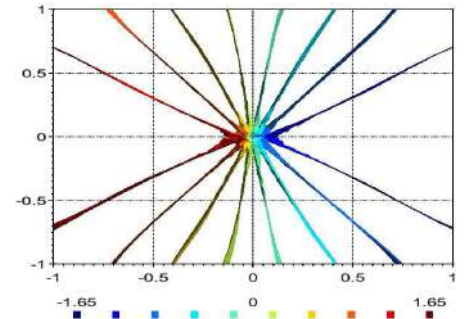
$$u_3^{k+1} = \beta_3^{-1}(v_3^{k+1}) = \left[(v_1^k)^2 + (v_2^k)^2 + (v_3^{k+1})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} v_3^{k+1}. \quad (18)$$

These inverse functions are continuous and derivable and a Newton iterative method is applied for computing v_1^{k+1} , v_2^{k+1} , and v_3^{k+1} (see [9]). The time step of the numerical scheme has the same order as that is given by the CFL condition of the linear diffusion equation with $n = 1$.

IV. NUMERICAL RESULT

We consider a superconductor sample of characteristics: $J_c = 500$ A/mm², $E_c = 10^{-7}$ V/mm, and $n = 13$. It is subjected to an external magnetic field in the z -direction: $B_a(t) = a_B t$, with $a_B = 50$ T/s. A fast ramping is considered to show robustness of this approach. The Newton iterative method needed less than five iterations at each time step δt . Three configurations are studied:

- 1) A 2-D superconducting plate of edge length $a = 2$ mm. The mesh has 11700 nodes, $\delta t = 25\mu_s$. The computation time is 1 h on one core;

Fig. 3. Partial penetration: 3-D isovalue distribution of J_y/J_c at $t = 11$ ms obtained with a surrounding volume.Fig. 4. Full penetration: 2-D isovalue distribution of J_y/J_c at $t = 19$ ms.Fig. 5. Full penetration: 3-D isovalue distribution of J_y/J_c at $t = 12$ ms.

- 2) A 3-D superconducting cube of edge length $a = 2$ mm, whose demagnetizing factors are $N_x = N_y = N_z = 1/3$. The mesh has 80000 nodes, $\delta t = 10\mu_s$. The computation time is 3 h on 10 cores;
- 3) The same 3-D superconducting cube with a surrounding cube of edge length $4a/3$ and characteristics $c = \mu_0 J_c / E_c = 0.5$, $n = 1$. The mesh has 170000 nodes, $\delta t = 10\mu_s$. The computation time is 18 h on the same 10 cores machine. The magnetic field is imposed at border of the surrounding volume through flux expressions previously described. This results in a time shift of the penetration.

The components J_x/J_c and J_y/J_c have the expected symmetries due to similarities of their boundary conditions. Isovalue distributions of J_y/J_c are shown in the following figures to describe partial and full penetration. They show 2-D-3-D differences in diffusive process.

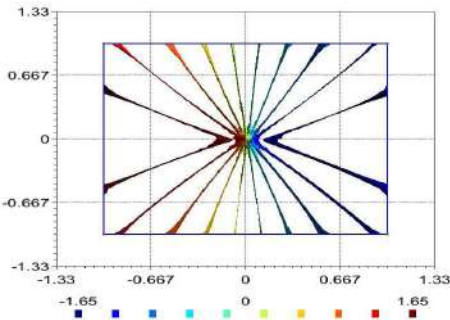


Fig. 6. Full penetration: 3-D isovalue distribution of J_y/J_c at $t = 13$ ms obtained with a surrounding volume.

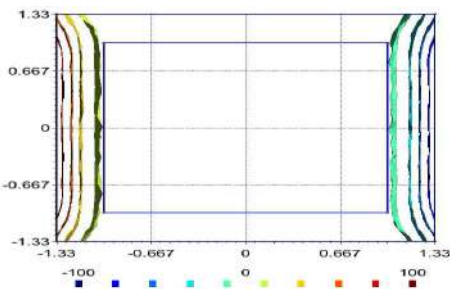


Fig. 7. 3-D isovalue distribution of J_y/J_c inside the surrounding conductor when the full penetration of superconducting cube is reached.

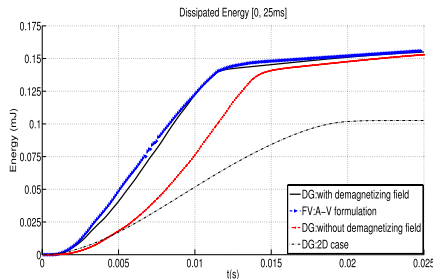


Fig. 8. Comparison of the dissipated energy during $[0, 25]$ ms.

A. Partial Penetration

Figs. 1 and 2 show the 2-D plate at $t = 10$ ms and the 3-D cube at $t = 7.5$ ms. The not penetrated region at the center in the 2-D plate has a square form, whereas it has a cylindrical form in the 3-D case. Fig. 3 shows the partial penetration at $t = 11$ ms for the second 3-D case. We observe similarities on isovalue distributions (Figs. 2 and 3). Note that the 3-D case is similar to the 2-D one when $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ without the demagnetizing field.

B. Full Penetration

The penetration times are different. The full penetration is reached at $t = 19$ ms for the 2-D plate, at $t = 12$ ms for the 3-D cube. This discrepancy is due to the demagnetizing field and $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$. In the 2-D case, all the isovalues go from the corners to the center (Fig. 4), while they go from the top and bottom sides to the center in the 3-D case (Fig. 5). The penetration time of the second 3-D case is $t = 13$ ms and similarities in both 3-D distributions are observed (Figs. 5 and 6). The isovalue distribution in the surrounding volume is shown in Fig. 7.

C. Dissipated Energy

Dissipated energy $W = \int_0^t \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} d\Omega dt$ is computed in different cases and compared with that obtained from a finite-volume method with $A-V$ formulation in Fig. 8. In these published works, a surrounding volume is added and Dirichlet boundary conditions are used to impose the magnetic field without a time shift on the penetration [11]. A good agreement is observed between the results without a surrounding volume and the results obtained from an $A-V$ formulation. When the demagnetizing effects are neglected in the 3-D case, the total magnetic field is undervalued, penetration of current density is slower, and the dissipated energy is less important in transient regime. Beyond $t = 15$ ms, these energies are close and have linear evolutions as the applied magnetic field. There is a big gap between 2-D and 3-D energies that highlights necessity to develop 3-D models.

V. CONCLUSION

A semi-implicit approach based on a nodal discontinuous Galerkin method is proposed to describe the current density in superconducting materials. The results have been compared with those obtained from a method using a surrounding vacuum volume.

REFERENCES

- [1] A. Bossavit, "Numerical modeling of superconductors in three dimensions: A model and a finite element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3363–3366, Sep. 1994.
- [2] E. Zeldov, N. M. Amer, G. Koren, A. Gupta, M. W. McElfresh, and R. J. Gambino, "Flux creep characteristics in high temperature superconductors," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 56, no. 7, pp. 680–683, Feb. 1990.
- [3] G. Meunier and P. Tixador, "Differents formulation to models superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 3445–3448, Jul. 2000.
- [4] A. Kameni, S. Mezani, F. Sirois, D. Netter, J. Leveque, and B. Douine, "A 2-D robust FE-FV mixed method to handle strong nonlinearities in superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3445–3448, Aug. 2010.
- [5] Z. Hong, A. M. Campbell, and T. A. Coombs, "Computer modeling of magnetisation in high temperature bulk superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 17, no. 2, pp. 3761–3764, Jun. 2007.
- [6] F. Grilli, S. Stavrev, Y. Le Floch, M. Costa Bouzo, E. Vinot, I. Klutsch, *et al.*, "Finite-element method modeling of superconductors: From 2-D to 3-D," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 15, no. 1, pp. 17–25, Jan. 2004.
- [7] M. Zhang and T. A. Coombs, "3D modeling of high-Tc superconductors by finite element software," *Supercond. Sci. Tech.*, vol. 25, no. 1, pp. 15009–15016, 2012.
- [8] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 39, no. 5, pp. 1749–1779, 2002.
- [9] A. Kameni, J. Lambrechts, J. Remacle, S. Mezani, F. Bouillault, and C. Geuzaine, "Discontinuous Galerkin methods for computing induced fields in superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 3445–3448, Feb. 2012.
- [10] H. W. Alt and S. Luckhaus, "Quasilinear elliptic-parabolic differential equations," *Math. Zeit.*, vol. 83, no. 6, pp. 311–341, 1983.
- [11] L. Allaoui and F. Bouillault, "Numerical study of the influence of flux creep and of thermal effect on dynamic behaviour of magnetic levitation systems with a high-Tc superconductor using control volume method," *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 25, no. 1, pp. 1–9, 2012.
- [12] A. Aharoni, "Demagnetizing factor for rectangular ferromagnetic prisms," *J. Appl. Phys.*, vol. 83, no. 6, pp. 3432–1–3432-3, 1998.

Formulation en champ magnétique

La formulation magnétique est celle généralement résolue par la méthode de éléments finis pour la modélisation des supraconducteurs. Avec cette formulation, on a besoin d'un volume d'air autour du matériau pour une meilleure prise en compte des effets démagnétisants. Contrairement à la méthode des éléments finis d'arêtes où le problème à résoudre a une seule inconnue vectorielle, la résolution de cette formulation par une méthode Galerkin discontinue porte sur un système de trois équations dont les inconnues sont les composantes du champ magnétique. Pour établir les équations satisfaites par les composantes (H_1, H_2, H_3) du champ magnétique, nous adoptons une écriture sous forme conservative de l'opérateur différentiel $\nabla \times \nabla$. On remplace alors $\nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{H})$ par le vecteur $(\text{div}\mathbf{F}_1, \text{div}\mathbf{F}_2, \text{div}\mathbf{F}_3)^T$ où $\mathbf{F}_1 = (0, F_z, -F_y)^T$, $\mathbf{F}_2 = (-F_z, 0, -F_x)^T$ et $\mathbf{F}_3 = (F_y, -F_x, 0)^T$ et $(F_x, F_y, F_z)^T = \rho \nabla \times \mathbf{H}$. Avec cette notation, chaque composante H_i de \mathbf{H} satisfait à une équation de la forme :

$$\mu_0 \frac{\partial H_i}{\partial t} - \text{div}\mathbf{F}_i = 0 \quad (3.16)$$

La discrétisation par la méthode de Galerkin discontinue s'applique sur la formulation faible établie sur chaque élément K du maillage :

$$\mu_0 \int_K \frac{\partial H_i}{\partial t} \varphi dK - \int_K \mathbf{F}_i \cdot \nabla \varphi dK + \int_\Gamma \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v} \varphi d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

avec φ une fonction test et \mathbf{v} la normale extérieure du bord $\Gamma = \partial K$. De la même manière que dans les sections précédentes, le terme de bord est remplacé par une expression équivalente qui tient compte de la solution sur les éléments voisins. Dans ce cas, on utilise les expressions de flux construites à partir de la méthode de pénalité intérieur symétrique (Symmetric Interior Penalty method - SIP) :

$$\int_\Gamma \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v} \varphi d\Gamma \rightarrow \int_\Gamma \llbracket \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v} \rrbracket \{\varphi\} d\Gamma + \int_\Gamma \{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}\} \cdot \llbracket \varphi \rrbracket d\Gamma + I_{p_i} \quad (3.18)$$

avec I_{p_i} un terme de pénalité qui permet de satisfaire aux conditions de continuité qu'impose la physique du problème notamment celle de la continuité de la composante tangentielle. Dans notre travail nous avons montré que l'expression suivante du terme de pénalité (3.19) convient pour la modélisation des supraconducteurs et permet d'assurer la convergence de la méthode :

$$I_{p_i} = - \int_\Gamma \delta \llbracket F_i^\Gamma \rrbracket \llbracket \varphi \rrbracket d\Gamma \quad (3.19)$$

avec $(F_1^\Gamma, F_2^\Gamma, F_3^\Gamma)^\top = \mathbf{v} \times \mathbf{H} \times \mathbf{v}$ et $\delta = \alpha \rho_\Gamma h_\Gamma$ où, ρ_Γ est la résistivité non-linéaire associée au bord Γ , h_Γ un coefficient qui dépend de la taille de élément K et α une constante positive.

Ce travail à fait l'objet de publications dont **H-Formulation using the Discontinuous Galerkin Method for 3D modeling of superconductors** publié dans *IEEE Transactions On Magnetics*.

H-Formulation Using the Discontinuous Galerkin Method for the 3-D Modeling of Superconductors

L. Makong^{1,2}, A. Kameni¹, L. Queval¹, F. Bouillault¹, and P. Masson²

¹Group of electrical engineering, UMR 8507 CNRS, Supélec, Université Paris Sud, Université Pierre et Marie Curie, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

²Department of Mechanical Engineering, University of Houston, Houston, TX 77204 USA

In this paper, a new approach to model efficiently high-temperature superconductors, whose electrical behavior is characterized by a non-linear power law, in 3-D is investigated. The commonly used non-linear H-formulation will be discretized based on the discontinuous Galerkin method. This numerical approach will likely provide fast simulations through parallel computations. Its application on simple examples, such as a superconducting cube subjected to an external magnetic field, will show robustness, convergence, and fast computations.

Index Terms—Discontinuous Galerkin (DG) method, H-formulation, high-temperature superconductors, Maxwell equations.

I. INTRODUCTION

THE growing interest of high-temperature superconductivity applications, mostly involving machines operating in alternating current [1], [2], is synonymous with efficient design thus a precise evaluation of ac losses. Numerous difficulties associated with the highly non-linear behavior of high-temperature superconductors [3], complexities of both the geometry and the magnetic field configuration led to the ongoing development of 3-D numerical tools [4].

However, developed numerical methods, commonly using the finite-element method [5], [6], are not efficiently optimized for large scale superconductor systems such as multi-filamentary superconducting cables. Since both the memory and stiffness matrices scale with the meshed domain size, these methods are either restricted by the available memory size or the inversion of resulting large stiffness matrices. The discontinuous Galerkin (DG) method is thus implemented to make use of its natural parallel computations capabilities applied on both the mesh domain through partitioning and the resulting block diagonal matricial system [7].

Successful implementations of the method have been done to solve the formulation based on the electric field \mathbf{E} [8], [9]. However, the use of demagnetization coefficients restricts this approach to model in 3-D simple geometries only. For instance, the numerical modeling of twisted multi-filamentary superconducting cables or tapes is not possible.

In this paper, the DG method will be implemented to solve the commonly used \mathbf{H} -formulation coupled with the heat equation where \mathbf{H} is the magnetic field and T the temperature. The numerical approach will be thoroughly described and applied to a superconducting cube subjected to an external sinusoidal magnetic field in both non-temperature- and temperature-

dependent cases. Comparisons of computed ac losses with the finite-element software in GetDP will be done.

II. DIFFERENTIAL FORM

Assume a domain Ω consisting of a superconducting sub-domain Ω_s and a non-superconducting sub-domain Ω_r that are non-overlapping. Its discretization as $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ will give \mathcal{T}_h the mesh with tetrahedral or hexahedral elements K .

The combination of Maxwell equations, the magnetic linear constitutive law and the non-linear electrical power law characterizing the superconducting domain Ω_s will give the non-linear \mathbf{H} -formulation. Moreover, the heat equation will be coupled to the \mathbf{H} -formulation in order to have a temperature-dependent problem. The resulting differential form is

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\kappa(T) \nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \rho c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) = \mathbf{J} \cdot (\sigma(T)^{-1} \mathbf{J}) \end{cases} \quad (1)$$

with ρ , $c_p(T)$, and $\lambda(T)$ are the mass density, the specific heat, and the thermal conductivity. The diffusivity term $\kappa(T) = 1/\sigma(T)\mu_0$ is dependent on the global domain electric conductivity $\sigma(T)$ which is either constant in the non-superconducting domain Ω_r or non-linear in the superconducting domain Ω_s . The latter is expressed using the power law

$$\mathbf{J} = \sigma(T) \mathbf{E}, \quad \text{with } \sigma(T)|_{\Omega_s} = \frac{J_c(T)}{E_c} \left\| \frac{\mathbf{E}}{E_c} \right\|^{1-\frac{1}{n}} \quad (2)$$

with $J_c(T)$, E_c , and n the critical current density, the critical electric field, and the power law index of the superconducting sub-domain Ω_s . The temperature dependence of the critical current density is defined as

$$J_c(T) = J_{c0} \frac{T_c - T}{T_c - T_0} \quad (3)$$

with T_0 , J_{c0} , and T_c the initial temperature of the global domain Ω , the critical current density at the initial temperature, and the critical temperature of the superconducting sub-domain Ω_s .

