



HAL
open science

Détection de changements dans les séries temporelles d'images satellitaires multi-dimensionnelles

Rémi Beisson

► **To cite this version:**

Rémi Beisson. Détection de changements dans les séries temporelles d'images satellitaires multi-dimensionnelles. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Bordeaux, 2024. Français. ⟨NNT : 2024BORD0095⟩. ⟨tel-04646543⟩

HAL Id: tel-04646543

<https://theses.hal.science/tel-04646543v1>

Submitted on 12 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

École Doctorale Sciences Physiques et de l'Ingénieur



**AGENCE
INNOVATION
DÉFENSE**



RÉGION
**Nouvelle-
Aquitaine**

Détection de changements dans les séries temporelles
d'images satellitaires multi-dimensionnelles

Par **Rémi BEISSON**

Soutenue le 28 Mai 2024

Membres du jury :

Nicolas Le Bihan

DR CNRS

GIPSA, Université Grenoble Alpes

Rapporteur

Francois Vincent

Professeur

ISAE-SupAero, Université de Toulouse

Rapporteur

Frédéric Pascal

Professeur

CentraleSupélec, Université Paris Saclay

Président

Florent Bouchard

CR CNRS

L2S, Université Paris Saclay

Examineur

Audrey Giremus

Professeure

Université de Bordeaux

Directrice de thèse

Invités :

Pascal Vallet

Maître de conférences

IPB -Institut Polytechnique de Bordeaux

Co-Encadrant

Guillaume Ginolhac

Professeur

LISTIC, Université Savoie Mont-Blanc

Co-Encadrant

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Tout d'abord, je remercie chaleureusement ma directrice de thèse, Audrey Giremus, qui s'est toujours montrée bienveillante et rassurante en toutes circonstances.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à mes encadrants. À Pascal Vallet, pour son expertise et ses conseils avisés, qui m'ont permis de surmonter les nombreux défis rencontrés et d'approfondir mes connaissances. Sa vision, sa rigueur scientifique et son engagement ont été des sources d'inspiration inestimables. À Guillaume Ginolhac, pour sa disponibilité, son soutien constant et ses encouragements, qui ont été essentiels tout au long de ce parcours. Vous avez tous deux su guider mes recherches avec une bienveillance et une patience exemplaires, et je vous en suis profondément reconnaissant.

Je remercie également mes rapporteurs, Nicolas Le Bihan et François Vincent, pour avoir accepté d'évaluer cette thèse. Leurs commentaires pertinents et leurs suggestions constructives ont été très précieux pour l'amélioration de ce manuscrit.

Je remercie mes collègues doctorants Matthieu, Antoine et Antonio pour les bons moments partagés et l'entraide dans les moments de doute.

Je remercie mes parents, Magali et Stéphane, ainsi que ma sœur Clara, pour leur soutien indéfectible et leur compréhension tout au long de ces années. Vos encouragements et votre présence ont été une source constante de motivation et de réconfort.

Enfin, je tiens à remercier ma compagne, Iléana. Ton amour, ta patience et ta compréhension ont été des piliers sur lesquels j'ai pu m'appuyer durant les moments difficiles. Ta capacité à me soutenir et à m'encourager m'a donné la force nécessaire pour mener à bien ce travail.

À tous, je vous adresse mes plus sincères remerciements. Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans vous.

Introduction

La surveillance de l'environnement et la détection des changements revêtent une grande importance pour la compréhension et la gestion de notre planète. L'imagerie radar à synthèse d'ouverture (SAR) se distingue par sa capacité à surveiller les changements environnementaux sur de vastes régions avec une résolution spatiale élevée. Les images SAR, capturées à différentes dates, permettent la création de séries temporelles d'observations, offrant un suivi continu des caractéristiques de surface. Ces séries temporelles se révèlent particulièrement utiles pour mettre en évidence et suivre des phénomènes tels que la déforestation, l'urbanisation et l'évolution des cours d'eau. En outre, la technologie SAR présente une faible sensibilité aux conditions météorologiques et à l'illumination solaire, ce qui en fait une source fiable d'information.

Dans le domaine de la télédétection, et plus généralement dans le traitement statistique des séries temporelles, un défi fondamental consiste à détecter et caractériser les changements que peuvent subir des objets imagés au fil du temps. Ce suivi s'opère concrètement sur des séries temporelles de données, collectées à des intervalles de temps variables en fonction du contexte. À l'heure actuelle, pour la plupart des dispositifs d'acquisition tels que le RADAR, la dimension des données à traiter peut être relativement grande. Ceci est notamment dû au développement de systèmes comportant un grand nombre de capteurs/antennes et à l'intégration de plusieurs modes de mesures (polarisation/interférométrie, diversité en formes d'onde, en temps, en fréquence, en espace). L'enjeu crucial réside alors dans l'exploitation maximale de ces données de grande dimension afin d'améliorer les performances en termes de résolution, puissance de détection, discrimination de cibles, etc.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de cette thèse. Cette dernière se concentre sur la détection de changements dans les séries temporelles d'images satellitaires multidimensionnelles, en se penchant spécifiquement sur le test d'égalité des matrices de covariance dans le contexte de L séries temporelles complexes gaussiennes multivariées. L'objectif principal est de développer une nouvelle statistique de test qui soit consistante dans le régime asymptotique des grandes dimensions, où les tailles d'échantillon N_1, \dots, N_L de chaque série temporelle et la dimension M tendent vers l'infini au même rythme, tout en maintenant L fixe. Cette approche repose sur l'estimation des valeurs propres des matrices de covariance qui sont modélisées comme des perturbations de rang K de la matrice identité, représentant un modèle signal plus bruit. De plus, une méthode de contrôle de l'erreur de type I dans le régime asymptotique des grandes dimensions est proposée. Pour évaluer l'efficacité de la méthode proposée, des simulations sont réalisées sur des données synthétiques ainsi que sur des données réelles. Les résultats obtenus sont comparés à ceux d'autres méthodes pertinentes, démontrant des performances satisfaisantes même pour des valeurs de dimensions modérées.

Le manuscrit est organisé comme suit. Le premier chapitre, intitulé "Généralités sur

l'imagerie *SAR*", établit les bases de notre étude en présentant les concepts fondamentaux de l'imagerie *SAR*. Nous y explorons les principes de fonctionnement de l'imagerie *SAR*, ses applications, ses propriétés, ses avantages et ses inconvénients.

Le deuxième chapitre, intitulé "Détection de changements et test d'égalité de covariances" présente dans un premier temps des méthodes de détection de changements et permet de contextualiser notre recherche. L'accent est mis sur les méthodes statistiques visant à comparer les matrices de covariances construites à partir de regroupements de pixels dans les images. Nous introduisons ainsi les tests d'égalité des matrices de covariance dans le contexte de L séries temporelles complexes gaussiennes multivariées de dimension M .

Dans le troisième chapitre, "Un nouveau test d'égalité de covariances pour les modèles en rang réduit" on considère les matrices de covariance modélisées comme des perturbations de rang K de la matrice identité, représentant un modèle signal plus bruit. L'objectif est de développer une nouvelle statistique de test adaptée à ce modèle. Nous présentons également en plus des résultats théoriques, des simulations sur données empiriques afin d'évaluer les performances numériques de notre test, en le comparant à d'autres méthodes existantes et pertinentes.

Le quatrième chapitre, "Application à la détection de changements dans les images *SAR*", est consacré à l'application de notre méthode à la détection de changements dans les images *SAR*. Nous décrivons les différentes étapes nécessaires à sa mise en œuvre, notamment le pré-traitement des données, l'estimation des matrices de covariances et l'utilisation du test pour la détection de changements. Nous évaluons les performances de notre méthode à l'aide de données réelles, en mettant en évidence sa sensibilité, sa précision et sa robustesse.

En conclusion de cette thèse, nous récapitulons les principaux résultats obtenus ainsi que des pistes d'extensions et perspectives possibles.

Publications

Conférences :

- Beisson, R., Vallet, P., Giremus, A. and Ginolhac, G., 2021, July. Change Detection in The Covariance Structure of High-Dimensional Gaussian Low-Rank Models. In 2021 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP) (pp. 421-425). IEEE.
- Beisson, R., Vallet, P., Giremus, A. and Ginolhac, G., 2022, September. Détection de changements dans les modèles gaussiens de rang 1. In GRETSI, XXVIIIème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, GRETSI.
- Beisson, R., Vallet, P., Giremus, A. and Ginolhac, G., 2023, September. Détection de changements dans les modèles gaussiens de rang K appliquée à l'imagerie SAR. In GRETSI, XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, GRETSI.

Journal :

- R. Beisson, P. Vallet, A. Giremus and G. Ginolhac, A New Statistic for Testing Covariance Equality in High-Dimensional Gaussian Low-Rank Models, in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 72, pp. 1797-1812, 2024.