Manuscript received June 29, 2017; revised August 30, 2017; accepted October 17, 2017. Corresponding author: L. Makong (e-mail: lmakong@uh.edu).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2017.2768900

Here, we applied an external magnetic field \mathbf{H}_a and a thermal insulation on the global domain boundary $\partial\Omega = \Gamma$. Thus, we have

$$\begin{cases} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_a \times \mathbf{n} & \text{on } \Gamma \\ \nabla T \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

III. DISCRETE VARIATIONAL FORMULATION

According to the nodal DG approach, both unknown magnetic field \mathbf{H} and temperature T will be approximated as \mathbf{u} and v over each finite element K . With \mathbb{P}^m the set of polynomials of degree at least equal at m , we have

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{w} \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 : \mathbf{w}|_K \in (\mathbb{P}^m(K))^3, K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (5a)$$

$$\mathbf{V} = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}^m(K), K \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (5b)$$

Thus, the discrete variational formulation will consist in finding on each element K , $(\mathbf{u}, v) \in \mathbf{W} \times \mathbf{V}$ such that

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \int_K \partial_t \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} dK + \int_K \kappa (\nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi}) dK \\ - \int_{\partial K} ((\kappa \nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} dA = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} T : \int_K \rho c_p \partial_t v \cdot \phi dK - \int_K \lambda \nabla v \cdot \nabla \phi dK \\ - \int_{\partial K} (\lambda \nabla v \cdot \mathbf{n}) \phi dA = \int_K \mathbf{j} \cdot (\sigma(v)^{-1} \mathbf{j}) \phi dK \end{aligned} \quad (6b)$$

with $\boldsymbol{\varphi}$ and ϕ the test functions, $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{u}$, and the normal \mathbf{n} is defined at each interface.

Let's assume $\mathbf{F}_1 = (0, F_z, -F_y)^T$, $\mathbf{F}_2 = (-F_z, 0, F_x)^T$, and $\mathbf{F}_3 = (F_y, -F_x, 0)^T$ with $\kappa \nabla \times \mathbf{u} = (F_x, F_y, F_z)^T$.

The conservative form of (6a) expressed by changing the **curl** – **curl** operator with the *div* operator will give (with $i = 1, 2$, and 3) three equations of unknowns $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ such as

$$\int_K \partial_t u_i \cdot \boldsymbol{\varphi} dK + \int_K \mathbf{F}_i \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} dK - \int_{\partial K} (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}) \varphi_i dA = 0 \quad (7)$$

with

$$\begin{cases} \nabla \times (\kappa \nabla \times \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{F}_1, \nabla \cdot \mathbf{F}_2, \nabla \cdot \mathbf{F}_3)^T \\ (\kappa \nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n})^T. \end{cases} \quad (8)$$

However, the continuity of the tangential components of the magnetic field \mathbf{H} has not been implemented yet. According to the symmetric interior penalty method, equivalent interface terms $I_{h,q}$ and $I_{h,q}^T$, for the magnetic and thermal problem, respectively, expressed as numerical fluxes will replace actual interface terms in order to ensure the problem convergence. The penalty term of $I_{h,q}$ will be defined such that the continuity of the tangential component of \mathbf{H} is respected. The penalty term of $I_{h,q}^T$ will be defined such that the continuity of v and ∇v is respected.

IV. INTERFACE TERMS BASED ON NUMERICAL FLUXES

A. Magnetic Problem

In the magnetic problem, the equivalent interface term $I_{h,q}$ will be the one proposed by Grote *et al.* [10] which is based on the symmetric interior penalty method. On each face f belonging to two neighboring elements K and K' or to the global boundary Γ , we have the following expression:

$$- \int_f ([[\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}]] \cdot \{\kappa \nabla \times \mathbf{u}\} + [[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]] \cdot \{\kappa \nabla \times \boldsymbol{\varphi}\}) dA + I^P. \quad (9)$$

The penalty term I^P is expressed as follows:

$$I^P = \int_f a [[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]] \cdot [[\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}]] dA \quad (10)$$

with the penalty coefficient a dependent on both the size and diffusivity of both neighboring elements K and K' .

The quantities $[[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]]$ and $\{\mathbf{u} \times \mathbf{n}\}$ represent the jump and average of the tangential components of the field \mathbf{u} across each face f common to the neighboring elements K and K' [10]. They are defined as follows:

$$[[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]] = \mathbf{u}_K \times \mathbf{n} - \mathbf{u}_{K'} \times \mathbf{n} \quad (11)$$

and

$$\{\mathbf{u} \times \mathbf{n}\} = \frac{\mathbf{u}_K \times \mathbf{n} + \mathbf{u}_{K'} \times \mathbf{n}}{2}. \quad (12)$$

In this paper, the interface term I_h is replaced by an equivalent numerical flux $I_{h,q}$ given by (15), where the penalty term I_p given by (10) is rewritten using the mixed product invariance property, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, in order to respect the variational formulation based on the *div* operator

$$I_{h,q} = \int_f ([[\varphi_i]] \{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}\} + [[\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}]] \{\varphi_i\}) dA + I^P. \quad (13)$$

The penalty term I^P becomes

$$I^P = - \int_f a [[\boldsymbol{\varphi}]] \cdot [[\mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n}]] dA \quad (14)$$

with the penalized coefficient $a > 0$.

B. Thermal Problem

In the thermal problem, the equivalent interface term $I_{h,q}^T$, based on the symmetric interior penalty method [7], will be defined as follows:

$$I_{h,q}^T = - \int_f ([[\lambda \nabla \phi \cdot \mathbf{n}]] \{v\} - [[\lambda \nabla v \cdot \mathbf{n}]] \{\phi\}) dA + I^{P,T} \quad (15)$$

with the penalty term $I^{P,T}$ defined as

$$I^{P,T} = \int_f b [[v]] [[\phi]] dA \quad (16)$$

with penalty coefficient $b > 0$.

V. BOUNDARY CONDITIONS

In order to respect the physics, Neumann and Dirichlet boundary conditions must be imposed in accordance with the numerical fluxes developed previously. The associated boundaries in both the magnetic and thermal problems, respectively, are $\Gamma^{\mathcal{D}}$, $\Gamma^{\mathcal{D},\mathcal{T}}$ for the Dirichlet ones and $\Gamma^{\mathcal{N}}$, $\Gamma^{\mathcal{N},\mathcal{T}}$ for the Neumann ones. They are defined such that $\Gamma^{\mathcal{D}} \cap \Gamma^{\mathcal{N}} = \emptyset$, $\Gamma^{\mathcal{D},\mathcal{T}} \cap \Gamma^{\mathcal{N},\mathcal{T}} = \emptyset$, $\Gamma = \Gamma^{\mathcal{D},\mathcal{T}} \cup \Gamma^{\mathcal{N},\mathcal{T}}$, and $\Gamma = \Gamma^{\mathcal{D}} \cup \Gamma^{\mathcal{N}}$. The interface common to both neighboring elements K and K' is always assumed to belong to $\Gamma^{\mathcal{D}}, \Gamma^{\mathcal{D},\mathcal{T}}$ or $\Gamma^{\mathcal{N}}, \Gamma^{\mathcal{N},\mathcal{T}}$ on the side of K .

A. Magnetic Problem

In this problem, Dirichlet boundary condition, expressed as $\mathbf{H} = \mathbf{H}_a$ where \mathbf{H}_a is the applied magnetic field, will be applied on the boundary $\Gamma^{\mathcal{D}}$. Thus, the following jump term present on the penalized term of $I_{h,q}$:

$$\llbracket \mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathbf{u}_{K'} \times \mathbf{n}}{2}. \quad (17)$$

The quantities \mathbf{u}_K and $\mathbf{u}_{K'}$ are the approximation of the magnetic field \mathbf{H} over the neighboring elements K and K' , respectively. Meanwhile, the Neumann boundary condition $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, applied on $\Gamma^{\mathcal{N}}$, will give the following jump term present on the penalized term:

$$\llbracket \mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n} \rrbracket = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u}_{K'} \times \mathbf{n}}{2}. \quad (18)$$

B. Thermal Problem

In this problem, Dirichlet boundary condition, expressed as $T = T_a$ where T_a is the fixed temperature, imposed on the boundary $\Gamma^{\mathcal{D},\mathcal{T}}$. Thus, the following jump term present on the penalized term of $I_{h,q}^T$:

$$\llbracket v \rrbracket = \frac{T_a + v_{K'}^h}{2}. \quad (19)$$

The quantities v_K and $v_{K'}$ are the approximation of the temperature T over the neighboring elements K and K' , respectively. Meanwhile, the Neumann boundary condition $\text{grad}T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, applied on $\Gamma^{\mathcal{N},\mathcal{T}}$, will give the following jump term present on the penalized term:

$$\llbracket v \rrbracket = \frac{v_{K'}^l}{2}. \quad (20)$$

VI. NUMERICAL TREATMENT OF THE NON-LINEARITIES ARISING FROM THE POWER LAW

The non-linearities resulting from the superconducting sub-domain Ω_s electrical behavior of Ω_s will be dealt with explicitly.

The non-linear conductivity σ^{l-1} of the sub-domain Ω_s , evaluated at the previous time step t_p^{l-1} of the problem resolution, will be used to compute the problem at following time step t_p^l .

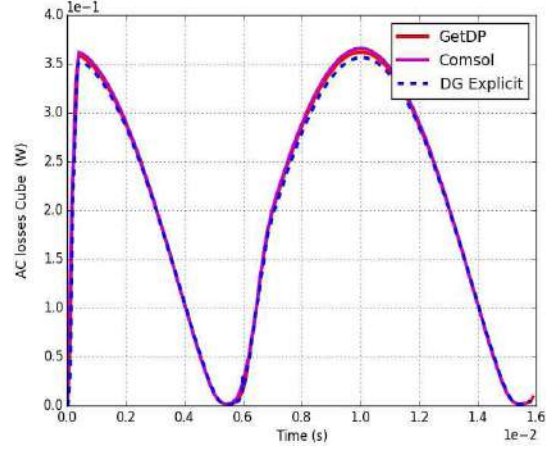


Fig. 1. AC losses in the non-thermal case of a superconducting cube subjected to an external magnetic field computed with GetDP, Comsol, and the DG method with the non-linear resistivity evaluated explicitly.

VII. NUMERICAL RESULTS

A superconducting cube of 2 mm side length, subjected to an external magnetic field $\mathbf{H}_a = H_m \sin(2\pi ft)\mathbf{e}_y$, will be modeled using both the non-thermal coupling and thermal coupling formulation with the DG method. The mesh size was about 21 000 elements. The computed ac losses will be compared with the ones obtained with an \mathbf{H} -formulation finite-element model implemented in GetDP and in Comsol Multiphysics. We add results obtained from Comsol Multiphysics, which is the most used software for superconductors modeling, as reference for all the validations.

A. Non-Thermal Coupling

The superconducting behavior of the cube is characterized by a critical electric field $E_c = 10^{-7}$ V/mm, a critical current density $J_c = 100$ A/mm² and a power law exponent $n = 10$. The magnetic applied flux density amplitude is $B_m = 2$ T with a frequency $f = 50$ Hz.

Computed ac losses, Fig. 1, are equivalent. A first-order backward Euler method was used as a time integrator and a timestep of 5 μ s for both approaches. More details on the computations parameters are given in Table I. Computations time are defined for a quarter of cycle. The allocated memory was about 1 GB for the new approach and about 3 GB for GetDP.

B. Thermal Coupling

The superconducting cube used in the non-thermal coupling case will be modeled such that there is simultaneously a thermal insulation and an external magnetic field $\mathbf{H}_a = H_m \sin(2\pi ft)\mathbf{e}_y$ on the air domain boundaries. Comparisons of the computed ac losses in this thermal case will be done using the numerical approaches investigated in the non-thermal coupling case.

The superconducting behavior of the cube is characterized by a critical electric field $E_c = 10^{-7}$ V/mm, an initial critical current density $J_{c0} = 100$ A/mm², a critical temperature $T_c = 82$ K and a power law exponent $n = 10$. The magnetic

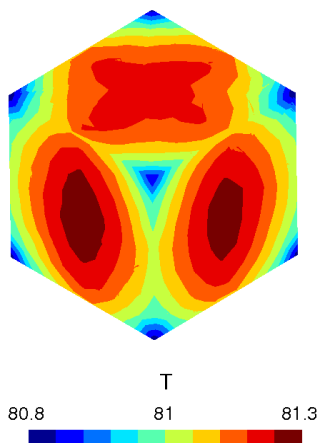


Fig. 2. Temperature distribution in Kelvins at $t = 20$ ms in the superconducting cube.

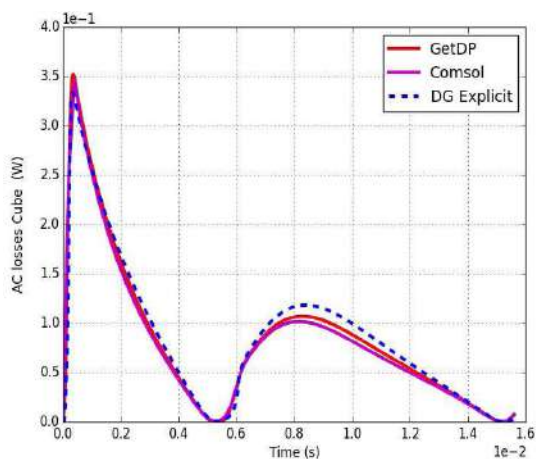


Fig. 3. AC losses in the thermal case of a superconducting cube subjected to an external magnetic field computed with GetDP, Comsol, and the DG method with the non-linear resistivity evaluated explicitly.

applied flux density amplitude is $B_m = 2$ T with a frequency $f = 50$ Hz.

While in the air domain, the thermal properties are the specific heat $c_{pa} = 2040$ J/(kg.K), the mass density $\rho_a = 8.08607$ kg/m³, and the thermal conductivity $\lambda_a = 0.139$ W/(m.K), the superconducting cube is characterized by a specific heat $c_{ps} = 3$ J/(kg.K), the mass density $\rho_s = 6300$ kg/m³, and the thermal conductivity $\lambda_s = 11$ W/(m.K). The initial temperature T_0 is set at 77 K.

Computed ac losses, Fig. 3, remain identical. A first-order backward Euler method was used as a time integrator and a timestep of $5 \mu\text{s}$ for both approaches. More details on the computations parameters are given in Table I. The allocated memory was about 1 GB for the new approach and about 3 GB for GetDP.

The distribution, shown in Fig. 2, illustrates the elevation of temperature, below the critical state, occurring in the superconducting cube.

TABLE I
COMPUTATIONS PARAMETERS

Case	Method	DOFs \mathbf{H}	DOFs T	Cores	Computation time
Non thermal	GetDP	23889	-	1	67 mn
	DG	252012	-	1	128 mn
			-	4	55 mn
			-	8	40 mn
Thermal	GetDP	23889	3277	1	116 mn
	DG	252012	84004	1	168 mn
				4	75 mn
				8	51 mn

VIII. CONCLUSION

The use of the DG method on the \mathbf{H} -formulation successfully model high-temperature superconductors whether thermal effects are neglected or not. With parallel computations, it gives us a scalable and distributed approach in terms of both memory allocation and diagonal block matricial system resolution.

Because of the local finite-element approach used on each element of the meshed domain, both the numerical treatments of the non-linearities and the mesh domain through partitioning are distributed through parallel computations.

Unlike the DG method applied on the \mathbf{E} -formulation [8], there is no need to compute analytically the demagnetization coefficients of the studied domain.

All those advantages make the DG method on the \mathbf{H} -formulation suitable for the 3-D modeling of complex and large superconducting systems in real applications settings.

REFERENCES

- [1] P. J. Masson, D. S. Soban, E. Upton, J. E. Pienkos, and C. A. Luongo, "HTS motors in aircraft propulsion: Design considerations," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 15, no. 2, pp. 2218–2221, Jun. 2005.
- [2] S. D. Chen *et al.*, "Design of a HTS magnet for application to resonant X-ray scattering," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 21, no. 3, pp. 1661–1664, Jun. 2011.
- [3] E. Zeldov, N. M. Amer, G. Koren, A. Gupta, M. W. McElfresh, and R. J. Gambino, "Flux creep characteristics in high-temperature superconductors," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 56, no. 7, pp. 680–683, 1990.
- [4] A. Bossavit, "Numerical modelling of superconductors in three dimensions: A model and a finite element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3363–3366, Sep. 1994.
- [5] F. Grilli *et al.*, "Finite-element method modeling of superconductors: From 2-D to 3-D," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 15, no. 1, pp. 17–25, Mar. 2005.
- [6] M. Zhang and T. A. Coombs, "3D modeling of high-Tc superconductors by finite element software," *Supercond. Sci. Tech.*, vol. 25, no. 1, pp. 15009–15016, 2012.
- [7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 39, no. 5, pp. 1749–1779, 2002.
- [8] A. Kameni, M. Boubekeur, L. Alloui, F. Bouillault, J. Lambrechts, C. Geuzaine, "A 3-D semi-implicit method for computing the current density in bulk superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, Feb. 2014, Art. no. 7009204.
- [9] A. Kameni, J. Lambrechts, J.-F. Remacle, S. Mezani, F. Bouillault, and C. Geuzaine, "Discontinuous Galerkin method for computing induced fields in superconducting materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 591–594, Feb. 2012.
- [10] M. J. Grote, A. Schneebeli, and D. Schötzau, "Interior penalty discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations: Energy norm error estimates," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 204, no. 2, pp. 375–386, 2007.

3.4 Modélisation des câbles supraconducteurs torsadés

Les câbles supraconducteurs ont été développés pour diverses applications telles que les moteurs, les transformateurs, les limiteurs de courant, les aimants ou encore les câbles de transmission d'énergie électrique. Ceux-ci sont notamment destinés à remplacer les câbles en cuivre. Avec ces nouveaux câbles il est possible de transporter une puissance cinq fois plus grande qu'avec les câbles classiques en cuivre. Ces câbles présentent aussi l'avantage d'occuper moins d'espace et permettent de réduire considérablement les pertes d'énergie qui sont de l'ordre de 10% avec les câbles conventionnels en cuivre [86]. Ils sont généralement constitués de plusieurs dizaines de filaments supraconducteurs fins intégrés à une matrice résistive qui sert de protection aux filaments contre d'éventuelles sollicitations mécaniques. Ceux-ci sont torsadés dans le but de concentrer les courants induits dans les filaments supraconducteurs et ainsi réduire les pertes Joule qui se développent dans la matrice résistive [25]. L'évaluation précise des pertes générées par ces câbles est importante pour améliorer le dimensionnement des systèmes. Les outils numériques permettant d'évaluer ces pertes doivent être robustes pour faire face à la complexité introduite par le torsadage des filaments et le comportement électrique non-linéaire du matériau.

La modélisation des câbles supraconducteurs s'est appuyée pendant plusieurs décennies sur des formules analytiques basées sur le modèle de Bean [23]. Depuis l'introduction des supraconducteurs à haute température critique dans la fabrication de ces câbles, ces travaux de modélisations s'appuient sur des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis [2]. La plupart des modèles numériques proposés sont bi-dimensionnels et permettent d'évaluer approximativement les grandeurs telles que les pertes ou l'aimantation de ces câbles avec une précision moindre [95, 94]. La précision de ces résultats peut être améliorée notamment avec l'utilisation de modèles tri-dimensionnels. Malheureusement, l'utilisation des méthodes de discrétisation telle que la méthode des éléments finis pour la modélisation tri-dimensionnelle de ces câbles est très coûteuse car les systèmes à résoudre sont grands, ce qui nécessite une importante puissance de calcul pour réaliser les opérations d'inversions matricielles. Dans des travaux récents, de telles simulations ont été réalisées sur des câbles supraconducteurs torsadés [37]. Ces travaux ont mis en évidence les coûts de calculs importants que requiert ce type de modélisation. Afin de réduire ces coûts de calcul, il devient indispensable de mettre en place des techniques permettant de réduire la taille des systèmes à résoudre. Nous avons réalisé des développements sur le thème de la réduction de modèle pour la modélisation de ces câbles supraconducteurs.

3.4.1 Modèle équivalent des filaments torsadés

L'idée exploitée pour construire ce modèle équivalent a été de transformer le problème initial, qui est celui d'un câble aux filaments torsadés soumis à champ magnétique de direction connue, en un problème équivalent, qui est celui d'un câble aux filaments droits soumis à un champ magnétique dont la direction subit une transformation correspondant au torsadage filaments. Cette approche permet de simplifier la construction de la géométrie, de réduire la taille du maillage et le temps de calcul. De plus, l'utilisation des filaments droits améliore le conditionnement des matrices ce qui a un impact positif sur la convergence de la résolution numérique. Ce travail a fait l'objet de l'article présenté ci-après **3-D Equivalent Model to Compute the Electro-Magnetic Behavior of Twisted Multi-Filamentary Superconductors Wires** publié dans la revue *IEEE Transactions On Magnetics*.

3-D Equivalent Model to Compute the Electro-Magnetic Behavior of Twisted Multi-Filamentary Superconductors Wires

L. Makong^{1,2}, A. Kameni¹, F. Bouillault¹, and P. Masson²

¹Group of electrical engineering-Paris, UMR 8507 CNRS, Supelec, Université Paris Sud, Université Pierre et Marie Curie, 91192 Gif-Sur-Yvette, France

²Department of Mechanical Engineering, University of Houston, Houston, TX 77204 USA

In this paper, we investigate new methods to model in 3-D, efficiently and simply, twisted multi-filamentary superconductors subjected to an external magnetic field. Several simulation cases, based on the H-formulation implemented in GetDP, will help derive through appropriate methods, such as changing the reference from where the problem is seen and described to a reference where everything becomes simple to deal with, a simple equivalent 3-D problem to solve efficiently and quickly.

Index Terms—Finite-element methods, high-temperature superconductors, Maxwell equations, multi-filamentary.

I. INTRODUCTION

SEVERAL high-temperature superconductivity applications, such as motors design for aircraft propulsion [1] and magnets design for medical imaging [2], use twisted multi-filamentary superconductors wire [3] for their windings.

Both the fine superconducting filaments structure and the twisting process greatly help reduce the ac losses by keeping the filaments as much uncoupled as possible. However, a numerical and precise evaluation of ac losses generated is complex even with the use of robust 3-D numerical tools [7]–[9].

Complexities encompass the highly non-linear electrical behavior of superconductors [5], [6] and the twisted superconducting filaments geometry. In order to compute efficiently the wire behavior, its meshed domain must require a mesh refinement on the curved parts of each twisted superconducting filaments. It will add more degrees of freedom to the already large matricial system derived. In addition, the wire model is not prone to the use of symmetry boundary conditions because of the twist transformation. The latter gives dissimilar meshed surfaces at the wire's top and bottom. The symmetry boundary conditions are essential to reduce the modeling of the complete wire. They can allow to model only a truncated part of the wire like a single twist pitch.

Thus, it is important to develop methods that simplify the problem of modeling twisted multi-filamentary superconducting wire. It will allow us to perform more in-depth design and optimization studies for real world applications such as superconducting machine design.

After a description of the problem, based on the \mathbf{H} -formulation [8] using the finite-element method, we investigate several simulation cases. The goal is to derive an equivalent simple 3-D problem to model quickly and precisely

the electro-magnetic behavior of twisted multi-filamentary superconducting wire subjected to an external magnetic field. All the models involved in this paper are implemented in the finite-element open source code GetDP [10].

II. PROBLEM DEFINITION AND FORMULATION

The studied domain Ω consists of a superconducting sub-domain Ω_s , which are all the filaments, embedded in a non-superconducting sub-domain Ω_{ns} . The non-superconducting sub-domain includes both the resistive matrix and the air domain around the entire wire.

In order to compute the electro-magnetic behavior of the studied wire, the \mathbf{H} -formulation will be implemented numerically using the finite-element method. The resulting variational formulation will consist in finding $\mathbf{H} \in H(\text{curl}; \Omega)$ such that

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \cdot \text{curl} \mathbf{H} \cdot \text{curl} \boldsymbol{\varphi} d\Omega + I^{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in H(\text{curl}; \Omega) \quad (1)$$

with the boundary term $I^{\mathcal{D}} = \int_{\Gamma^{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi} dA + \int_{\Gamma^{\mathcal{D}}} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_a) \cdot \boldsymbol{\lambda}' dA$. The external magnetic field \mathbf{H}_a is imposed on $\Gamma^{\mathcal{D}} \in \partial\Omega$ as a Dirichlet boundary condition using Lagrange coefficients $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\lambda}'$.

Both the unknown magnetic field \mathbf{H} and the basis vector function $\boldsymbol{\varphi}$ are projected along edges elements. It will ensure the continuity of the tangential component of the magnetic field.

Moreover, the non-linear electrical behavior of superconductors is characterized by a power law [6] with a non-linear resistivity in Ω_s

$$\rho = \frac{E_c}{J_c} \left\| \frac{\mathbf{J}}{J_c} \right\|^{n-1}. \quad (2)$$

The quantities E_c , J_c , and n are the critical electric field, the critical current density, and the power law index. However, the resistivity ρ will remain constant in both the resistive matrix and the air domain. Numerically, the associated power

Manuscript received June 27, 2017; accepted October 30, 2017. Corresponding author: L. Makong (e-mail: lmakonghellnkatack@uh.edu).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMAG.2017.2771438

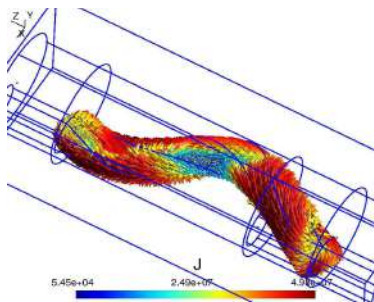


Fig. 1. 3-D current density distribution inside the filament at $t = T/4$ s.

law will be linearized in the variational formulation. It will allow stability and convergence of the problem using the finite-element method.

III. EFFECTS OF A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD ON A TWISTED MONO-FILAMENT SUPERCONDUCTING WIRE

A twist pitch of a mono-filament superconducting wire subjected to a sinusoidal transverse magnetic field is investigated. The wire, completely surrounded by an air domain, consists of a single twisted superconducting filament embedded in a Niobium matrix.

Finite-element methods' computations of this problem, using GetDP, gave an unexpected current density distribution inside the wire: three current loops locally created, as shown in Fig. 1.

This result, although not intuitively predictable, differs from the expected current distribution of a similar magnetic configuration applied to a straight mono-filament superconducting wire. One current loop will be created inside the straight filament.

Differences between a twisted and a straight filament subjected to a similar magnetic led us assume that the twisted superconducting filament observes, in the Frenet frame (\mathbf{T} , \mathbf{N} , and \mathbf{K}) moving along the resulting helical trajectory, a transverse magnetic field with a directional change. The resulting helical trajectory is associated with the geometric transformation of straight filaments into twisted filaments. \mathbf{T} , \mathbf{N} , and \mathbf{K} are, respectively, the unit vector tangent, the normal unit vector, and the binormal unit vector.

In order to confirm the previous assumption, a mathematical expression of the transformation is derived for numerical modeling purposes. The transformation assumes a fixed Frenet frame (\mathbf{T} , \mathbf{N} , and \mathbf{K}), where the twisted filament becomes a straight one.

While the initial frame (\mathbf{x} , \mathbf{y} , and \mathbf{z}) is assumed fixed before the transformation, it moves, after the transformation, along the resulting helical trajectory in the Frenet frame (\mathbf{T} , \mathbf{N} , and \mathbf{K}).

Such a transformation also applies to the physics of the domain. Because the new frame remains fixed, differential operators describing the domain's physics will remain unchanged. However, the external boundary conditions they are subjected to might likely change. For instance, the external magnetic field applied to the superconducting wire must be transformed in the new frame, as shown in Fig. 2.

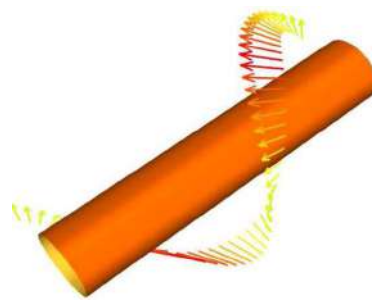


Fig. 2. 3-D filament subjected to a transverse magnetic field in the Frenet frame.

TABLE I
MODELS PARAMETERS

Quantity	Value
Filament radius (μm)	60
Matrix radius (mm)	0.4
Critical current density (A/mm^2)	5
Power law index n	10
Matrix conductivity (S/m)	$6 \cdot 10^9$
Magnetic field amplitude B_{max} (mT)	100 or 50
Frequency f (Hz)	50
Magnetic field norm	$B_m \sin(2\pi f)$

Thus the mathematical expression of the geometric transformation applied to the magnetic field \mathbf{H} will be the following:

$$\mathbf{H}_{[\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{K}]} = \begin{bmatrix} -a \cdot \sin(\theta) & a \cdot \cos(\theta) & b \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -b \cdot \sin(\theta) & b \cdot \cos(\theta) & -a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]} \quad (3)$$

with $a = r/L$, $b = c/L$, $\theta = z/c$, $c = p/2\pi$, and $L^2 = r^2 + c^2$. The helical trajectory parameters p and r are the twist pitch and the radius.

In the Frenet frame, we computed the current density distribution of the previously mentioned twisted mono-filament superconducting wire subjected to an external magnetic field. However, the applied magnetic field is now the transformed form of the external magnetic field used in the initial frame (\mathbf{x} , \mathbf{y} , and \mathbf{z}) shown in the previous case. We, therefore, have an external magnetic field with a directional change along the helical trajectory associated with the transformation, as shown in Fig. 2. A single current loop appeared inside the filament. The studied case computed in the Frenet frame is thus equivalent to the case of a straight mono-filament superconducting wire subjected to a unidirectional transverse magnetic field.

IV. VALIDATION OF THE GEOMETRIC TRANSFORMATION ON A TWISTED BI-FILAMENTS SUPERCONDUCTING WIRE SUBJECTED TO A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

The geometric transformation described above will be investigated for a twisted bi-filaments superconducting wire subjected to a transverse magnetic field. Both superconducting filaments are embedded in a Niobium matrix with an air domain surrounding both filaments and matrix. The model parameters are shown in Table I.