Table des matières

1	Généralités sur l'imagerie SAR	12
1.1	Généralités sur l'imagerie SAR	12
1.1.1	Principe de l'ouverture synthétique	12
1.1.1.1	Première approche, les systèmes SLAR	12
1.1.1.2	Évolution vers les systèmes SAR	14
1.1.1.3	Avantages de l'imagerie SAR	17
1.2	Construction des images SAR	18
1.2.1	Formalisme pour l'imagerie SAR	18
1.2.2	Formation des images SAR	19
1.3	Données multivariées	21
1.3.1	Polarimétrie	21
1.3.2	Diversité spectro-angulaire	23
1.3.3	Séries temporelles SAR	24
1.3.4	Modèle des données SAR	25
2	Détection de changements et test d'égalité de covariances	26
2.1	Détection de changements	27
2.1.1	Introduction	27
2.1.2	État de l'art des méthodes de détection de changements pour l'imagerie SAR	29
2.1.2.1	Méthodes sans modèle statistique	29
2.1.2.2	Méthodes avec modèle statistique	31
2.2	Régime asymptotique des grandes dimensions	36
2.2.1	Introduction au régime	36
2.2.2	Spectre des matrices de Fisher	37
2.2.2.1	Cas général	37
2.2.2.2	Cas particulier où $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$	39
2.2.2.3	Cas particulier du modèle signal plus bruit	40
2.2.3	Spectre des matrices de Wishart	44
2.2.3.1	Cas général	44
2.2.3.2	Cas particulier où $\mathbf{R}_\ell = \sigma^2 \mathbf{I}$	45
2.2.3.3	Cas particulier du modèle signal plus bruit	47
2.2.4	Contribution sur l'étude du spectre de $\hat{\mathbf{R}}$	49
2.2.4.1	Introduction	49
2.2.4.2	Résultats au premier ordre	50
2.2.4.3	Résultats au second ordre	51
	Annexes	54
2.A	Preuve du Théorème 9	55

2.A.1	Quelques notations	55
2.A.1.1	Linéarisation	56
2.A.1.2	Résultats asymptotique pour le polynôme caractéristique de \check{Y}	56
2.A.1.3	Spectre de $\hat{\mathbf{R}}$	58
2.B	Preuve du Théorème 10	59
2.B.1	Quelques notations	59
2.B.2	Approximation des polynômes caractéristiques	59
2.B.3	Théorème limite central	61
2.C	Preuve de la Proposition 2	62
2.D	Preuve de la Proposition 3	64
2.D.1	Outils utiles	64
2.D.2	Développement de Ψ'	65
3	Un nouveau test d'égalité de covariances pour les modèles rang réduit	68
3.1	Une nouvelle statistique de test	69
3.1.1	Introduction	69
3.1.2	Construction des estimateurs	69
3.1.3	Proposition d'une nouvelle statistique de test	70
3.2	Simulations	73
3.2.1	Modèle de simulation	73
3.2.2	Illustration du Théorème 12	74
3.2.3	Méthodes alternatives	75
3.2.3.1	Statistique de test Fisher	76
3.2.3.2	Statistique de test GLR_{LR}	77
3.2.4	Illustration des performances des statistiques de test	78
3.2.4.1	Changement de valeurs propres	79
3.2.4.2	Changement de sous espace	83
3.2.4.3	Modèle de simulation pour $L = 3$ et $N_1 \neq N_2 = N_3$	87
3.2.4.4	Changement de valeurs propres	87
3.2.4.5	Changement de sous espace	89
	Annexes	92
3.A	Preuve du Lemme 8	92
3.B	Preuve du Corollaire 2	92
3.C	Développement autour du GLR_{LR}	93
4	Application à la détection de changements dans les images SAR	96
4.1	Statistiques de test considérées	97
4.2	Simulations sur données synthétiques	98
4.2.1	Modèle de simulation	98
4.2.2	Variations de ρ_ℓ	99
4.2.3	Variations du SNR	99
4.2.4	Variations de l'estimation du rang K	100
4.2.5	Variations de M	101
4.3	Tests sur données réelles SAR	102
4.3.1	Introduction aux données	102
4.3.2	Modèle Statistique	104
4.3.3	Simulations sur données SAR	106
4.3.3.1	Vérité terrain	106

4.3.3.2	Proposition d'une nouvelle vérité terrain	108
4.3.4	Courbes <i>ROC</i>	112
4.3.4.1	Introduction	112
4.3.4.2	Scène 1	113
4.3.4.3	Scène 2	116
4.3.5	Cartes de détections	118
4.3.5.1	Scène 1	118
4.3.5.2	Scène 2	120
4.3.6	Statistique de test $T(\epsilon)$	122
Annexes	126
4.A	Loi de probabilité estimées	126

Bibliographie **132**

Nomenclature

Acronymes

Az Azimuth

CST Corrélation Spatio-Temporelle

i.i.d. (Variables) indépendantes et identiquement distribuées

LSA Longueur de synthèse d'ouverture (*Synthetic-aperture length*)

p.d.f. fonction de densité (*probability density function*)

PD Probabilité de Détection

PFA Probabilité de Fausse Alarme

ROC Caractéristique de fonctionnement du récepteur (*Receiver Operating Characteristic*)

SAR Radar à synthèse d'ouverture (*Synthetic-aperture radar*)

$SLAR$ Radar à visée latérale (*Side looking airborne radar*)

TLC Théorème limite central

Algèbre linéaire

\mathbf{X} Matrice

\mathbf{X}^T Matrice transposée

\mathbf{X}^* Matrice adjointe

$X_{i,j}$ Entrée (i, j) de la matrice \mathbf{X}

$\text{tr}(\mathbf{X})$ Trace de la matrice \mathbf{X}

$\det(\mathbf{X})$ Déterminant de la matrice \mathbf{X}

$\text{rang}(\mathbf{X})$ Rang de la matrice \mathbf{X}

$\text{sp}(\mathbf{X})$ Spectre de la matrice \mathbf{X}

\mathbf{I} Matrice identité

\mathbf{x} Vecteur

\mathbf{x}^T Vecteur transposé

\mathbf{x}^* Vecteur adjointe

Analyse réelle et complexe

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
\mathbb{A}^*	Ensemble \mathbb{A} privé de 0
x^+	Pour $x \in \mathbb{R}$, $\max(x, 0)$
z^*	Complexe conjugué de z
i	Racine carré de -1
$\mathcal{R}(z)$	Partie réelle de z
$\mathcal{I}(z)$	Partie imaginaire de z
$\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	Fonction indicatrice entre deux réels (a, b) , $\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a, b]$, $\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ sinon.
$\delta(x)$	Fonction Dirac, $\delta(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$
$\text{supp}(f)$	Support de la fonction de distribution f

Théorie des probabilité

X	Variable aléatoire
$\mathbb{E}(X)$	Espérance de X
$\mathbb{V}(X)$	Variance de X
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Distribution gaussienne réelle de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$
$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Distribution gaussienne complexe de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$

Généralités sur l'imagerie *SAR*

Sommaire

1.1 Généralités sur l'imagerie <i>SAR</i>	12
1.1.1 Principe de l'ouverture synthétique	12
1.1.1.1 Première approche, les systèmes <i>SLAR</i>	12
1.1.1.2 Évolution vers les systèmes <i>SAR</i>	14
1.1.1.3 Avantages de l'imagerie <i>SAR</i>	17
1.2 Construction des images <i>SAR</i>	18
1.2.1 Formalisme pour l'imagerie <i>SAR</i>	18
1.2.2 Formation des images <i>SAR</i>	19
1.3 Données multivariées	21
1.3.1 Polarimétrie	21
1.3.2 Diversité spectro-angulaire	23
1.3.3 Séries temporelles <i>SAR</i>	24
1.3.4 Modèle des données <i>SAR</i>	25

1.1 Généralités sur l'imagerie *SAR*

1.1.1 Principe de l'ouverture synthétique

1.1.1.1 Première approche, les systèmes *SLAR*

Dans les années 1950, avec l'avènement des systèmes de radar aéroporté à balayage latéral (*SLAR*), les premiers systèmes radar aéroportés capables de fournir des images fiables sont apparus. Dans ce type de configuration, un radar est monté sur une plateforme aéroportée ou spatiale, et dans notre exemple simplifié en Figure 1.1, cette plateforme se déplace le long d'un trajet rectiligne à une certaine altitude H . Contrairement aux systèmes d'imagerie optique qui pointent généralement leurs capteurs directement vers le sol, l'antenne d'un *SLAR* est orientée à un angle appelé angle de visée θ_v , de sorte qu'elle illumine une bande continue sur le sol pendant que la plate-forme se déplace. Pendant le vol, le radar émet une série d'impulsions courtes de micro-ondes, chacune illuminant une zone instantanée sur le sol, appelée "empreinte d'antenne". La taille S de cette empreinte d'antenne, dans la direction de portée (*range*) ou d'azimut, dépend de la longueur d'onde λ du radar, de la taille de l'antenne L (qui définit la largeur du faisceau