The validation goal is to compare modeling cases with and without the geometric transformation in order to check

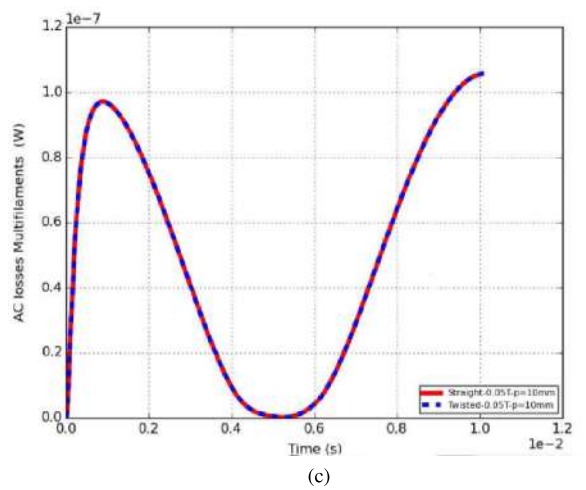
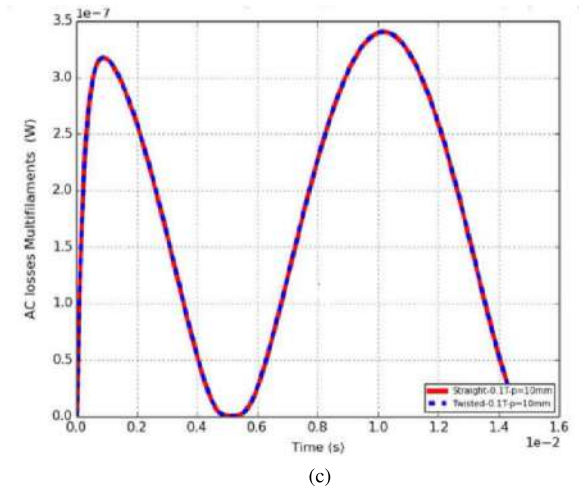
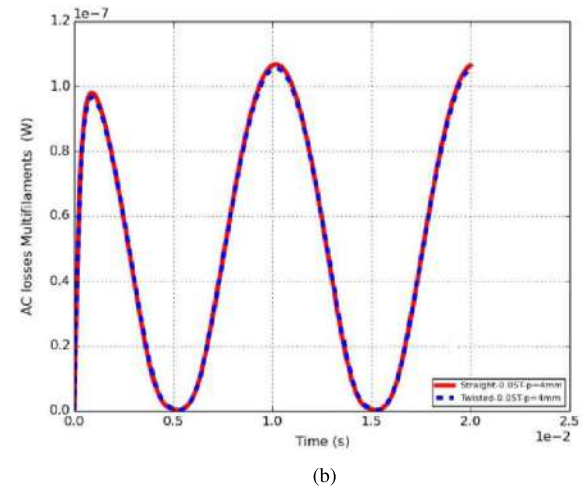
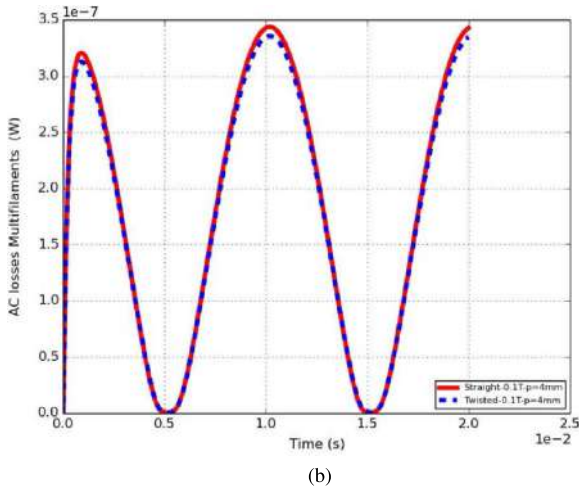
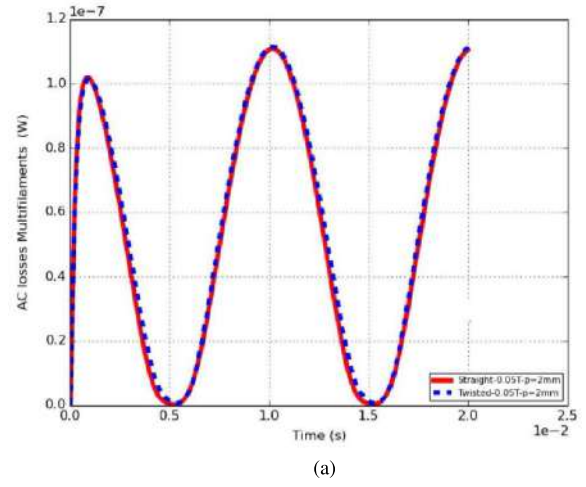
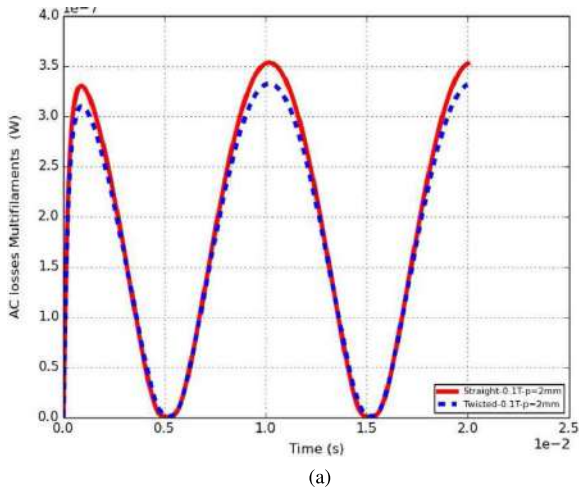


Fig. 3. AC losses comparison, with $B_{\max} = 100$ mT, of both twisted and its equivalent straight bi-filamentary superconductors in the initial (in blue) and Frenet frames (in red), respectively. (a) $p = 2$ mm. (b) $p = 4$ mm. (c) $p = 10$ mm.

Fig. 4. AC losses comparison, with $B_{\max} = 50$ mT, of both twisted and its equivalent straight bi-filamentary superconductors in the initial (in blue) and Frenet frames (in red), respectively. (a) $p = 2$ mm. (b) $p = 4$ mm. (c) $p = 10$ mm.

any equivalence results-wise. In both cases, it will involve a parametric study with the twist pitch p and the magnetic field amplitude B_{\max} as variables. While the twist pitch value will vary as 2, 4, and 10 mm, the magnetic field amplitude will either be 50 or 100 mT.

Comparisons of modeling cases will focus on the computed ac losses generated by the superconducting filaments. For each defined parameters p and B_{\max} , computed ac losses, in both modeling case in the initial frame and its associated transformed case in the Frenet frame, will be compared.

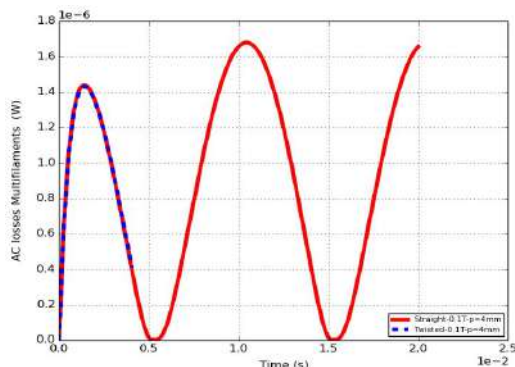


Fig. 5. AC losses comparison, with $B_{\max} = 100$ mT, of both twisted and its equivalent straight six-filament superconductors in the initial (in blue) and Frenet frames (in red), respectively.

A. Cases With $B_{\max} = 100$ mT

The superconducting filaments are fully penetrated by the current in this case. Moreover, we notice some discrepancies between ac losses in both the initial (in blue) and Frenet (in red) frames, as shown in Fig. 3. These discrepancies, though small, are mainly notable in cases where the twist pitch is small ($p = 2$ mm and $p = 4$ mm).

However, it is observed that these discrepancies are reducing with an increase of the twist pitch. Thus, we have an ac losses equivalence, for the given filament radius, in both the initial and Frenet frames when the twist pitch is 10 mm. This result is consistent with the fact that with a longer wire, the helical trajectory, described by the transformed magnetic field, is getting closer to a straight trajectory. It will thus lead to a transformed magnetic field equivalent to the transverse magnetic field in the initial frame.

B. Cases With $B_{\max} = 50$ mT

In this paper, there is no notable discrepancies between ac losses in both the initial (in blue) and Frenet (in red) frames, as shown in Fig. 4.

We have an ac losses equivalence in both the initial and Frenet frames regardless of the twist pitch length. Moreover, the superconducting filaments are not fully penetrated.

V. VALIDATION OF THE GEOMETRIC TRANSFORMATION ON A TWISTED MULTI-FILAMENTARY (SIX FILAMENTS) SUPERCONDUCTING WIRE SUBJECTED TO A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

In this case, we have a wire that includes six twisted filaments of radius $r_f = 50\mu\text{m}$ embedded in a Niobium matrix of radius $r_m = 0.6$ mm. The six filaments are distributed on two layers of radius $r_{l1} = 0.1$ mm and $r_{l2} = 0.35$ mm, respectively. Two filaments belong to the interior layer while the four left are located on the exterior one.

The magnetic properties of the problem are identical with the case of the twisted bi-filaments wire. Moreover, the magnetic field amplitude is set at 100 mT with a twist pitch of 4 mm.

As shown in Fig. 5, the computed ac losses in both the initial and the Frenet frame are equivalent for the studied case.

Moreover, it only took one week to compute the problem in the Frenet frame, whereas the computations, in the initial frame, lasted two weeks.

VI. CONCLUSION

In this paper, we investigated a geometric transformation, which simplifies the 3-D modeling of twisted multi-filamentary superconducting wires subjected to a transverse magnetic field. The transformation allows the study of the wires in the Frenet frame moving along the helical trajectory resulting from twisting filaments.

This change of frame has been extended to the case of twisted bi-filamentary superconducting. A parametric study based on the magnetic field amplitude and the twist pitch was done. We noticed an equivalence, regardless of the twist pitch, between the transformed problem and the initial one for small magnetic field. However, small discrepancies are present, especially for small twist pitch, when the magnetic field is high. In the case involving six filaments, we found a notable equivalence for a small twist pitch in high field.

This equivalence, through the described transformation, works for non-magnetic matrix only. This methodology also works for multi-filamentary wires with normal conductors as filaments. As shown in the case of a wire with six filaments, the transformed problem reduces greatly the computation time.

In this Frenet frame, the modeling of realistic twisted multi-filamentary superconducting wires will naturally be prone to the modeling of any truncated wires parts. In fact, the transformation conserves the physics along the wire due to the moving trajectory of the external magnetic field.

For the future works, the presented parametric study will be extended in order to characterize the influence of the filament radius.

REFERENCES

- [1] P. J. Masson, D. S. Soban, E. Upton, J. E. Pienkos, and C. A. Luongo, "HTS motors in aircraft propulsion: Design considerations," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 15, no. 2, pp. 2218–2221, Jun. 2005.
- [2] S. D. Chen *et al.*, "Design of a HTS magnet for application to resonant X-ray scattering," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 21, no. 3, pp. 1661–1664, Jun. 2013.
- [3] C. J. Christopherson and G. N. Riley, "Development of twisted high-temperature superconductor composite conductors," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 66, no. 17, pp. 2277–2279, 1995.
- [4] G. Meunier, G. Meunier, and P. Tixador, "Different formulations to model superconductors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 3445–3448, Jul. 2000.
- [5] C. P. Bean, "Magnetization of high-field superconductors," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, no. 1, pp. 31–39, 1964.
- [6] E. Zeldov, N. M. Amer, G. Koren, A. Gupta, M. W. McElfresh, and R. J. Gambino, "Flux creep characteristics in high-temperature superconductors," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 56, no. 7, pp. 680–683, 1990.
- [7] A. Bossavit, "Numerical modelling of superconductors in three dimensions: A model and a finite element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3363–3366, Sep. 1994.
- [8] F. Grilli *et al.*, "Finite-element method modeling of superconductors: From 2-D to 3-D," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 15, no. 1, pp. 17–25, Mar. 2005.
- [9] M. Costa *et al.*, "3D modeling of coupling between superconducting filaments via resistive matrix in AC magnetic field," *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, vol. 13, no. 2, pp. 3634–3637, Jun. 2003.
- [10] P. Dular and C. Geuzaine. *GetDP: A General Environment for the Treatment of Discrete Problems*. Accessed: May 5, 2017. [Online]. Available: <http://www.geuz.org/getdp>

3.4.2 Réduction du modèle équivalent

Le modèle réduit pour le calcul de pertes dans les câbles supraconducteurs multi-filaments torsadés découle du modèle équivalent avec des filaments droits proposé au paragraphe précédent. En effet pour un câble aux filaments droits, la section est identique en tout point de la hauteur, ce qui est simplifie l'utilisation des conditions périodiques. Dans nos développements, on a établi que, pour un câble dont la longueur est suffisamment grande, il suffit de déterminer les pertes sur une fine tranche de ce câble pour connaître les pertes sur l'ensemble du câble. Le modèle réduit de calcul de pertes dans les câbles supraconducteurs multi-filamentaires torsadés est défini sur une fine tranche de câble aux filaments droits, sur laquelle on impose des conditions de périodicité à ses extrémités. Ce travail et sa validation par comparaison à des mesures expérimentales ont été récemment proposés dans l'article ci dessous **Reduced model to computed losses of Twisted Multi-Filamentary Superconductors Wires** soumis et accepté pour publication dans la revue *IEEE Applied Superconductivity*.

Reduced model to compute AC losses of twisted multi-filamentary superconductors

A. Kameni¹, L. Makong¹, F. Bouillault¹, P. J. Masson²

¹ GeePs - Group of electrical engineering - Paris, UMR CNRS 8507, CentraleSupélec, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, Sorbonne Université, 11 rue Joliot-Curie, Plateau de Moulon 91192 Gif-sur-Yvette CEDEX, France.

²AML Superconductivity and Magnetics, 1720 Main St, Bldg 4, Palm Bay, FL-32905, USA

e-mails: abelin.kameni@geeps.centralesupelec.fr

Abstract—Classical numerical techniques remain very computationally expensive to model the magnetization of twisted multi-filamentary superconductors in 3D because of the required large system of equations to solve. In this paper a reduced model is proposed to approximate the AC losses of these types of wire. It is established through the projection of the physical problem in a helical Frenet basis and the use of periodic boundary conditions on a slice of the wire. The reduced model on the slice leads to systems of more reasonable size leading to smaller and faster simulations than when the whole wire is modeled. Simulation results show that the proposed method leads to computed losses similar to those obtained on a whole wire. Several simulation cases are proposed to prove the validity of the proposed model, and a comparison to some AC losses measurements is proposed to show the effectiveness of the proposed approach. The implementation relies on the H-formulation and is solved with the open-source solver Getdp.

Index Terms—Finite element method, H-formulation, modeling, AC losses, Twisted multi-filamentary superconductors.

I. INTRODUCTION

DURING the last two decades, superconducting materials are increasingly introduced in large scale applications such as, for example, magnetic resonance imaging, fault current limiter, superconducting motors and generators. Superconducting tapes and wires are often used to generate high magnetic fields without the need for magnetic cores in many of these applications, thus leading to more compact and efficient systems [1]. In the case of round wires, they usually consist of fine superconducting filaments embedded in a resistive matrix to protect them against mechanical strain and provide electro-thermal stability. The configuration of the wire is so that the transport current is carried entirely by the superconducting filaments while the resistive matrix only sees transient currents due to eddy currents, coupling losses or quench. To minimize the current in the matrix material, the superconducting filaments are twisted during manufacturing. It allows for a significant reduction of the coupling losses by keeping all the filaments as much uncoupled as possible [2]. A numerical and precise evaluation of AC losses generated in such wires is important for an effective design of superconducting machines and their appropriate cryogenic systems. Unfortunately, because of the complicated geometry (aspect ratio, multiple fine filaments, etc.), the fine filaments require a very fine mesh which, coupled to the non-linearity

introduced by the power law relation that characterizes the electric behavior of the superconducting materials, renders the use of classical techniques such as finite element method challenging and very expensive in terms of resources with computation times often of several weeks. However, some work proposes the use of periodic boundary conditions to reduce the computation domain [3]. In the proposed model, the length of the wire is reduced to one sixth of the twist pitch and periodic boundary conditions are used on the geometrically congruent end faces. Unfortunately, despite this length reduction, computational times still remain significant, reaching several days per simulation.

The aim of this paper is to propose a simplification of the 3D modeling of twisted multi-filamentary superconducting wires for fast and accurate AC losses computation. In our previous published work, we have proposed an equivalent model which consists in replacing the twisted wire by a straight one [4]. The geometry of this equivalent model is easier to define and the required mesh to accurately compute the losses are coarser than for a twisted geometry. Despite such simplifications, modeling of long twisted superconducting wires remains difficult and very computationally expensive despite the use of an equivalent model based on straight filaments. This is due to the great length of wires that leads to very large matrix systems to solve.

In this paper, an approach aimed at reducing the equivalent 3D problem size is proposed. This reduced model consists in modeling a slice of the straight wire with periodic boundary conditions at its ends. This work shows that it is possible to approximate the AC losses per unit length of the whole twisted superconducting wire by computations performed on a slice of the equivalent straight wire. As the reduced model is based on straight wire, the condition of geometrically congruent end faces needed to impose the periodic boundary conditions in [3] is no longer necessary, and the length of the slice can be very small. A validation of the results obtained by comparison to measurements is proposed to show relevance and effectiveness of this work. Note that in this paper AC losses refers to magnetization losses only. The numerical results proposed in this paper are obtained with a computer Intel Core i5, 2.3 Ghz, 16 Go RAM.

II. EQUIVALENT 3D MODEL OF TWISTED MULTI-FILAMENTARY WIRE

In previously published work [4], it has been shown that the model defined by a twisted multi-filamentary wire subjected to an external axial or transverse magnetic field (Figure.1) can be replaced by an equivalent one defined as a straight multi-filamentary wire subjected to an external magnetic field which initial direction undergoes a helical transformation such as the twist process (Figure 2). In other words, a twisted multi-filamentary wire subjected to an $\mathbf{H}_{[x,y,z]}$ magnetic field in the (x, y, z) frame become a straight multi-filamentary wire subjected to an $\mathbf{H}_{[T,N,K]}$ in the Frenet frame (T, N, K) . In accordance to the geometrical relation between the Frenet and cartesian frames (Figure 3), the external magnetic field $\mathbf{H}_{[T,N,K]}$ is obtained from the following relation:

$$\mathbf{H}_{[T,N,K]} = \begin{bmatrix} -a \sin \theta & a \cos \theta & b \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -b \sin \theta & b \cos \theta & -a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_{[x,y,z]} \quad (1)$$

with, $a = r/L$, $b = c/L$, $\theta = z/c$, $c = p/2\pi$ and $L^2 = r^2 + c^2$. The wire length is L and the helical trajectory parameters p , r are respectively the twist pitch and the radius.

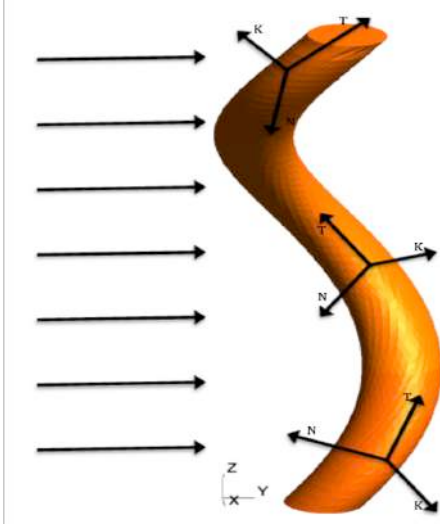


Fig. 1. A twisted superconducting filament subjected to a transverse magnetic field in the initial (x, y, z) frame

Note that, because the Frenet frame remains fixed, differential operators describing the domain's physics will remain unchanged, thus the same \mathbf{H} -formulation is solved in both frames. The weak form of this formulation is given by:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \psi d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\rho}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \psi) d\Omega + I^{Bnd} = 0 \quad (2)$$

where, Ω is the calculation domain, ρ is the resistivity, μ_0 is the permeability of the vacuum, I^{Bnd} is the boundary term and ψ is a test function taken in the functional space $H(curl, \Omega)$. The boundary term I^{Bnd} allows to impose the external magnetic field \mathbf{H}_a on the boundary $\Gamma = \partial\Omega$. It is

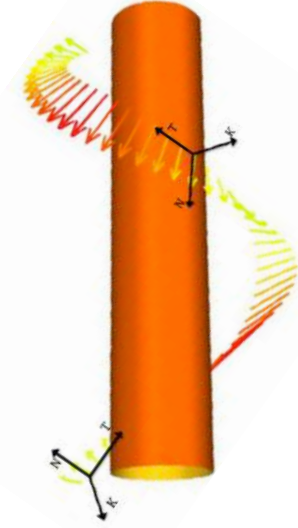


Fig. 2. The equivalent model of the twisted superconducting filament in the Frenet frame (T, N, K) : A straight superconducting filament subjected to a helical transverse magnetic field

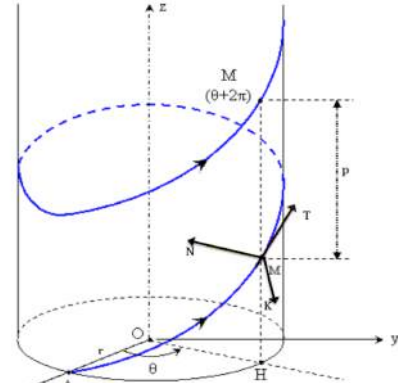


Fig. 3. Geometrical relation between the Frenet frame (T, N, K) and the cartesian frame (x, y, z)

a weak form of a Dirichlet boundary condition that uses the Lagrange coefficients λ and λ' defined in $H(curl, \Omega)$.

$$I^{Bnd} = \int_{\Gamma} \lambda \cdot \psi d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_a) \lambda' d\Gamma \quad (3)$$

The resistivity ρ has a constant value except in the superconducting filaments where it is described by a nonlinear relationship:

$$\rho = \frac{E_c}{J_c} \left\| \frac{\mathbf{J}}{J_c} \right\|^{n-1} \quad (4)$$

with, $E_c = 10^{-4}$ V/m, J_c the critical current density and n a power law exponent that characterizes the flux creep

phenomenon in superconducting material. The computations are performed using a finite element method of the open source Getdp [5]. The time integration scheme is an implicit Euler method combined with a Newton Raphson method to face up the non-linearity due to the resistivity in superconducting regions. The results presented in the previous work shows that AC losses and magnetizations are the same in both frames [4].

III. REDUCED MODEL TO COMPUTE AC LOSSES OF MULTI-FILAMENTARY SUPERCONDUCTORS

The computations of losses in twisted multi-filamentary superconductors can be performed with equivalent models of straight multi-filamentary superconductors. Unfortunately, even in the Frenet frame where the filaments are straight, cases of long wires with multiple twist pitch remain tedious to treat because the resulting matrix systems to solve are large.

A. From the whole wire model to model of twist pitch (length)

In the Frenet frame, thanks to the wire section geometric uniformity independent from height or position, an equivalent reduced model can be defined by using periodic boundary conditions over a single twist pitch. This is possible because the current induced and circulating inside the wire can be assumed identical for all the twists assuming that the wire is long enough that magnetic influence of its ends at its center are negligible. A precise evaluation of AC losses of a portion of the twist pitch length located at the wire center, can thus give a good enough approximation of the entire wire AC losses. In order to illustrate this, numerous simulation cases have been performed with a transverse magnetic field along y -axis of frequency $f = 100$ Hz and amplitude $B_{max} = 50$ mT. In these simulations, we used arbitrarily chosen values of the parameters of the superconducting filaments and the resistive matrix (Table.I).

The AC losses are computed in the Frenet frame where the filaments are straight. Firstly we find the minimum number of twist pitch necessary so that the AC losses per unit length evaluated on the whole wire, become equivalent to the ones given by the model of a single twist pitch with periodic boundary conditions imposed at its ends. Two cases of six twisted filaments wires of length $5p$ and $7p$ are considered, with p the twist pitch length Figure.4.

TABLE I
PARAMETERS OF A SIX-FILAMENT SUPERCONDUCTING WIRE EMBEDDED IN A CONDUCTIVE MATRIX

Quantity	Value
Twist pitch p (mm)	4
Wire length L_w (mm)	$5p$ or $7p$
Filament radius (μm)	50
Matrix radius (mm)	0.6
Critical current density (A/mm^2)	5
Power law exponent	10
Matrix conductivity (S/m)	$6e9$

As shown in Figure.5, the greater the number of twist pitches, the closer the AC losses per unit length are getting

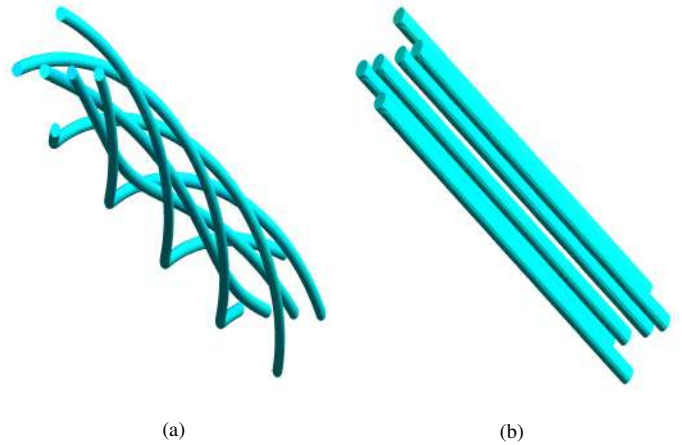


Fig. 4. (a) The initial twisted six filaments in (x, y, z) frame, (b) The straight six filaments wire in Frenet frame

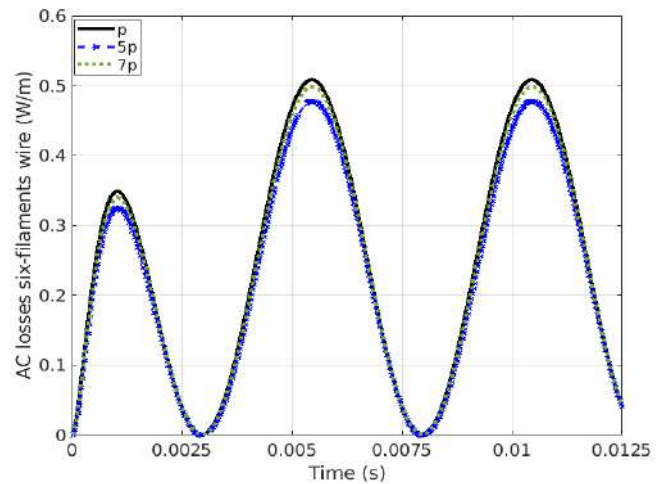


Fig. 5. Total ac losses comparison in the Frenet frame of a twisted six filaments superconducting wire and its truncated version subjected to a transverse magnetic field

to those of a single twist pitch length with imposed periodic boundary conditions. This is confirmed by the values of the dissipated energy per unit length by cycle. The obtained values are 2.55 J/Cycle.m for the periodic case of length p , 2.49 J/Cycle.m and 2.36 J/Cycle.m respectively for the wires of length $7p$ and $5p$. As the wire with multiple twist pitches gets longer, the wire portion of twist pitch length at its center is less influenced by the magnetic effects occurring at both the wire top and bottom ends.

B. Reduced model within the twist pitch length

Analyzing the current density distributions in the (x, y, z) frame, we noticed that all the filaments, whose portions of twist pitch length are located at the wire centers, exhibit current loops which are equally distributed. Focusing on a

slice of the wire located at the center of the central current loop, we note that the electric current density remains the same. A more reduced model can be defined considering a centered slice of the wire portion of twist pitch length in the Frenet frame with periodic boundary conditions imposed. To explain that, we firstly quote that the length of the model can be reduced to a quarter of twist pitch length because the magnetic field in the Frenet frame has a $\pi/2$ -periodicity. Now consider different slices of a filament portion of quarter twist pitch length. Each slice is subjected to an oblique magnetic field of the same amplitude. We note that problems define on slices are equivalent. Thus a reduced model of length below the twist pitch can be considered to approximately evaluate the AC losses per unit length of the whole wire. To illustrate this, simulation cases of two different slice lengths, $p/4$ and $p/16$, of a twisted six-filaments superconducting wire were performed with an applied transverse magnetic field along y -axis of frequency $f = 100$ Hz and amplitude $B_{max} = 50$ mT.

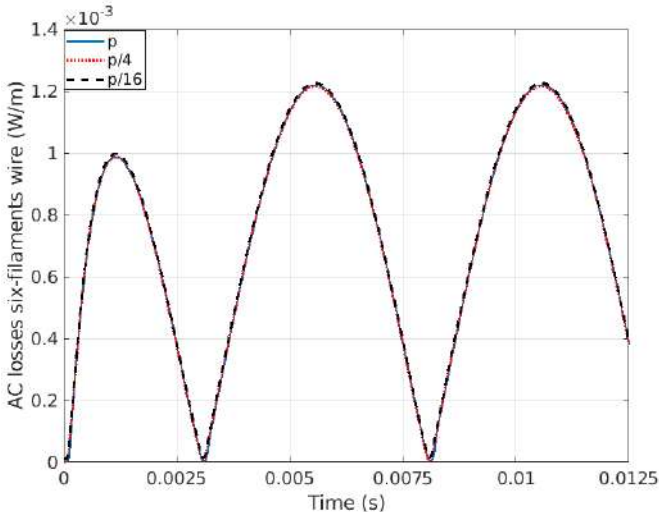


Fig. 6. Magnetization losses comparison of truncated six-filaments superconducting wire subjected to a transverse magnetic field along the y -axis

The results presented in Figure.6, show equality of AC losses obtained from the different truncated lengths $p/4$ and $p/16$. Thus we can reduce the problem of 3D modeling of long twisted multi-filamentary wire, under a given minimal number of twist pitch, in order to effectively evaluate at the wire center its equivalent AC power loss per unit length.

C. From the reduced 3D model to a pseudo-2D model

Specific 3D problems can also be reduced to pseudo-2D problems. In the Frenet frame, the applied magnetic field expressed in equation (1) can be simplified, with $\theta = \pi/2$ or $\theta = 3\pi/2$, as follows :

$$\mathbf{H}_{[T,N,K]} = \begin{bmatrix} \pm a & 0 & b \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm b & 0 & -a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_{[x,y,z]} \quad (5)$$

Thus, the pseudo-2D problem is only valid for cases where the external transverse magnetic field is only along the y -axis. For

other magnetic field configurations, the transformed field does not belong to the studied 2D-section plane. The final reduced model is a 2D section of the wire whose position along its length is defined such that the imposed magnetic field, moving along the helical trajectory, belongs to the xy plane. The AC power loss computed on wire sections located at $z = p/4$ ($\theta = \pi/2$) and ($z = 3p/4$) ($\theta = 3\pi/2$) are the same as the AC losses of the reduced model defined on a single twist pitch as shown in Figure.7.

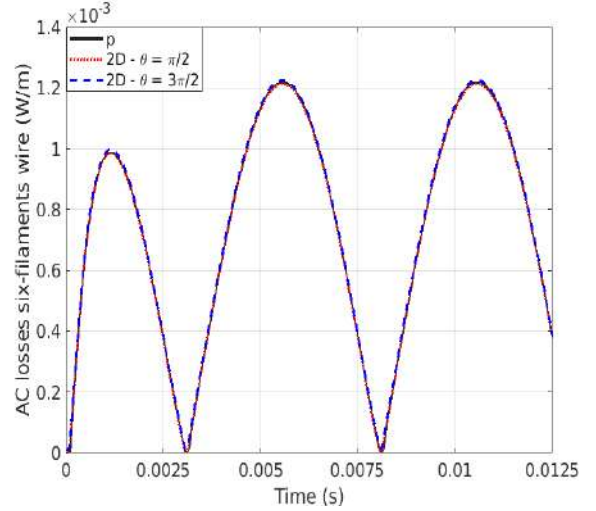


Fig. 7. Magnetization losses per unit length of a pseudo-2D representation in the Frenet frame of a truncated six-filaments superconducting wire subjected to a transverse magnetic field along the y -axis

IV. VALIDATION OF REDUCED MODEL

In the context of fully superconducting rotating machines using twisted multi-filamentary superconductors, the stator winding sees an elliptical magnetic field. The latter is a combination of alternating B_{alt} and rotating B_{rot} fields such as $B_{ell} = (1-k)B_{alt} + kB_{rot}$. where, $B_{alt} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

and $B_{rot} = \begin{pmatrix} B_0 \sin \omega t \\ B_0 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$, with the ellipticity coefficient $k \in [0, 1]$ and $\omega = 2\pi f$.

Magnetization losses generated by a round mono-core wire, under elliptical fields, were evaluated and analyzed using a 2D finite element model [10] [11]. Several numerical simulations were performed in order to improve the classical model by taking into account the contribution of the rotating component of the field on the magnetization losses. Beyond AC losses evaluation, the numerical results presented here are to enable a physical understanding of the electrical behavior of superconducting wires under such complex magnetic field configuration.