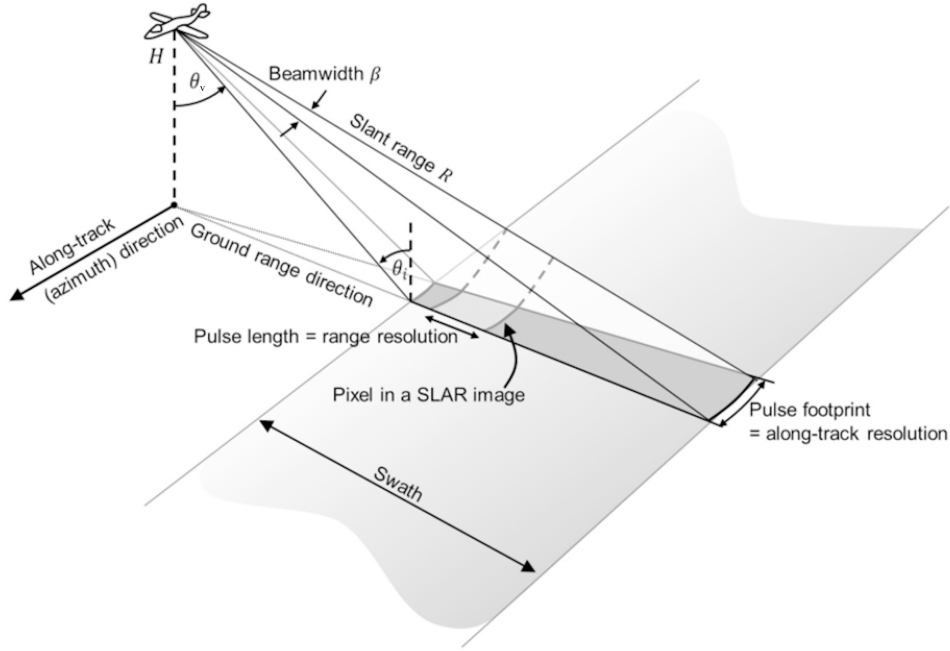


FIGURE 1.1 – Illustration du radar SLAR [1]

du radar via $\beta = \frac{\lambda}{L}$) et de la distance R entre le capteur radar et le sol :

$$S \approx \frac{\lambda}{L} R = \beta R \quad [m]. \quad (1.1)$$

Pour créer une image bidimensionnelle, les échos reçus du sol sont triés en fonction de leur temps d'arrivée et de leur directions, portée ou d'azimut. En direction de portée, les échos du sol arrivent de manière progressive, de la zone proche à la zone lointaine de la bande balayée. La résolution en portée d'un système *SLAR* est définie par la séparation minimale entre les objets sur le sol qui peuvent être distingués, et elle est généralement déterminée par la durée d'impulsion τ_P du radar. Si la séparation en portée des objets est plus grande que la moitié de la durée d'impulsion, ils peuvent être différenciés. En conséquence, la résolution de portée d'un système *SLAR* est définie par :

$$\rho_R = \frac{c\tau_P}{2} \quad [m], \quad (1.2)$$

c étant la vitesse de la lumière. La variable ρ_R dans l'équation (1.2) est généralement appelée résolution de portée inclinée d'un système *SLAR* car elle décrit la capacité du *SLAR* à distinguer des objets à différentes distances inclinées par rapport au radar. Alors que le paramètre de portée inclinée ρ_R est utile pour de nombreuses questions de conception de système, la télédétection s'intéresse souvent davantage à la résolution de portée au sol ρ_G , qui décrit la capacité de discriminer les objets situés sur le sol et qui est calculée à partir de ρ_R via l'angle d'incidence local θ_i (avec $\theta_i = \frac{\pi}{2} - \theta_v$) :

$$\rho_G = \frac{\rho_R}{\sin(\theta_i)} \quad [m]. \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) montre que la résolution de portée au sol n'est pas constante sur toute la largeur de balayage et s'améliore avec la distance par rapport au nadir (en raison

de l'augmentation de θ_i). Cette caractéristique diffère du comportement des systèmes optiques pour lesquels la résolution au sol se dégrade avec l'augmentation de θ_i .

Concernant la direction azimutale (*along-track*), le sol est balayé par le mouvement du radar le long de sa piste. Dans le cas des systèmes *SLAR*, la résolution azimutale ρ_{Az} (c'est-à-dire la capacité de discriminer les objets dans la direction azimutale) est définie par la largeur du faisceau d'antenne dans l'azimut S_{Az} , qui, à son tour, est limitée par la longueur latérale $L_{Az}(=L)$ de l'antenne dans cette direction. Ainsi, en utilisant l'équation (1.1), la résolution azimutale est déterminée par :

$$\begin{aligned} \rho_{Az} &= S_{Az} \\ &\approx \frac{\lambda}{L_{Az}} R = \beta_{Az} R \quad [m]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) entraîne deux implications importantes pour les systèmes *SLAR*. Premièrement, la résolution azimutale ρ_{Az} se dégrade linéairement avec l'augmentation de la distance R entre le capteur et le sol ainsi la résolution azimutale d'un *SLAR* n'est pas constante sur toute la portée. Deuxièmement, la dépendance de ρ_{Az} par rapport à la distance au sol R rend l'application de systèmes *SLAR* sur des plates-formes à haute altitude, voire spatiales, hautement impraticable. Pour illustrer ce point, prenons l'exemple d'un système *SLAR* en bande C fonctionnant à $\lambda = 0.05[m]$ et utilisant une antenne de longueur $L = 5[m]$. Lorsqu'il est exploité à partir d'un avion à une altitude $H = 5000[m]$ et observant sous un angle de visée $\theta_v = 30^\circ$, ce système atteindra une résolution azimutale acceptable de $\rho_{Az} = 0.01 \times 5000 \times 2 = 100[m]$. Cependant, si le même système est utilisé à partir d'une plate-forme spatiale à une altitude $H = 700[km]$, la résolution azimutale se dégradera à $\rho_{Az} = 14[km]$, ce qui est inférieur aux performances requises pour la plupart des applications d'observation de la Terre.

Une approche directe pour maintenir la résolution azimutale du système à un niveau acceptable, même pour les applications spatiales, consiste à augmenter la longueur de l'antenne utilisée par le système jusqu'à ce que la valeur souhaitée de ρ_{Az} soit atteinte. En reprenant l'exemple précédent, pour obtenir une résolution de $\rho_{Az} = 100[m]$ depuis l'espace, une longueur d'antenne déraisonnable d'environ $L = 480[m]$ serait nécessaire, ce qui n'est pas concevable. Une solution réalisable pour résoudre le problème de la résolution azimutale est le principe de l'ouverture synthétique.

1.1.1.2 Évolution vers les systèmes *SAR*

En 1952, *Carl Wiley*, a fait une découverte révolutionnaire qui a résolu le problème de résolution en azimut affectant les technologies *SLAR* existantes. Il a observé qu'il existe une corrélation directe entre la coordonnée le long de la trace (par rapport au faisceau radar transmis) d'un objet réfléchissant et le décalage *Doppler* instantané du signal réfléchi renvoyé au radar. *Wiley* a ensuite formulé l'hypothèse qu'une analyse fréquentielle des signaux enregistrés pourrait permettre d'atteindre une résolution le long de la trace plus fine que celle obtenue avec les systèmes *SLAR* conventionnels. Cette découverte de *Wiley*, d'abord publiée sous le nom d'aiguillage de faisceau *Doppler*, est maintenant couramment appelée synthèse d'ouverture et constitue l'élément clé de tous les systèmes radar d'imagerie moderne à haute résolution.

Le principe de synthèse d'ouverture permet essentiellement de créer, synthétiser, une antenne beaucoup plus grande (appelée ouverture synthétique) à partir d'une séquence d'acquisitions effectuées avec une antenne réelle plus courte alors qu'elle se déplace le long de sa trajectoire. Comme la longueur de l'antenne est intrinsèquement liée aux capacités

de résolution d'un système radar (1.1), l'antenne ainsi synthétisée permet une imagerie haute résolution, même à partir de plates-formes spatiales, en utilisant des équipements d'antenne de taille réglable.