The numerical results are compared to measurements of AC losses carried out at the Center for Advanced Power Systems in Tallahassee (CAPS). These measurements were obtained on a sample of 100 MgB₂ wires of 20 cm length each manufactured

by Hypertech Research. Each wire have 54 twisted superconducting filaments whose manufacturer's parameters are given in Table II. The sample is subjected to elliptic magnetic fields with k varying from 0 to 1 (with a 0.2 step) and whose amplitude values are, $B_0 = 10\sqrt{2}$ mT for $f = 110$ Hz and $B_0 = 20\sqrt{2}$ mT for $f = 50$ Hz. The applied field was imposed by setting a well-defined current inside coils inside in which the sample is positioned such that the magnetic field is close to be uniform. The reduced models shorter than the twist pitch

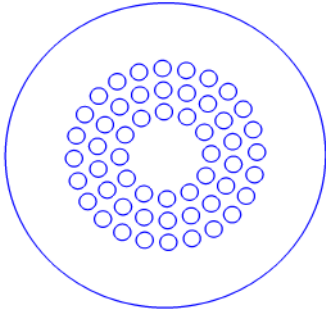


Fig. 8. Section of a wire of 54 twisted superconducting filaments

TABLE II
PARAMETERS OF THE WIRE OF 54 TWISTED SUPERCONDUCTING FILAMENTS

Quantity	Value
Twist pitch p (mm)	25
Filament radius (μm)	19
Matrix radius (mm)	0.35
Critical current density (A/mm^2)	2547
Power law exponent	4.42
Matrix CuNi conductivity (S/m)	$1e8$

length are used to perform numerical simulations allowing for fast and accurate calculation of AC losses. The simulations deal one wire of 54 twisted superconducting filaments. Wire slices of length $p/16$ and $p/2500$ are considered (Figure.8). The maximum element size in superconducting regions l_{c16} and l_{c2500} are defined such as, for the case $p/16$ there are four elements in filament length and for the case $p/2500$ there are two elements in filament length. The considered meshes for these computations are respectively 135000 elements for the case $p/16$ and 63000 elements for the case $p/2500$. Note that, if the maximum element size l_{c2500} is used in both cases, the number of mesh elements of the case $p/16$ is over a hundred times bigger. The time steps of the cases $f = 50$ Hz and $f = 110$ Hz are chosen such that the number of iterations per period is $N = 400$, this leads on computation times about $2h/\text{period}$ for the case $p/16$ and $1h/\text{period}$ for the case $p/2500$.

The instantaneous magnetization losses are computed based on the reduced model of length $p/16$. The results are presented for both cases $f = 50$ Hz and $f = 110$ Hz in Figure 9 and Figure 10 respectively. As we expected, greater the amplitude

of the magnetic field is, greater the obtained losses are. As found in [10] for a straight mono-core wire, we noted that the maximum losses are constant and obtained for $k = 1$.

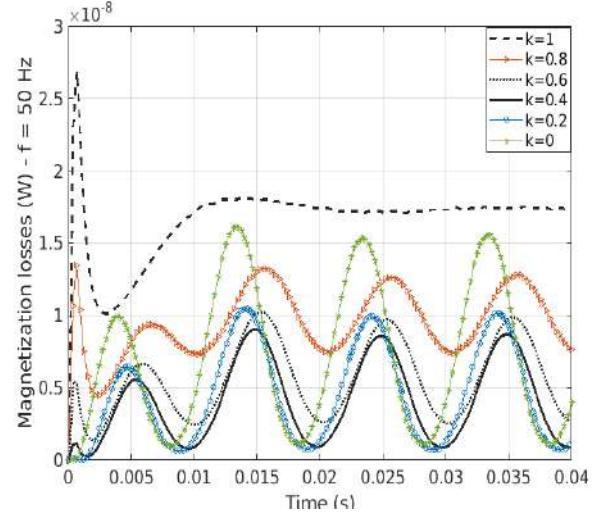


Fig. 9. Computed instantaneous magnetization losses of reduced models of the twisted 54-filaments wire subjected to an elliptic field of amplitude $20\sqrt{2}$ mT and frequency $f = 50$ Hz.

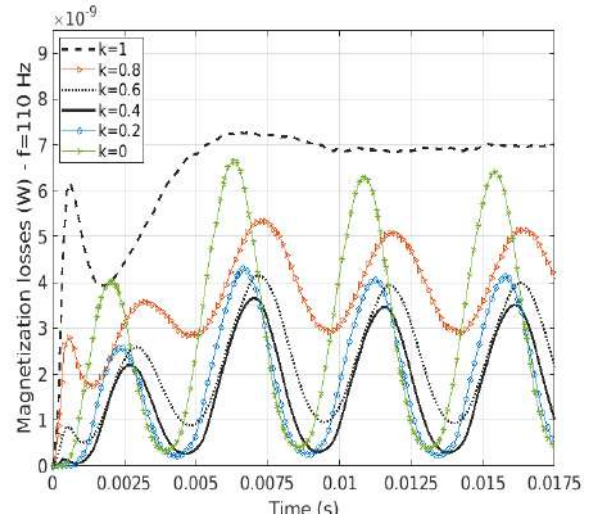


Fig. 10. Computed instantaneous magnetization losses of reduced models of the twisted 54-filaments wire subjected to an elliptic field of amplitude $10\sqrt{2}$ mT and frequency $f = 110$ Hz.

However, the AC losses evolution with respect to k does not remain the same. It is certainly due the twisted nature of the wire filaments geometry whose impact is translated to the magnetic field behavior of the wire. This result shows that the physical behavior of the studied wire is well captured by our numerical reduced models.

To compare numerical results to the measurements, the former are first computed on a wire of 54 filaments then extended to the whole sample of 100 wires. The dissipated energy values per unit cycle length computed for each k value are compared to the measurements. Results are presented for

$f = 50$ Hz and $f = 110$ Hz in Figure.11 and Figure.12 respectively.

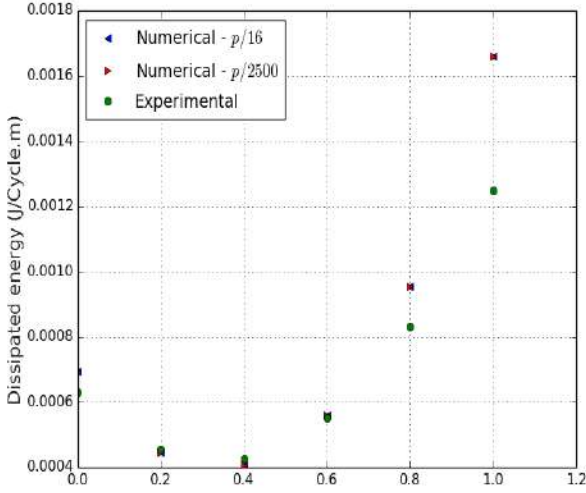


Fig. 11. Dissipated energy values per unit cycle length of a twisted 54—filaments wire subjected to an elliptic field at $f = 50$ Hz with an ellipticity factor $k \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

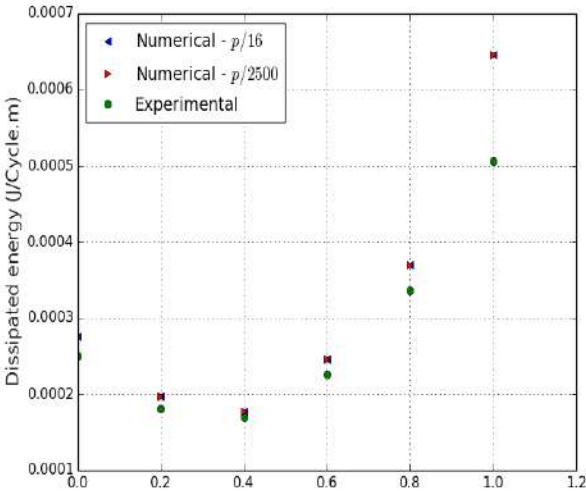


Fig. 12. Dissipated energy values per unit cycle length of a twisted 54—filaments wire subjected to an elliptic field at $f = 110$ Hz with an ellipticity factor $k \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

Both figures show that numerical results obtained with the reduced models of length $p/16$ and $p/2500$ are closed to the measurements except for the case $k = 1$. The latter case is where the applied magnetic field is purely rotating. With the lack of additional measurements data, more comparisons to the numerical model could not be performed in order to provide an explanation about the observed gaps for the case $k = 1$.

V. CONCLUSION

In conclusion, the model-order reduction proposed is able to capture in a simple way the physics involved in a complex

twisted multi-filamentary superconducting wire subjected to a complex magnetic configuration. Results are computed quickly and comparisons to experimental measurements show the validity of this approach.

VI. ACKNOWLEDGMENT

We would like to thank Professor Sastry Pamidi and his team for providing us the experimental datas used to validate our numerical approach.

REFERENCES

- [1] K. Haran and al *High power density superconducting rotating machines - development status and technology roadmap* Supercond. Sci. Technol., Vol. 30, number 12, 2017, Art. no. 123002.
- [2] C. J. Christopherson and G.N. Riley Jr *Development of twisted high temperature superconductor composite conductor*. Appl. Phys. Lett., Vol. 66, number 17, pp. 2277-2279, 1995.
- [3] G. Escamez and al *3-D Numerical Modeling of AC Losses in Multifilamentary MgB2 Wires* IEEE Trans. Appl. Supercond., Vol. 26, number 3, 2016, Art. no. 4701907.
- [4] L. Makong, A. Kameni, F. Bouillault, P. Masson *3D Equivalent Model to Compute the Electro-Magnetic Behavior of Twisted Multi-Filamentary Superconductors Wires* IEEE Trans. Magn., Vol. 54, number 3, 2018, Art. no. 7202904.
- [5] <https://gitlab.onelab.info/doc/models/wikis/Superconductors>
- [6] L. Makong, A. Kameni, F. Bouillault, P. Masson *Nodal discontinuous Galerkin method for high-temperature superconductors modeling based on the H-formulation* Inter. J. Num. Mod., Vol. 31, number 2, 2017, Art. no. 2298.
- [7] L. Makong, A. Kameni, F. Bouillault, P. Masson *H-Formulation Using the Discontinuous Galerkin Method for the 3-D Modeling of Superconductors* IEEE Trans. Magn., Vol. 54, number 3, 2018, Art. no. 7205204.
- [8] T. Satiramatekul, F. Bouillault, A. Devred, D. Leroy *Magnetization Modeling of Twisted Superconducting Filaments* IEEE Trans. Appl. Supercond., Vol. 17, number 2, pp. 3737-3740, 2007.
- [9] J. Zhao, Y. Li, Y. Gao *3D simulation of AC loss in a twisted multi-filamentary superconducting wire* Cryogenics, Vol. 84, pp. 60-68, 2017.
- [10] C. Lorin and P. Masson *Numerical analysis of the impact of elliptical fields on magnetization losses*. IEEE Trans. Appl. Supercond., Vol. 23, number 3, 2013, Art. no. 8201405.
- [11] J. Leclerc, L. Makong, C. Lorin, P. Masson *Artificial neural networks for AC losses prediction in superconducting round filaments* Supercond. Sci. Technol., Vol. 29, number 6, 2016, Art. no. 065008.
- [12] V. Zermeno, F. Grilli and F. Sirois *A full 3D time-dependent electromagnetic model for Roebel cables* Supercond. Sci. Technol., Vol. 26, number 5, 2013, Art. no. 052001.

Chapitre 4

Perspectives

Sommaire

4.1	Introduction	128
4.2	Modélisation de systèmes complexes	128
4.2.1	Méthode de décomposition de domaine	129
4.2.2	Méthode d'analyse d'incertitudes	129
4.3	Transmission d'énergie pour l'alimentation des systèmes	130
4.3.1	Transmission d'énergie sans fil	131
4.3.2	Transmission d'énergie sans pertes : câbles supraconducteurs	132

4.1 Introduction

Depuis mon recrutement en tant qu'enseignant-chercheur, mes travaux de recherche ont porté sur les enjeux tels que la fiabilité et l'innovation des systèmes. A partir de modèles numériques simulant des interactions entre les champs électromagnétiques et les systèmes, des problématiques sur la compatibilité et le contrôle électromagnétique des systèmes ont été traitées.

Avec l'évolution de la société, ces enjeux et les problématiques associées ont évolué car les dispositifs technologiques sont devenus plus complexes. En effet comme de nouvelles contraintes ont été introduites pour mieux protéger l'environnement et la santé, l'innovation technologique s'est intensifiée afin de pouvoir proposer de nouveaux dispositifs souvent bien plus complexes. Cette innovation technologique s'est réalisée notamment avec la mise en place de nouveaux procédés de fabrication et la diversification des matières premières. Ainsi, les sources d'énergies telles que le soleil, l'eau et le vent sont de plus en plus utilisées, et on rencontre plus souvent de nouveaux matériaux tel que les composites et les polymères dans la fabrication des ces nouveaux équipements. Il est alors important de maintenir un niveau de recherche conséquent autour des enjeux de sécurité et de fiabilité de ces nouveaux systèmes.

Mes perspectives de recherche à court et moyen terme s'inscrivent dans la continuité des travaux réalisés sur les questions de la fiabilité et de l'innovation des systèmes du génie électrique. L'objectif est de poursuivre la construction et l'exploitation de modèles d'interactions des champs électromagnétiques avec les systèmes pour répondre aux problématiques induites par ces questions, notamment celles liées à leurs alimentations en énergie. Ces modèles doivent s'appuyer sur des outils de calculs adaptés au traitement de systèmes complexes. Ils doivent prendre en compte les nouveaux éléments entrant dans leur fabrication tels que, les nouveaux matériaux, les nouvelles techniques de fabrication, et nouvelles sources d'alimentation de ces dispositifs. L'implémentation de ces modèles va consister à intégrer, dans les approches numériques adéquates, les lois caractérisant ces nouveaux éléments. Les travaux envisagés ayant pour socle la modélisation électromagnétique et multi-physique, s'inséreront naturellement dans la nouvelle structure du laboratoire GeePs proposée pour la période 2020 – 2025.

4.2 Modélisation de systèmes complexes

La complexité des nouveaux dispositifs du génie électrique a fait en sorte que les approches numériques classiques deviennent moins adaptées pour réaliser les travaux de modélisations nécessaires. L'utilisation des nouveaux matériaux nécessitant une description fine de l'évolution des grandeurs électromagnétiques vient complexifier ces modèles numériques. Bien souvent les approches classiques telles que la méthode des éléments finis ne conviennent plus pour

la modélisation, car les systèmes linéaires à résoudre sont très grands, les paramètres à faire varier sont trop nombreux et les lois d'évolutions de ces matériaux sont trop complexes. Une partie de mes travaux de recherches futurs va consister à rechercher les approches efficaces ayant fait leurs preuves dans d'autres domaines scientifiques pour la modélisation de systèmes complexes et de les appliquer pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques du génie électrique. Dans les paragraphes qui suivent, je vous présente brièvement quelques approches sur lesquelles je travaillerai dans un premier temps, qui viendront s'ajouter aux outils déjà en place, pour élargir le panel des problématiques pouvant être abordées.

4.2.1 Méthode de décomposition de domaine

Lorsque la modélisation des systèmes débouche sur de très grands systèmes à résoudre, une approche classique tel que la méthode des éléments finis est limitée par l'espace mémoire nécessaire pour la mise en place de la résolution numérique. Pour réduire cette dépendance, des techniques de décomposition de domaine sont mises en oeuvre. L'utilisation de ces techniques s'est accrue ces dernières années et elles ont été implémentées avec succès pour résoudre des problèmes de propagation d'ondes gouvernés par l'équation de Helmholtz [43, 112].

La méthode de décomposition des domaines consiste à découper le domaine d'étude en plusieurs sous domaines, à résoudre le problème itérativement sur chaque sous domaine par la méthode des éléments finis en spécifiant des conditions de transmission pour transporter l'information entre les sous domaines. Ainsi, comme à chaque itération le problème est résolu sur un sous domaine, il y a moins d'inconnues à déterminer ce qui nécessite moins d'espace mémoire.