La Figure 1.2 illustre de manière simplifiée le concept de synthèse d'ouverture qu'a proposé *Wiley*. Il présente une antenne radar de taille relativement courte se déplaçant à une vitesse

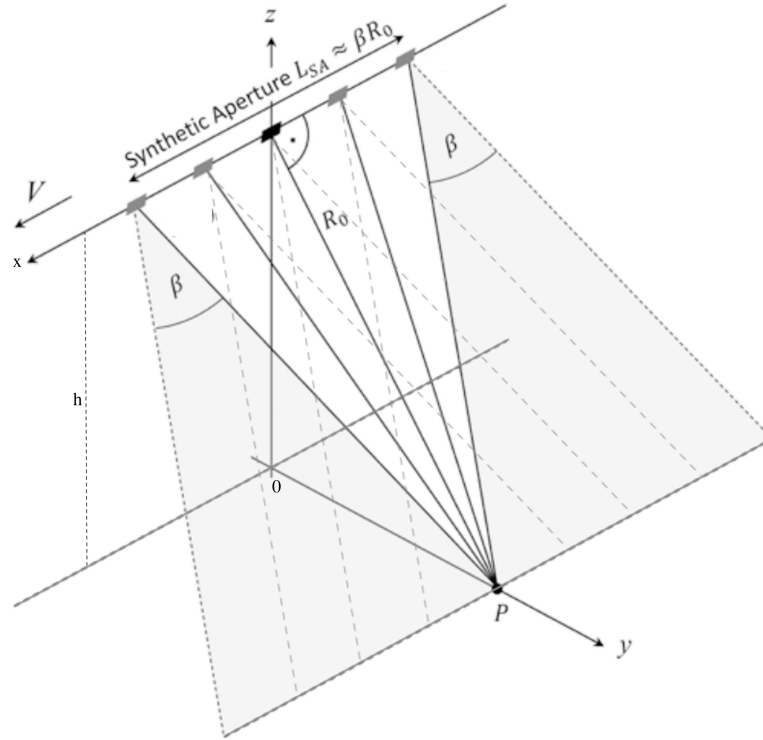


FIGURE 1.2 – Illustration du principe de l'ouverture synthétique [1]

V le long de l'axe des x . Pendant ce mouvement, l'antenne émet constamment de brèves impulsions radar et reçoit les échos renvoyés par les objets au sol. Chaque impulsion radar illumine une empreinte instantanée de taille S sur la surface terrestre. Cependant, pour les applications spatiales, la longueur limitée L de l'antenne radar (1.1) entraîne des empreintes instantanées relativement grandes, mesurant généralement plusieurs kilomètres. Cette limitation de résolution affecte les systèmes *SLAR*.

Pour mettre en œuvre le principe de synthèse d'ouverture de *Wiley*, il est essentiel de s'assurer que l'objet P situé sur la surface terrestre est capturé par de multiples impulsions radar successives alors que l'antenne balaye le sol. Dans la Figure 1.2 on observe différentes positions d'antennes qui éclairent l'objet P pendant que le capteur se déplace sur l'axe des x .

Après l'acquisition des données radar, une approche de post-traitement est mise en œuvre pour fusionner toutes les acquisitions qui touchent le point d'observation P en un seul ensemble de données, donnant ainsi l'impression qu'elles ont été obtenues avec une antenne beaucoup plus grande, d'où le nom ouverture synthétique. La longueur L_{SA} de cette ouverture synthétique peut être calculée à l'aide de l'équation :

$$L_{SA} \approx \frac{\lambda}{L} R_0 = \beta R_0 \quad (1.5)$$

Pour résumer ([2], [3], [4], [5]), la résolution en portée ρ_R , donnée par l'équation (1.2), est identique pour les systèmes *SLAR* et *SAR*. Pour le *SLAR*, la résolution en azimut

est déterminée par l'équation (1.4). En revanche, pour le *SAR*, la résolution en azimut est affinée à l'aide du résultat présenté par l'équation (1.5), dépendant de la longueur d'onde λ et de la distance au point au sol projeté au nadir R_0 . Ainsi plus la longueur L_{SA} sera grande meilleur la résolution en azimut sera. Si on reprend l'exemple mentionné précédemment pour le *SLAR*, on dispose d'un radar *SAR* en bande C qui opère à une longueur d'onde de $\lambda = 0.05[m]$. L'exploitation du système se fait à une altitude de $H = 700 \times 10^3[m]$ et possède une longueur d'antenne synthétique de $L_{SA} = 7.5 \times 10^3[m]$, des caractéristiques que l'on peut notamment retrouver dans le système Sentinel-1. Par conséquent, la résolution azimutale du système serait d'environ $\rho_{Az} = \frac{5}{7.5} \times 10^{-5} \times 700 \times 10^3 \times 2 \approx 9.3[m]$. On observe donc ici une différence non négligeable entre les deux systèmes à l'avantage du *SAR*.

Pour un système *SAR* il existe différents "mode" d'acquisition de données comme on peut le voir en Figure 1.3. Le mode *stripmap*, mis en évidence en Figure 1.2 est un des

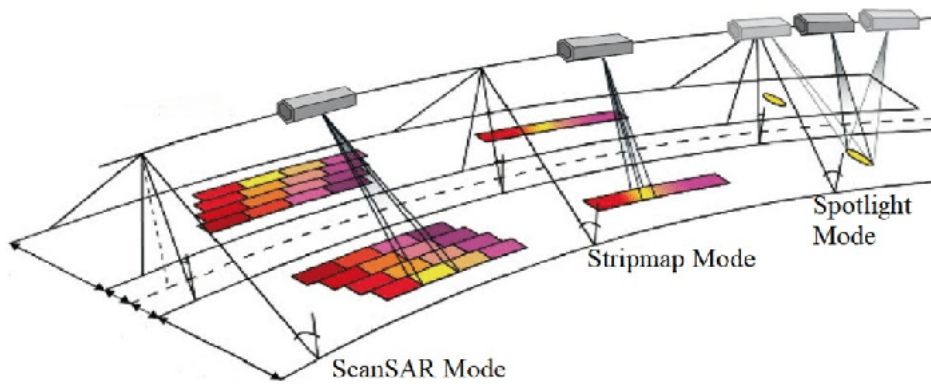


FIGURE 1.3 – Différents modes *SAR*, [6]

modes de fonctionnement le plus courants des systèmes *SAR*. Dans ce mode, l'antenne radar reste fixe, tandis que la plate-forme porteuse (comme un avion ou un satellite) se déplace le long d'une trajectoire rectiligne. Le radar émet des impulsions radar pendant que la plate-forme se déplace, ce qui permet d'illuminer une bande étroite de la surface terrestre, également appelée *stripmap* ou *swath*. En utilisant ce mode, le *SAR* acquiert des données radar sur une bande continue le long de la trajectoire de vol.

Le mode *Stripmap* est largement utilisé pour des applications qui nécessitent une haute résolution spatiale, comme la cartographie détaillée du terrain, la surveillance des changements de surface, l'observation des zones urbaines, etc.

D'autres modes opérationnels *SAR* tels que le mode *scanSAR*, ou *Spotlight* peuvent être utilisés. Contrairement au mode *Stripmap* où l'antenne radar reste fixe, dans le mode *Spotlight*, l'antenne est orientée vers une zone d'intérêt spécifique sur la surface terrestre, et le radar effectue un balayage plus étroit et plus focalisé sur cette zone. Cela permet d'illuminer une petite zone du sol avec des impulsions radar très étroites et précises, créant ainsi une résolution spatiale très élevée dans les deux dimensions : en portée et en azimut. Bien que le mode *Spotlight* offre une résolution élevée, il est limité en termes de couverture spatiale, nécessitant un balayage prolongé pour couvrir des territoires étendus. Le mode *ScanSAR* se démarque lui par sa capacité à couvrir de vastes zones grâce à un balayage de zone, mais il offre une résolution plus faible. Le mode *Stripmap* représente finalement un compromis entre les deux autres méthodes, offrant une résolution et une couverture de zone intermédiaires.

1.1.1.3 Avantages de l'imagerie SAR

Le radar à ouverture synthétique (*SAR*) est un radar utilisé pour générer des images détaillées de la surface de la Terre. Contrairement aux capteurs optiques, tels que les caméras, qui dépendent de la lumière visible ou infrarouge, l'imagerie *SAR* utilise des ondes radio, qui sont des ondes électromagnétiques. Différentes longueurs d'onde sont utilisées en imagerie *SAR* (cf. Figure 1.4), et chacune présente des avantages spécifiques en fonction de ses propriétés.

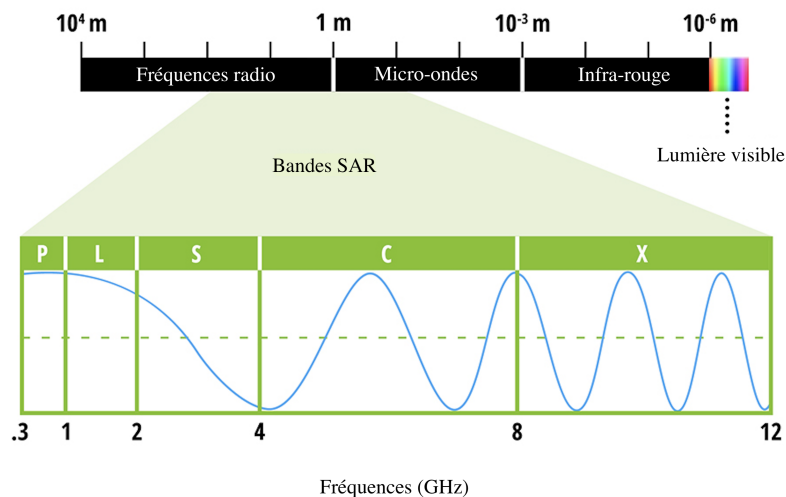


FIGURE 1.4 – Longueurs d'onde utilisées par les radar *SAR* [1]

Quelques avantages associés à différentes longueurs d'onde sont présentés en Figure 1.5.

Bande	Fréquences	Longueur d'ondes	Exemples d'applications
X	8–12 GHz	3.8–2.4 cm	SAR à haute résolution (surveillance urbaine ; glace et neige, pénétration limitée dans la couverture végétale ; décroissance rapide de la cohérence dans les zones végétalisées)
C	4–8 GHz	7.5–3.8 cm	SAR Workhorse (cartographie mondiale ; détection de changements ; surveillance de zones avec une pénétration faible à modérée ; cohérence plus élevée) ; glace, navigation maritime océanique
S	2–4 GHz	15–7.5 cm	Une utilisation limitée mais croissante pour l'observation de la Terre basée sur le SAR ; surveillance de l'agriculture (NISAR disposera d'un canal en bande S ; élargit les applications en bande C à une densité de végétation plus élevée).
L	1–2 GHz	30–15 cm	SAR à résolution moyenne (surveillance géophysique ; cartographie de la biomasse et de la végétation ; pénétration élevée ; InSAR).
P	0.3–1 GHz	100–30 cm	Biomasse. Le premier SAR spatial en bande P a été lancé en 2020 ; cartographie et évaluation de la végétation. SAR expérimental.

FIGURE 1.5 – Utilisation des bandes d'ondes [1]

Avantages L'imagerie *SAR* présente de nombreux avantages par rapport à d'autres techniques d'imagerie. Voici quelques-uns de ces avantages :

- Capacité d'observation indépendante des conditions météorologiques : L'imagerie *SAR* fonctionne en utilisant des ondes radio qui pénètrent à travers les nuages, la pluie, le brouillard et l'obscurité, ce qui permet d'obtenir des images même dans des conditions météorologiques défavorables.
- Surveillance continue : Étant donné que l'imagerie *SAR* peut fonctionner jour et nuit, indépendamment des conditions météorologiques, elle permet une surveillance continue de vastes zones, ce qui est particulièrement utile pour la surveillance

environnementale, la gestion des catastrophes naturelles, la surveillance maritime, etc.

- Résolution : L'imagerie *SAR* offre une résolution spatiale élevée ($< 5\text{m}$), permettant de distinguer de petits détails et d'obtenir des images très précises. La résolution peut être encore améliorée en combinant des images *SAR* provenant de différentes directions d'observation.
- Pénétration du sol : Les ondes radar utilisées dans l'imagerie *SAR* peuvent pénétrer à travers la végétation dense, le sol et même certaines structures, ce qui permet de détecter des objets ou des caractéristiques dissimulées sous la surface.
- Mesures topographiques précises : En utilisant des techniques d'interférométrie *SAR*, il est possible de mesurer avec précision les déformations du terrain, les changements de surface, les mouvements glaciaires, les variations du niveau de la mer, etc. Cela permet de générer des modèles numériques d'élévation (*MNE*) précis et détaillés.
- Sensibilité aux propriétés des matériaux : Les propriétés des matériaux tels que la rugosité, l'humidité, la composition chimique et l'orientation des surfaces peuvent être détectées et caractérisées à partir des images *SAR*, ce qui est utile dans de nombreux domaines, y compris l'agriculture, la géologie, la foresterie et la surveillance des ressources naturelles.

Quelques Applications La résolution dans l'imagerie *SAR* se réfère donc à la capacité du système radar à distinguer et à représenter de petits détails et objets sur la surface terrestre. Les avantages de l'imagerie *SAR* sont nombreux, et ces caractéristiques uniques permettent son utilisation dans divers domaines d'application. Parmi les utilisations courantes, on trouve :

- La cartographie ([7], [8]) et la topographie ([9], [10]) : l'imagerie *SAR* peut être utilisée pour générer des cartes précises de la surface terrestre, en fournissant des informations sur l'altitude, la structure du relief, etc.
- La surveillance environnementale ([11], [12]) : elle permet de surveiller les changements dans les écosystèmes, tels que la déforestation, l'érosion des sols, la dynamique des glaciers, etc.
- La gestion des ressources naturelles ([13], [14]) : l'imagerie *SAR* peut aider à surveiller les cultures, à estimer les rendements agricoles, à détecter les zones de déforestation illégale, etc.
- La surveillance des catastrophes ([15], [16]) : elle permet de cartographier les zones touchées par des catastrophes naturelles telles que les séismes, les ouragans, les inondations, afin d'aider aux opérations de secours et de gestion des crises.
- La défense et la sécurité ([17], [18]) : l'imagerie *SAR* peut être utilisée pour la détection et la surveillance d'objets et de mouvements sur terre, en mer ou dans les airs, fournissant ainsi des informations précieuses pour la sécurité nationale et la défense.

1.2 Construction des images *SAR*

1.2.1 Formalisme pour l'imagerie *SAR*

En repartant d'une modélisation d'un radar *SAR*, comme on peut le voir en Figure 1.2, on peut considérer que le radar se déplace à une hauteur h le long de l'axe O_x . Ainsi

à chaque position le radar a comme coordonnées $(x, 0, z)$ dans le plan (O, x, y, z) . Le radar émet un signal $e(t)$ de fréquence centrale f_0 et de largeur de bande B pendant un temps t_e à chaque position x_k , où $k \in \{1, \dots, n\}$, le long de l'axe (O_x) . Chaque position x_k est espacée d'une distance δ_k par rapport à la précédente. On se place ici dans une configuration simplifiée dite mono-statique ce qui signifie que l'émetteur et le récepteur du radar sont localisés au même endroit, c'est-à-dire qu'ils partagent la même position physique. Après l'émission du signal $e(t)$, le radar reçoit un signal $r_k(t)$ associé à la position x_k de l'antenne pendant une durée t_r :

$$r_k(t) = \varrho_k(x, y, z)e(t - \tau_k(x, y, z)) \quad (1.6)$$

où le symbole ϱ_k représente le coefficient de rétro-diffusion qui quantifie la fraction du signal émis qui a été diffusée en direction du radar par la cible en question pour la position x_k . Par ailleurs comme l'indique [19] le coefficient de rétro-diffusion peut être considéré comme isotrope quand la taille des cibles sont grandes, c'est à dire supérieur aux longueurs d'onde λ . Puis τ_k représente le temps du signal pour l'aller retour, entre l'antenne et le rétro-diffuseur :

$$\tau_k(x, y, z) = \frac{2\sqrt{(x - x_k)^2 + y^2 + (z - h)^2}}{c} \quad (1.7)$$

où le symbole c représente la célérité de la lumière. Si on considère maintenant les signaux $r_k(t)$ et $e(t)$ ramenés en bande de base $\hat{r}_k(t)$ et $\hat{e}(t)$, on obtient :

$$\hat{r}_k(t) = \varrho\hat{e}(t - \tau_k(x, y, z)) \exp(-j2\pi f_0\tau_k(x, y, z)) \quad (1.8)$$

En supposant maintenant qu'il y ai un certain nombre D de rétro-diffuseurs on obtient le signal complet reçu suivant :

$$\hat{s}_k(t) = \sum_{d=1}^D \varrho_d\hat{e}(t - \tau_k(x_d, y_d, z_d)) \exp(-j2\pi f_0\tau_k(x_d, y_d, z_d)) \quad (1.9)$$

1.2.2 Formation des images SAR

Une fois ce signal reçu enregistré il faut maintenant le traiter afin d'en obtenir une image de la zone balayée. Pour ce faire il existe plusieurs algorithmes de construction d'image pour le SAR. L'algorithme de Corrélation Spatio-Temporelle (*CST*) est l'un des algorithmes de formation d'image utilisés dans le cadre du traitement radar SAR. Son principe de base repose sur la corrélation du signal reçu avec le modèle de signal attendu pour chaque point de l'image que l'on souhaite former. On obtient alors :

$$I(x, y) = \sum_{k=1}^K \int_t \hat{s}_k(t)(\hat{e}(t - \tau_k(x, y, z)) \exp(2j\pi f_0\tau_k(x, y, z)))dt \quad (1.10)$$

Plus précisément, l'image $I(x, y)$ en un point spécifique (x, y) est calculée en intégrant la corrélation entre le signal reçu $\hat{s}_k(t)$ et le signal émis $\hat{e}(t - \tau_k(x, y, z))$ pour toutes les positions de l'antenne. Cependant, il est important de noter que ce modèle considère la cible comme étant isotrope, ce qui signifie qu'il ne tient pas compte des variations du signal rétro-diffusé par la cible en fonction de l'angle d'incidence du signal radar et de la position de la cible elle-même. Ces variations peuvent être importantes pour certaines applications

et sont donc un aspect à prendre en compte lors de l'utilisation de l'algorithme *CST*. Il existe également d'autres types d'algorithmes, tels que le *Backprojection*, qui reposent sur les mêmes principes que le *CST*, mais qui offrent un gain de performance en termes de calcul.