Le travail à mettre en place sera d'utiliser cette approche pour la résolution des équations de Maxwell en domaine fréquentiel sur différentes configurations géométriques tri-dimensionnelles. Les premiers développements en ce sens ont été amorcés à travers un stage de fin d'étude de cycle ingénieur réalisé par Xavier Adriaens, sur l'optimisation d'un capteur intra-corporel pour la transmission de données médicales. Pour la suite des travaux autour de cette approche, on pourra s'appuyer sur des collaborations existantes notamment avec, l'équipe ACE du Pr Christophe Geuzaine de l'Institut Montéfiore de Liège, et le Dr. Bertrand Thierry du laboratoire Jacques-Louis Lions.

4.2.2 Méthode d'analyse d'incertitudes

Le dimensionnement de certains dispositifs du génie électrique s'opère bien souvent grâce à des travaux de modélisation dont l'un des objectifs est de fournir les paramètres optimaux qui serviront pour l'analyse du système. On a alors recours dans la majorité des cas à des méthodes

d'optimisation pour déterminer ces valeurs optimales de paramètres. Cette optimisation nécessite souvent de répéter les simulations en faisant varier successivement ou simultanément plusieurs paramètres intervenant dans le modèle. Lorsque le système linéaire à résoudre à chaque simulation est grand, la répétition des simulations rend ce travail de dimensionnement fastidieux. Pour limiter le nombre de simulations à réaliser, une solution est de mettre en place des méthodes analyses d'incertitude. Ce type d'approche a été utilisé avec succès dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou encore la météorologie [21, 22].

Une méthode d'analyse des incertitudes consiste à déterminer comment les incertitudes sur les variables d'entrée se propagent sur les variables de sortie d'un système. Elle a pour but d'optimiser les variables du système, celles-ci pouvant être des entrées ou des sorties. Lorsqu'on ne dispose pas d'assez de jeux de données entrées/sorties, par exemple à cause des difficultés à réaliser les mesures ou à cause du coût de simulation trop important, on a recours à des méta-modèles qui permettent d'estimer à moindre coût, par des processus d'interpolation, de nouveaux jeux de données entrées/sorties.

Le travail à mettre en place sera de construire les méta-modèles que l'on associera à certains modèles d'interactions champs/structures en se servant des techniques tel que le krigeage, les polynômes chaos ou encore les réseaux de neurones. On portera une attention particulière aux développements par les réseaux de neurones car ceux-ci constituent une ouverture vers des problématiques d'analyses de données massives (big data), de plus en plus utilisée dans des travaux de maintenance prédictive des équipements industriels. Les premiers développements en ce sens ont été amorcés à travers le contrat postdoctoral réalisé par Ludovic Makong dans le cadre du projet européen MICEV (www.micev.eu).

4.3 Transmission d'énergie pour l'alimentation des systèmes

L'énergie électrique a pris une place importante dans les sociétés d'aujourd'hui et est devenue un minimum requis pour le bien être des populations. L'approvisionnement de nos villes, de nos maisons ou encore de nos équipements est devenue primordial, et est l'un des enjeux les plus importants de ce siècle. Les réseaux de câbles et de fils électriques font partie de notre environnement et les chargeurs pour nos différents appareils électro-portatifs sont devenus des éléments nécessaires au quotidien. Se passer de ces réseaux filaires serait un gain important en terme d'esthétique et surtout pour l'environnement notamment par la réduction de pollution électromagnétique émise par ces câbles et l'économie en matières premières utilisées pour leur fabrication. Pour réduire la voilure du réseau de câbles dans nos sociétés de demain, les chercheurs et industriels s'intéressent aux dispositifs de transfert d'énergie sans contact et de transfert d'énergie sans pertes. C'est notamment autour de ces deux axes de travail que j'orien-

terai mes développements numériques.

4.3.1 Transmission d'énergie sans fil

La transmission d'énergie sans fil est un domaine en pleine expansion grâce notamment, au développement des systèmes électroportatifs pour le grand public, à l'utilisation croissante des systèmes électroniques implantables dans le milieu médical, à la complexité de certains dispositifs qui les rendent peu ou pas accessibles pour une alimentation filaire. Les systèmes permettant d'alimenter en énergie électrique sans support matériel sont au centre du développement de nombreux dispositifs tels que les voitures électriques ou encore les implants médicaux. Les recherches sur ce thème ont mis en évidence différents principes permettant le transfert d'énergie sans contact dont les plus utilisés sont le couplage inductif et la propagation des ondes électromagnétiques. La méthode inductive est basée sur le principe d'induction, le transfert d'énergie s'opérant entre deux bobines, l'une d'émission et l'autre de réception qui est placée sur le dispositif à alimenter. Dans cette méthode, le transfert de l'énergie se fait en utilisant les ondes en champ proche et les fréquences de travail atteignent au maximum la centaine de kHz. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que le couplage n'a lieu qu'entre les deux bobines ce qui réduit les effets d'interaction avec d'autres objets pouvant se trouver dans l'environnement immédiat. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est très limitée par la distance de transmission. Le transfert d'énergie par propagation des ondes électromagnétiques (micro-ondes) est basé sur le principe d'émission et de réception par des antennes. A la différence de la technique inductive, celle-ci permet d'alimenter des dispositifs sur des distances aussi bien courtes que très longues. Elle a donc l'avantage d'être adaptable à des applications diverses. Le principal désavantage de cette méthode vient de l'interaction des ondes qui se propagent avec les objets se trouvant dans l'environnement proche, ce qui peut créer des pertes considérables d'énergie.

Dans nos sociétés de demain, on prévoit une explosion de l'utilisation des dispositifs de transmission d'énergie sans fil. Ceci implique de nombreuses questions notamment celles, de la cohabitation de ces systèmes, de l'impact du rayonnement électromagnétique de ceux-ci sur l'environnement et la santé. Dans mes travaux futurs, je développerai des modèles permettant d'analyser ces questions. Les modèles à mettre en place seront complexes, par la nature des éléments à modéliser (voiture, corps humain,...), des différentes échelles de ceux-ci (du millimètre au mètre) ou encore des gammes de fréquences étudiées (de la dizaine de kHz à la dizaine de GHz). Ces modèles qui conduiront à la résolution de grands systèmes d'équations s'appuieront, sur les approches numériques utilisées antérieurement comme la méthode de Galerkin discontinue, sur des approches numériques envisagées par la suite comme la méthode de décomposition de domaines, et sur les techniques de analyse des incertitudes et notamment les méta-modèles

afin d'éviter la répétition des simulations lourdes et coûteuses. Ces modèles seront mis en place dans le but d'apporter des réponses à des problématiques de protection et de fiabilité de systèmes d'alimentation sans fil. Pour ces travaux futurs, je profiterai de la fusion du GeePs avec le Laboratoire d'Electronique et Electromagnétisme (L2E) qui développe de nombreuses activités autour des micro-ondes, je m'appuierai sur des collaborations existantes et il sera nécessaire d'établir de nouvelles notamment avec des acteurs industriels comme les équipementiers de l'automobile (Faurecia, Valeo, ...).

4.3.2 Transmission d'énergie sans pertes : câbles supraconducteurs

L'un des intérêts de l'utilisation des matériaux supraconducteurs est que ceux-ci peuvent conduire du courant sans pertes Joule. C'est pour cela qu'ils sont aujourd'hui introduit dans de nombreux dispositifs du génie électrique afin de réduire les pertes énergétiques. C'est notamment le cas des câbles supraconducteurs dont l'utilisation a connue un essor important ces dernières années. L'évolution des procédés de fabrication de ces câbles font qu'il existe de plus en plus de dispositifs les utilisant. Parmi ces dispositifs on peut citer les moteurs supraconducteurs, les limiteurs de courant ou encore les câbles de transport d'énergie.

Nous avons vu dans nos travaux que la modélisation des dispositifs utilisant des câbles supraconducteurs est difficile à mettre en place à cause des coûts de calcul importants. Nous avons proposé un modèle réduit permettant d'évaluer les pertes dans ceux-ci. Mais ces modèles requierent la résolution de problèmes 3D sur des structures hétérogènes constituées de plusieurs zones supraconductrices et plusieurs zones normales. Afin de simplifier encore plus l'étude de ces câbles, je développerai un axe de recherche autour des techniques d'homogénéisation magnétique à mettre en place pour remplacer dans nos modèles numériques de calcul de champs électromagnétiques, le câble multi-filament par un câble mono-filament ayant le même comportement et les mêmes performances. On s'inspirera des travaux d'homogénéisation magnétique qui ont été mise en place pour étudier des empilements de rubans supraconducteurs [124]. Dans ces travaux, ces empilements sont remplacés par un supraconducteur massif anisotrope, ce qui simplifie considérablement la mise en place du modèle numérique.

Pour mener ces développements on utilisera les outils numériques mis en place pour le calcul de champs dans les supraconducteurs, on s'appuiera sur l'expertise du GeePs dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux magnétiques, et il sera nécessaire de mettre en place des collaborations avec des acteurs industriels spécialisés dans la fabrication de ces câbles (Nexan, NKT,...).

Bibliographie Manuscript

- [1] Lotfi Alloui, Frédéric Bouillault, Laurent Bernard, Jean Leveque, and Sourî-Mohamed Mimoune. "3d modeling of forces between magnet and hts in a levitation system using new approach of the control volume method based on an unstructured grid". *Physics C : Superconductivity*, 475 :32–37, 2012.
- [2] Naoyuki Amemiya, Shun ichi Murasawa, Nobuya Banno, and Kengo Miyamoto. "numerical modelings of superconducting wires for ac loss calculations". *Physics C : Superconductivity*, 310(1-4) :16–29, 1998.
- [3] Bruce Archambeault, Omar Ramahi, and Colin Brench. *EMI/EMC Computational Modeling Handbook*. Springer, 1998.
- [4] Renzo Azaro, Salvatore Caorsi, Massimo Donelli, and Gian Luigi Gragnani. "a circuital approach to evaluating the electromagnetic field on rectangular apertures backed by rectangular cavities". *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 50(10) :2259–2266, 2002.
- [5] Charles Bean. "magnetization of high-field superconductors". *Reviews of Modern Physics*, 36(1) :31 – 38, 1964.
- [6] Peter Benner, Pablo Ezzatti, Enrique Quintana-Orti, and Alfredo Remon. "matrix inversion on cpu-gpu platforms with applications in control theory". *Concurrency and Computation : Practice and experience*, 25 :1170–1182, 2013.
- [7] Fethi Benyoubi, Lionel Pichon, Mohamed Bensetti, Yann Le Bihan, and Mouloud Feliachi. "an efficient method for modeling the magnetic field emissions of power electronic equipment from magnetic near field measurements". *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 59(2) :609–617, 2017.
- [8] Jean-Pierre Berenger. "a perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200, 1994.
- [9] Jean-Pierre Berenger. "three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics*, 127(2) :363–379, 1996.
- [10] Jean-Pierre Berenger. *Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics*. Morgan & Claypool, 2007.
- [11] Kevin Berger. *Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les Supraconducteurs à Haute Température*. PhD thesis, Université Henri-Poincaré de Nancy, 9 2006.
- [12] Marc Bernacki, Loula Fezoui, Stephane Lanteri, and Serge Piperno. "parallel discontinuous galerkin unstructured mesh solvers for the calculation of three-dimensional wave propagation problems". *Applied Mathematical Modelling*, 30(8) :744–763, 2006.
- [13] Dimitri Bertsekas. *Parallel and Distributed Computation : Numerical Methods*. Athena Scientific, 2015.
- [14] Raghu Bhattacharya and Parans Paranthaman. *High Temperature Superconductors*. Wiley-VCH, 2010.
- [15] Gianni Blatter, Mikhail Feigel'man, Vadim Geshkenbein, Anatoly Larkin, and Valerii Vinokur. "vortices in high-temperature superconductors". *Reviews of Modern Physics*, 66(4) :1125, 1994.

- [16] Steffen Borm. *Efficient numerical methods for non-local operators : \mathcal{H}^2 -matrix compression, algorithms and analysis*. European Mathematical Society, 2010.
- [17] Alain Bossavit. "numerical modelling of superconductors in three dimensions : A model and a finite element method ". *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5) :3363 – 3366, 1994.
- [18] Mohamed Boubekeur. *Evaluation de l'efficacité de blindage de structures avec plaques minces : modélisation par une méthode de Galerkin discontinue*. PhD thesis, Université de Paris Sud, 12 2014.
- [19] Roberto Brambilla, Francesco Grilli, and Luciano Martini. "development of an edge-element model for ac loss computation of high-temperature superconductors". *Superconductor Science and Technology*, 20(1) :16–24, 2007.
- [20] Ernst Brandt. "superconductors of finite thickness in a perpendicular magnetic field : Strips and slabs". *Physical Review B*, 54(6) :4246 – 4264, 1996.
- [21] De Dan Cacuci, Mihaela Ionescu-Bujor, and Ionel Michael Navon. *Sensitivity and Uncertainty Analysis, Volume I : Theory*. Taylor & Francis, 2005.
- [22] De Dan Cacuci, Mihaela Ionescu-Bujor, and Ionel Michael Navon. *Sensitivity and Uncertainty Analysis, Volume II : Applications to large-scale systems*. Taylor & Francis, 2005.
- [23] Walter James Carr. *AC loss and macroscopic theory of superconductors*. Taylor & Francis, 2001.
- [24] Du-Xing Chen. "kim model for magnetization of type ii superconductors". *Journal of Applied Physics*, 66(6) :p.523 – 542, 1989.
- [25] Craig Christopherson and Gilbert Riley. "development of twisted high temperature superconductor composite conductors". *Applied Physics Letters*, 66(17) :2277–2279, 1995.
- [26] Law-Kam Cio, Yann-Meing, Damien Tageddine, and Steven Dufour. "a 3-d numerical modeling for the magnetization of superconductors using a local discontinuous galerkin finite element method". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, doi.10.1109/TMAG.2019.2907665, 2019.
- [27] Vincenzo Cirimele, Freschi Fabio, Giaccone Luca, Lionel Pichon, and Maurizio Repetto. "human exposure assessment in dynamic inductive power transfer for automotive applications". *IEEE Transactions on Magnetics*, 53(6) :5000304, 2017.
- [28] Marcus Clemens and Thomas Weiland. "discrete electromagnetism with the finite integration technique". *Progress In Electromagnetics Research*, 32 :65–87, 2001.
- [29] Bernardo Cockburn. *Discontinuous Galerkin methods for Computational Fluid Dynamics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [30] Francis Collino, Thierry Fouquet, and Patrick Joly. "conservative space-time mesh refinement methods for the fdtd solution of maxwell's equations". *Journal of Computational Physics*, 211(1) :9–35, 2006.
- [31] Abia Dahia, Yann Le Bihan, Éric Berthelot, and Laurent Daniel. "a model-based method for the characterisation of stress in magnetic materials using eddy current non-destructive evaluation". *Journal of Physics D*, 48(19) :195002, 2015.