La Figure 1.6 illustre une comparaison entre une image optique et une image *SAR* en bande pleine (full-bandwidth), offrant ainsi une première visualisation des distinctions potentielles. La nature des ondes radar utilisées et leurs interactions avec la scène obser-

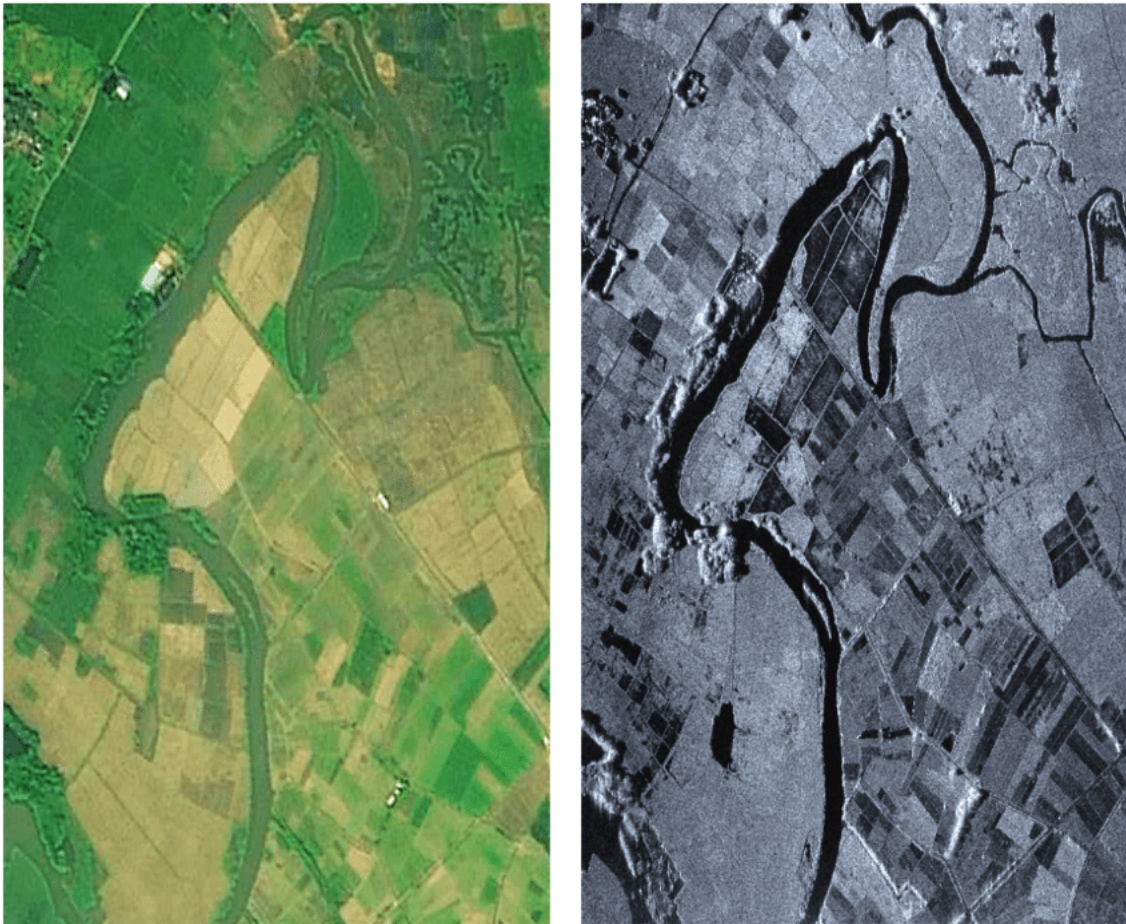


FIGURE 1.6 – Visualisation d'une scène en optique et en *SAR* [20]

vée engendrent la formation de *clutter* d'intensité, ce qui peut regrouper différemment des objets similaires par rapport à ce que l'on observe en imagerie optique. De plus, les propriétés de déformation des ondes radar se distinguent nettement de celles de la lumière visible, et la résolution spatiale du *SAR* ne correspond pas à celle de l'imagerie optique. Ces différences engendrent des détails et des textures distincts dans les images *SAR* par rapport à l'imagerie optique. Par exemple, dans cette image, on peut remarquer une netteté accrue dans les zones aquatiques, ainsi qu'une distinction plus marquée des cultures, en particulier dans la partie supérieure gauche de l'image.

Finalement, on obtient ici une image I constituée de pixels que l'on notera pour la suite y (n'a aucun lien avec la notation vue dans la section précédente), où chaque pixel est représenté dans le domaine complexe, $y \in \mathbb{C}$. Il est désormais opportun de s'interroger sur la possibilité d'une diversification potentielle des informations au niveau des pixels. De façon intuitive, avoir davantage d'informations sur un système permet d'obtenir une compréhension plus approfondie de ses caractéristiques. En ce qui concerne la comparaison

entre ensembles de données, les données multivariées peuvent souvent conduire à une discrimination plus précise par rapport à des données mono-variées. Dans de nombreuses situations, il est préférable d'acquérir le maximum d'informations possible sur les objets d'intérêt. L'acquisition de données *SAR* multivariées, où les pixels ne sont plus limités à une seule dimension, est rendue possible grâce à la polarisation des ondes et d'autres propriétés de diffusions. Ces aspects sont étudiés dans la section suivante.

1.3 Données multivariées

1.3.1 Polarimétrie

La Figure 1.7 illustre de manière graphique une onde électromagnétique, telle que celle utilisée par le radar. L'onde électromagnétique se propage dans l'espace sous la forme de champs électrique (\vec{E}) et magnétique (\vec{B}) oscillants perpendiculaires l'un à l'autre, et tous deux perpendiculaires à la direction de propagation. L'amplitude et la direction de ces champs oscillants déterminent la polarisation de l'onde radar.

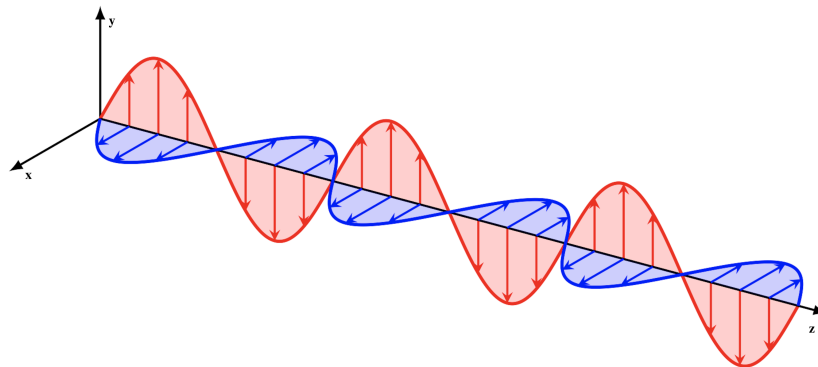


FIGURE 1.7 – Illustration d'une onde électromagnétique, en rouge \vec{E} et en bleu \vec{B}

Dans le *SAR*, la polarisation agit sur le champ électrique (\vec{E}) de l'onde électromagnétique, plutôt que sur le champ magnétique (\vec{B}). La polarisation d'une onde électromagnétique se réfère à l'orientation du champ électrique (\vec{E}) oscillant perpendiculairement à la direction de propagation. Plus précisément, la polarisation est définie par la trajectoire du champ électrique dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Par exemple, dans le cas d'une polarisation horizontale (H), le champ électrique oscille dans un plan horizontal par rapport à la surface de la Terre, tandis que dans le cas d'une polarisation verticale (V), le champ électrique oscille dans un plan vertical. Dans le *SAR*, différentes combinaisons de polarisations (émission/réception) peuvent être utilisées ([21], [22]), telles que la polarisation horizontale-horizontale (HH), la polarisation verticale-verticale (VV), la polarisation croisée (HV ou VH). Le choix de la polarisation détermine la manière dont l'onde électromagnétique interagit avec les cibles sur la surface terrestre et comment elle est rétro-diffusée vers le radar. La Figure 1.8 offre un aperçu visuel de ces concepts fondamentaux de polarisation des ondes électromagnétiques.