- [32] Laurent Daniel. "an equivalent strain approach for magneto-elastic couplings". *IEEE Transactions on Magnetics*, 53(6) :1–4, 2017.
- [33] Laurent Daniel, Olivier Hubert, and Mahmoud Rezik. "a simplified 3d constitutive law for magneto-mechanical behaviour". *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3) :7300704, 2015.
- [34] Pinging Ding, Lionel Pichon, Laurent Bernard, and Adel Razek. "electromagnetic fields in human body by wireless inductive system". *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 34(2) :590–595, 2015.
- [35] Michael Dumbser, Martin Käser, and Eleuterio Toro. "an arbitrary high-order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes : Local time stepping and p–adaptivity". *Geophysical Journal International*, 171(2) :695–717, 2007.
- [36] Marc Durufle, Housseem Haddar, and Patrick Joly. "higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems". *Compte Rendus de Physique*, 7(5) :533–542, 2006.
- [37] Guillaume Escamez and al. "3d numerical modeling of ac losses in multifilamentary mgb2 wires". *IEEE Transactions on applied superconductivity*, 26(3) :1–7, 2016.
- [38] Hassan Fahs. "high-order discontinuous galerkin method for time-domain electromagnetics on non-conforming hybrid meshes". *Mathematics and Computers in Simulation*, 107 :134–156, 2015.
- [39] Hassan Fahs and Stephane Lanteri. "a high-order non-conforming discontinuous galerkin method for time-domain electromagnetics". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(4) :1088–1096, 2010.
- [40] Mauro Feliziani and Francesca Maradei. "edge element analysis of complex configurations in presence of shields". *IEEE Transactions On Magnetics*, 33(2) :1548–1551, 1997.
- [41] Mauro Feliziani, Francesca Maradei, and Gabriele Tribellini. "field analysis of penetrable conductive shields by the finite-difference time-domain method with impedance network boundary conditions (inbcs)". *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 41(4) :307 – 319, 1999.
- [42] Maud Franchet, Nicolas Ravot, and Odile Picon. "soft fault detection in cables using the cluster time-frequency domain reflectometry". *IEEE Electromagnetic Compatibility Magazine*, 2(1) :54 – 69, 2013.
- [43] Martin Gander and Laurence Halpern. "méthode de décomposition de domaine". *Encyclopédie électronique pour les ingénieurs*, 2012.
- [44] Fedor Gomory. "characterization of high-temperature superconductors by ac susceptibility measurements". *Superconductors Science and Technology*, 10(8) :523 – 542, 1997.
- [45] Francesco Grilli, Roberto Brambilla, Frédéric Sirois, Antti Stenvall, and Steeve Memia-ghe. "development of a three-dimensional finite-element model for high-temperature superconductors based on the h-formulation". *Cryogenics*, 53 :142–147, 2013.

- [46] Gregor Gronau and Ingo Wolff. "a simple broad-band device de-embedding method using an automatic network analyzer with time-domain option". *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 37(3) :479–483, 1989.
- [47] Bernard Hanouz et and Muriel Sesques. "absorbing boundary conditions for maxwell's equations". *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 43 :315–322, 1993.
- [48] Jian-Hong Hao, Pei-Hua Qi, Jie-Qing Fan, , and Yongqing Guo. "analysis of shielding effectiveness of enclosures with apertures and inner windows with tlm". *Progress In Electromagnetics Research M*, 32 :73–82, 2013.
- [49] Camilo Hernandez, Yves Bernard, and Adel Razek. "design and manufacturing of a piezoelectric traveling-wave pumping device". *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 60(9) :1949–1956, 2013.
- [50] Jan Hesthaven and Tim Warburton. "nodal high-order methods on unstructured grids : Time-domain solution of maxwell's equations". *Journal of Computational Physics*, 181(1) :186–221, 2002.
- [51] Jan Hesthaven and Tim Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer, 2008.
- [52] Ning Hu. *Composites and their applications*. Intech.com, 2012.
- [53] Umran Inan and Robert Marshall. *Numerical Electromagnetics : The FDTD Method*. Cambridge University Press, 2011.
- [54] Kazuhisa Ishibashi. "eddy current analysis by boundary element method utilizing impedance boundary condition". *IEEE Transactions On Magnetics*, 31(3) :500 – 1503, 1995.
- [55] Maciej Jaroszewski, Sabu Thomas, and Ajay Rane. *Advanced Materials for Electromagnetic Shielding : Fundamentals, Properties, and Applications*. Wiley, 2018.
- [56] Abelin Kameni. *Etude par des méthodes analytiques et numériques de la répartition de champs induits dans les supraconducteurs à haute température critique*. PhD thesis, Université Henri-Poincaré de Nancy, 6 2009.
- [57] George Karniadakis and Spencer Sherwin. *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2005.
- [58] Swarn Kasli. *Applications of High Temperature Superconductors to Electric Power Equipment*. John Wiley & Sons, 2011.
- [59] Lilia Krivodonova. "an efficient local time-stepping scheme for solution of nonlinear conservation laws". *Journal of Computational Physics*, 229(22) :8537–8551, 2010.
- [60] Matti Lassas and Erkki Somersalo. "analysis of the pml equations in general convex geometry". *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 131(5) :1183–1207, 2001.
- [61] Raphael Leger, Jonathan Viquerat, Clément Durochat, Claire Scheid, and Stephane Lanteri. "a parallel non-conforming multi-element dgtd method for the simulation of electromagnetic wave interaction with metallic nanoparticles". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 270 :330–342, 2014.

- [62] Beate Lehndorff. *High-Tc Superconductors for Magnet and Energy Technology : Fundamental Aspects*. Springer, 2001.
- [63] Randall Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [64] Tai Ping Liu. "the riemann problem for general systems of conservation laws ". *Journal of Differential Equations*, 18(1) :218–234, 1975.
- [65] Eric Lundquist, James Nagel, Shang Wu, Brian Jones, and Cynthia Furse. "advanced forward methods for complex wire fault modeling". *IEEE Sensors Journal*, 13(4) :1172 – 1179, 2013.
- [66] Ludovic Makong. *3D modelling of twisted multi-filamentary superconductors*. PhD thesis, Université de Paris Saclay, 11 2017.
- [67] Antony Manet. *Etude de défauts non francs sur des câbles en vue du diagnostic*. PhD thesis, Université de Paris Est, 6 2016.
- [68] Dmitry Markovich, Konstantin Ladutenko, and Pavel Belov. "performance of fdtd method cpu implementations for simulation of electromagnetic processes". *Progress in Electromagnetics Research*, 139 :655–670, 2013.
- [69] Isaac Mayergoyz. "on finite element implementation of impedance boundary conditions". *Journal of Applied Physics*, 75 :6027, 1994.
- [70] Isaac Mayergoyz. *Nonlinear Diffusion of Electromagnetic Fields, With Applications to Eddy Currents and Superconductivity*. Academic Press, 1998.
- [71] David Michea and Dimitri Komatitsch. "accelerating a three dimensional finite difference wave propagation code using gpu graphics cards". *Geophysical Journal International*, 182(1) :389–402, 2010.
- [72] Grigorii Mikitik and Ernst Brandt. "analytic solution for the critical state in superconducting elliptic films ". *Physical Review B*, 60(1) :592 – 600, 1999.
- [73] Grigorii Mikitik, Yasunori Mawatari, andy Wan, and Frédéric Sirois. "analytical methods and formulas for modeling high temperature superconductors ". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 23(2) :8001920, 2013.
- [74] Axel Modave. *Absorbing layers for wave-like time-dependent problems*. PhD thesis, Université de Liège, 10 2013.
- [75] Axel Modave, Jonathan Lambrechts, and Christophe Geuzaine. "perfectly matched layers for convex truncated domains with discontinuous galerkin time domain simulations". *Computers and Mathematics with Applications*, 73(4) :684–700, 2017.
- [76] Peter Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press, 2003.
- [77] Denis Netter, Jean Lévêque, Bruno Douine, Philippe Masson, and Abderrezak Rezzoug. "design and testing of a superconducting rotating machine". *IEEE Transactions on applied superconductivity*, 17(1) :p.27–33, 2007.
- [78] Jaakko Paasi, Jorma Lehtonen, Markku Lahtinen, and Lauri Kettunen. "computation of ac losses in high-temperature superconductors". *Physica C : Superconductivity*, 310(1-4) :62 – 66, 1998.

- [79] Leonid Prigozhin. "the bean model in superconductivity : Variational formulation and numerical solution". *Journal of Computational Physics*, 129(1) :190 – 200, 1996.
- [80] Valentin Préault. *Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites. Application au blindage de boîtiers d'équipement électronique*. PhD thesis, Université de Paris Sud, 12 2013.
- [81] Valentin Préault, Romain Corcolle, Laurent Daniel, and Lionel Pichon. "influence of skin effect on the effective shielding effectiveness of composite materials". *Journal of Applied Physics*, 115 :154904, 2014.
- [82] Reed and Hill. "triangular mesh methods for neutron transport equation". *Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory*, 1973.
- [83] Malika Remaki. "a new finite volume scheme for solving maxwell system". *COMPEL*, 19(3) :913–932, 2000.
- [84] Xiaotao Ren. *Classical Losses in Soft Magnetic Composites using Homogenization Techniques*. PhD thesis, Université de Paris Saclay, 7 2017.
- [85] Xiaotao Ren, Romain Corcolle, and Laurent Daniel. "bounds and estimates on eddy current losses in soft magnetic composites". *Journal of Applied Physics*, 123(6) :235109, 2018.
- [86] Christopher Rey. *Superconductors in the Power Grid*. Woodhead, 2015.
- [87] Béatrice Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations : Theory and Implementation*. SIAM, 2008.
- [88] Martin Paul Robinson and al. "analytical formulation for the shielding effectiveness of enclosures with apertures". *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 40(3) :240–248, 1998.
- [89] David Ruiz-Alonzo, Tim Coombs, and Archie Campbell. "computer modelling of high-temperature superconductors using an a-v formulation". *Superconductor Science and Technology*, 17(5) :305–310, 2004.
- [90] Matthew Sadiku and Lawrence Agba. "a simple introduction to the transmission-line modeling". *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37(8) :991 – 999, 1990.
- [91] Lola El Sahmarany, Laure Berry, Nicolas Ravot, Fabrice Auzanneau, and Pierre Bonnet. "time reversal for soft faults diagnosis in wire networks". *Progress In Electromagnetics Research M*, 31 :45 – 58, 2013.
- [92] John Sakellaris, Gerard Meunier, Xavier Brunotte, and Christophe Guerin ; Jean-Claude Sabonnadiere. "application of the impedance boundary condition in a finite element environment using the reduced potential formulation". *IEEE Transactions On Magnetics*, 27(6) :5022 – 5024, 1991.
- [93] Maria Sabrina Sarto. "a new model for the fdtd analysis of the shielding performances of thin composite structures". *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 41(4) :298 – 306, 1999.
- [94] Thitipong Satiramatekul and Frederic Bouillault. "modeling of several concentric layers of superconducting filaments". *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2) :7009604, 2014.

- [95] Thitipong Satiramatekul, Frederic Bouillault, and Laurent Santandrea. "modeling of magnetization curves of partially coupled superconducting filaments with dependence of current density according to applied magnetic field". *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4) :887–890, 2006.
- [96] Martin Schlegel, Oswald Knoth, Martin Arnold, and Ralf Wolke. "multirate runge kutta schemes for advection equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 226(2) :345–357, 2009.
- [97] Valentin Segouin, Barbara Kaeswurm, Kyle Webber, and Laurent Daniel. "temperature-dependent anhysteretic behavior of co-doped pzt". *Journal of Applied Physics*, 124 :104103, 2018.
- [98] Thomas Senior and John Volakis. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. The Institution of Electrical Engineers, 1995.
- [99] Bruno Seny, Jonathan Lambrechts, Richard Comblen, Vincent Legat, and Jean-François Remacle. "multirate time stepping for accelerating explicit discontinuous galerkin computations with application to geophysical flows". *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 71(1) :41–64, 2012.
- [100] Ram Gopal Sharma. *Superconductivity : Basics and Applications to Magnets*. Springer, 2015.
- [101] Yong-June Shin, Edward Powers, Tok-Son Choe, Chan-Young Hong, Eun-Seok Song, Jong-Gwan Yook, and Jin Bae Park. "application of time-frequency domain reflectometry for detection and localization of a fault on a coaxial cable". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(6) :p.2493 – 2500, 2005.
- [102] Frédéric Sirois and François Roy. "computation of 2-d current distribution in superconductors of arbitrary shapes using a new semi-analytical method". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 17(3) :3836 – 3845, 2007.
- [103] Mostafa Smail, Lionel Pichon, Marc Olivas, Fabrice Auzanneau, and Marc Lambert. "detection of defects in wiring networks using time domain reflectometry". *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8) :2998–3001, 2010.
- [104] Mostafa Kamel Smail. *Développement d'un outil de simulation dédié à la réflectométrie en vue du diagnostic de câblages au sein d'un véhicule automobile*. PhD thesis, Université de Paris Sud, 7 2010.
- [105] Nadia Nibbio ; Svetlomir Stavrev and Bertrand Dutoit. "finite element method simulation of ac loss in hts tapes with b-dependent e-j power law". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 11(1) :2631–2634, 2001.
- [106] Michael Steer. *Microwave & RF Design : A Systems Approach*. SciTech, 2010.
- [107] Antti Stenvall and Timo Tarhassaari. "programming finite element method based hysteresis loss computation software using non-linear superconductor resistivity and $t - \phi$ formulation". *Superconductor Science and Technology*, 23(7) :1–9, 2010.
- [108] Fernando Teixeira and Weng Cho Chew. "analytical derivation of a conformal perfectly matched absorber for electromagnetic waves". *Microwave and Optical Technology Letters*, 17(4) :231–236, 1998.

- [109] Fernando Teixeira and Weng Cho Chew. "differential forms, metrics, and the reflectionless absorption of electromagnetic waves". *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 13(5) :665–686, 1999.
- [110] Fernando Teixeira and Weng Cho Chew. "complex space approach to perfectly matched layers : a review and some new developments". *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks Devices and Fields*, 13(5) :441–455, 2000.
- [111] Frederick Tesche, Michel Ianoz, and Torbjörn Karlsson. *EMC Analysis Methods and Computational Models*. John Wiley & Sons, 1997.
- [112] Bertrand Thierry, Alexandre Vion, Simon Tournier, Mohamed El Bouajaji, David Collignon, Nicolas Marsic, Xavier Antoine, and Christophe Geuzaine. "getddm : an open framework for testing optimized schwarz methods for time-harmonic wave problems". *Computer Physics Communications*, 203 :309–330, 2016.
- [113] Pascal Tixador. *Les supraconducteurs*. Hermes, 1995.
- [114] Pascal Tixador. *Superconducting Fault Current Limiter*. World Scientific, 2018.
- [115] Pascal Tixador and Arnaud Badel. "superconducting fault current limiter optimized design". *Physica C : Superconductivity and its Applications*, 518 :130 – 133, 2015.
- [116] Frederic Trillaud, Kévin Berger, Bruno Douine, and Jean Lévêque. "comparison between modeling and experimental results of magnetic flux trapped in ybco bulks". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 26(3) :6800305, 2016.
- [117] Emmanuel Vinot, Gerard Meunier, and Pascal Tixador. "different formulations to model superconductors". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 36(4) :1226–1229, 2000.
- [118] Konstantin Vytovtov, Volodymyr Hnatushenko, and Said Zouhdi. "terahertz range double direction isolator based on stratified antiferromagnetic-dielectric structures. theoretical investigation". *Elektronika*, 56(2) :75–78, 2015.
- [119] Chuan-Chuan Wang, Chang-Qing Zhu, Xing Zhou, and Zhi-Feng Gu. "calculation and analysis of shielding effectiveness of the rectangular enclosure with apertures". *ACES Journal*, 28(6) :535–545, 2013.
- [120] Johnson Wang. *Generalized moment methods in electromagnetics : formulation and computer solution of integral equations*. Wiley, 1991.
- [121] Thomas Weiland. "a discretization method for the solution of maxwell's equations for six-component fields". *Electronics and Communications AEU*, 31 :116–120, 1977.
- [122] Amir Yefet and Peter Petropoulos. "a staggered fourth-order accurate explicit finite difference scheme for the time-domain maxwell's equations". *Journal of Computational Physics*, 52(2) :730–741, 2004.
- [123] Sergey Yuferev and Nathan Ida. *Surface Impedance Boundary Conditions : A Comprehensive Approach*. CRC press, 2009.
- [124] Victor Zermeno, Asger Abrahamsen, Nenad Mijatovic, Bogi Jensen, and Mads Sorensen. "calculation of alternating current losses in stacks and coils made of second generation high temperature superconducting tapes for large scale applications". *Journal of Applied Physics*, 114(17) :173901, 2013.

-
- [125] Guoqiang Zhang, Youtong Fang, Fuchuan Song, Guiping Zhu, and Zanji Wang. "optimal design and fem analysis of the superconducting magnets of ems-maglev models using bi-2223 tapes". *IEEE Transactions on applied superconductivity*, 14(2) :1850 – 1853, 2004.
- [126] Min Zhang and Tim Coombs. "3d modeling of high-tc superconductors by finite element software". *Superconductor Science and Technology*, 25(1), 2011.