Certains utilisent seulement l'une des deux combinaisons entre (HV) et (VH) en polarimétrie *SAR* pour des raisons techniques et pratiques. En effet dans de nombreuses situations réelles, les canaux (HV) et (VH) dans les données polarimétriques *SAR* peuvent être très similaires, voire identiques. Cela signifie que les informations polarimétriques apportées

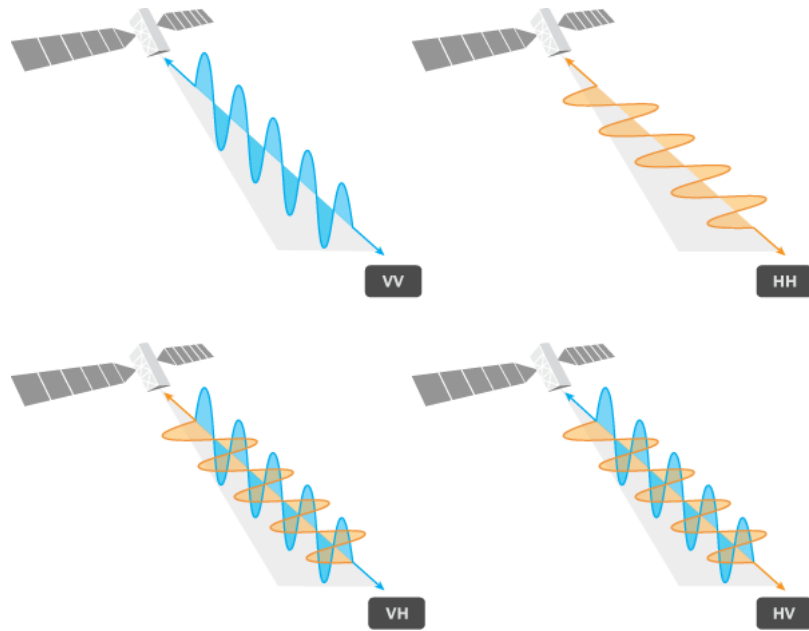


FIGURE 1.8 – Illustration des polarisations émissions/réception VV, HH, VH et HV

par ces deux canaux peuvent être redondantes ou très proches les unes des autres. Dans ces cas, si les canaux (HV) et (VH) sont très similaires, il peut être préférable de se concentrer sur une seule polarisation (HV ou VH) plutôt que d'utiliser les deux en même temps. Cela permet de réduire la complexité des calculs et du traitement des données, tout en conservant une partie importante de l'information polarimétrique.

On présente en Figure 1.9 une comparaison entre une image optique et une image *SAR* en représentation qui inclue la représentation des trois canaux.

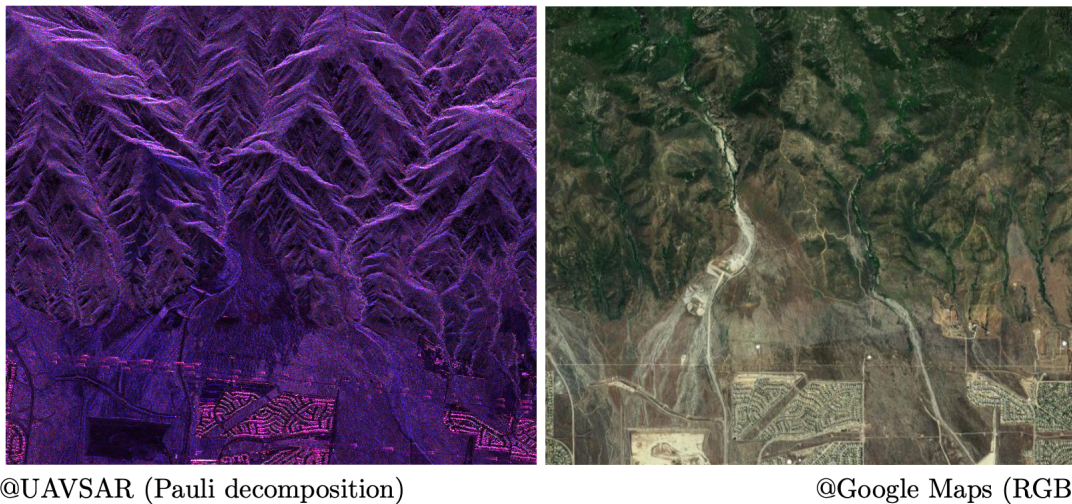


FIGURE 1.9 – Visualisation d'une scène en optique et en *SAR* multivarié construite à partir de données polarimétriques [23]

Ainsi, on obtient une image dont les pixels sont représentés par le vecteur \mathbf{y} où $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^3$. Certaines méthodes permettent de diversifier encore d'avantage la dimension d'un pixel et notamment l'analyse par ondelette.

1.3.2 Diversité spectro-angulaire

L'analyse en ondelettes est une méthode d'analyse fréquentielle et angulaire qui est largement utilisée dans le traitement et l'interprétation des images *SAR* ([24], [25]). Cette technique est basée sur la transformation en ondelettes, qui permet de décomposer une image en différentes échelles de fréquences et d'angles.

Avec la décomposition en ondelettes, il est possible de subdiviser le spectre d'un canal d'une image *SAR* en plusieurs parties, permettant ainsi d'obtenir une division du canal en fonction des différentes informations fréquences et angulaires présentes dans chaque subdivision du spectre.

Dans la Figure 1.10, une image et son spectre sont présentés, le spectre étant décomposé en quatre parties à l'aide de deux méthodes de subdivision différentes.

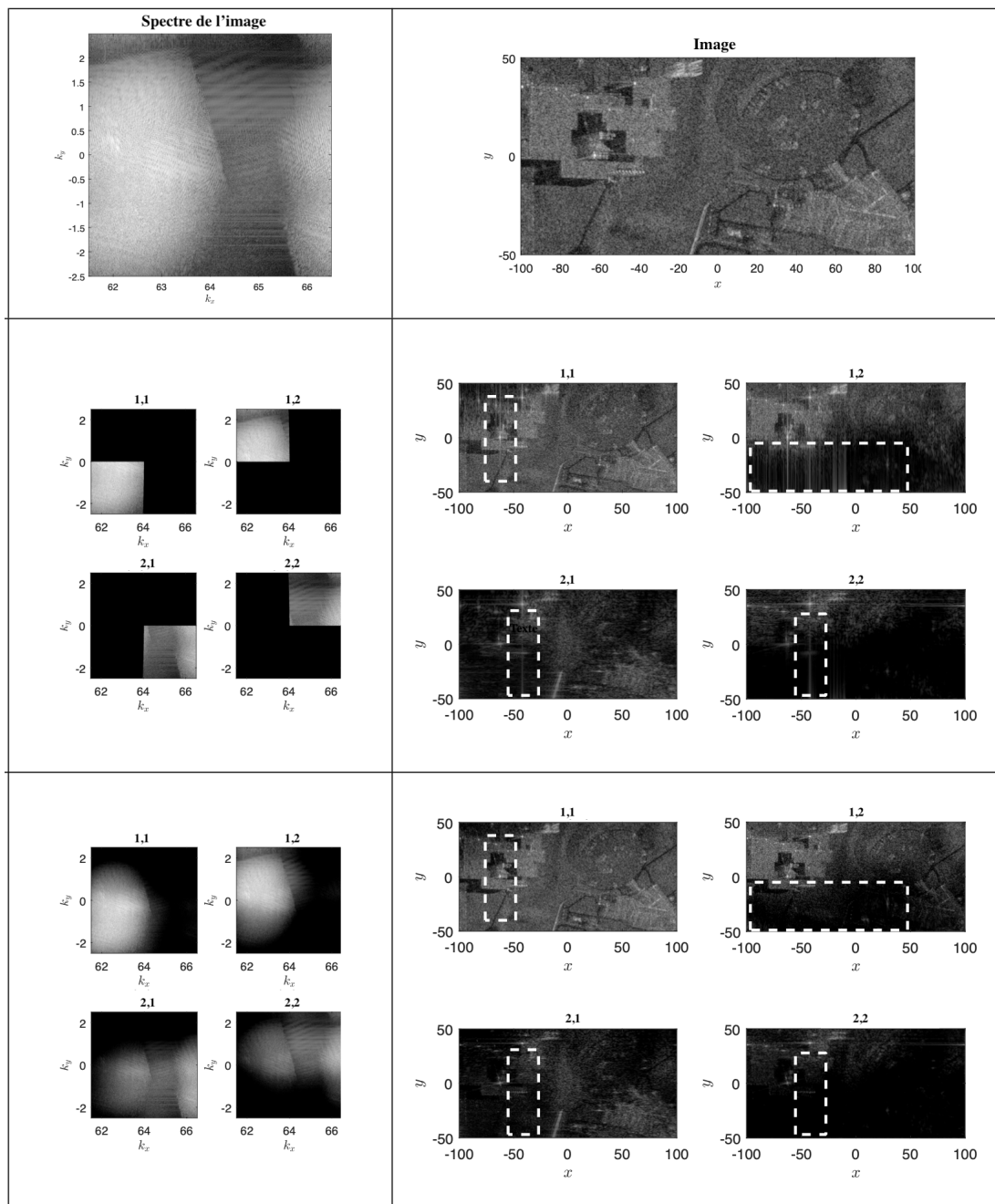


FIGURE 1.10 – Illustration de l'idée générale de la décomposition en ondelette ([23])

Ces deux approches entraînent une division du spectre distincte, conduisant ainsi à une reconstruction d'image différente pour chaque subdivision. On observe que selon la segmentation du canal en différents nombre de composantes de fréquences (C_f) et d'angles (C_θ), certaines parties de l'image sont plus ou moins représentées, ce qui témoigne des informations fréquentielles et angulaires sélectionnées et apporte donc une nouvelle source de discrimination et de diversité. Cette approche permet ainsi d'enrichir les informations contenues dans l'image en capturant des caractéristiques spécifiques associées aux différentes fréquences spatiales et aux différentes informations angulaire.

Cette approche d'analyse en ondelettes permet une augmentation significative de la dimension multivariée des données, donnant lieu à des pixels représentés par le vecteur \mathbf{y} tel que $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{3C_f C_\theta}$. En effet si on prend ici l'exemple présenté en Figure 1.10 on a $C_f = C_\theta = 2$ ce qui donnerait des pixels $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{12}$.

Remarque : Les explications fournies ici restent générales, pour des détails plus approfondis sur ce type d'approche, une référence est la suivante [23].

1.3.3 Séries temporelles *SAR*

Maintenant, un pixel contient une information assez complète sur le diffuseur. Néanmoins cela peut rester insuffisant dans certaines applications. En effet, l'évolution temporelle des diffuseurs est souvent une information pertinente. C'est pourquoi dans cette thèse on considère des séries temporelles d'images *SAR* multivariées. On travaille donc avec des données à quatre dimensions, qui comprennent deux dimensions spatiales, une dimension multivariée et une dimension temporelle comme décrit en Figure 1.11.

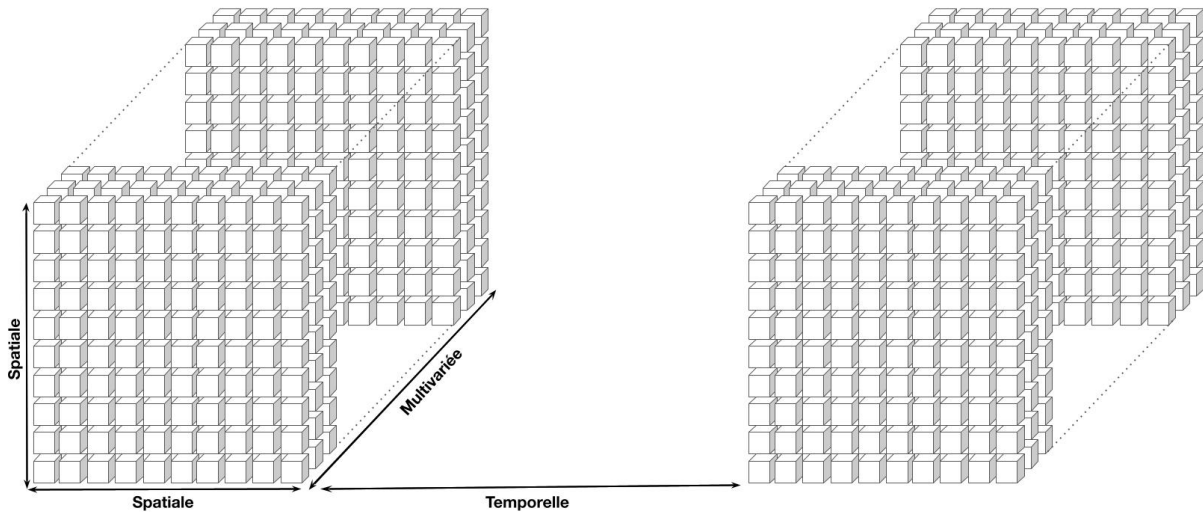


FIGURE 1.11 – Modélisation des dimensions de l'image *SAR*

Les deux dimensions spatiales définissent la taille de l'image, la dimension multivariée est utilisée pour capturer les informations polarimétriques, qui décrivent les propriétés de rétro-diffusion radar en utilisant différentes combinaisons de polarisations du signal. La quatrième dimension, la dimension temporelle, permet de suivre l'évolution des scènes observées au fil du temps, donnant ainsi naissance aux séries temporelles *SAR*. On obtient ainsi une série d'images dont les pixels sont représentés par $\mathbf{y}_{n,\ell}$ où $\mathbf{y}_{n,\ell} \in \mathbb{C}^{3C_f C_\theta}$ et où ℓ est l'indice temporel tel que $\ell \in \{1, \dots, L\}$ et $n \in \{1, \dots, N\}$ est l'indice spatiale parcourant les N pixels de l'image au temps ℓ .

En acquérant des images *SAR* à différents instants, on peut donc surveiller les évolutions au cours du temps, les mouvements du terrain, les variations saisonnières, les phénomènes météorologiques, et bien d'autres processus dynamiques. Dans cette thèse, notre intérêt principal se portera sur la détection des changements en utilisant une série temporelle d'images *SAR* multivariées.

1.3.4 Modèle des données *SAR*

Pour les données *SAR*, il est courant d'adopter un modèle gaussien ([26], [27]) pour les données. Celui-ci peut être justifié dans le cas de résolution faible où l'on est en présence d'un grand nombre de diffuseurs par pixel, en exploitant le théorème central limite. Cependant, il est important de noter que la résolution spatiale des radars *SAR* peut varier, pouvant être inférieure à 1 mètre et atteindre jusqu'à 100 mètres. En général, on évoque une résolution faible lorsque celle-ci se situe entre 20 et 100 mètres, une résolution moyenne dans la plage de 5 à 20 mètres, et une haute résolution pour des valeurs inférieures à 5 mètres. On peut donc comprendre que selon la résolution spatiale et en fonction de la zone observée, la densité de rétro-diffuseurs peut varier considérablement. Par conséquent, l'hypothèse d'un grand nombre de rétro-diffuseurs ne peut pas toujours être satisfaite, et la distribution gaussienne peut ne pas être un modèle valable dans toutes les situations, en particulier dans des zones avec une faible densité de rétro-diffuseurs. C'est pourquoi des travaux ont mis en avant d'autres distributions. Par exemple, la distribution K a été considérée dans [28], la distribution de *Weibull* dans [29], la distribution gaussienne généralisée inverse dans [30] ou plus généralement la famille des distributions elliptiques complexes ([31]).

Il est donc essentiel de tenir compte de la variabilité des rétro-diffuseurs en fonction de la zone d'observation, en plus de la résolution spatiale, lors de l'analyse des données *SAR*. Dans notre étude, nous adopterons le modèle gaussien. Nos simulations, présentées dans le Chapitre 4, permettront d'évaluer empiriquement la pertinence du modèle gaussien pour nos données *SAR* spécifiques.

Dans le chapitre suivant, nous examinerons les études portant sur la détection de changement dans les séries temporelles *SAR*, avant de situer et contextualiser notre étude.

Détection de changements et test d'égalité de covariances

Sommaire

2.1	Détection de changements	27
2.1.1	Introduction	27
2.1.2	État de l'art des méthodes de détection de changements pour l'imagerie SAR	29
2.1.2.1	Méthodes sans modèle statistique	29
2.1.2.2	Méthodes avec modèle statistique	31
2.2	Régime asymptotique des grandes dimensions	36
2.2.1	Introduction au régime	36
2.2.2	Spectre des matrices de <i>Fisher</i>	37
2.2.2.1	Cas général	37
2.2.2.2	Cas particulier où $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$	39
2.2.2.3	Cas particulier du modèle signal plus bruit	40
2.2.3	Spectre des matrices de <i>Wishart</i>	44
2.2.3.1	Cas général	44
2.2.3.2	Cas particulier où $\mathbf{R}_\ell = \sigma^2 \mathbf{I}$	45
2.2.3.3	Cas particulier du modèle signal plus bruit	47
2.2.4	Contribution sur l'étude du spectre de $\hat{\mathbf{R}}$	49
2.2.4.1	Introduction	49
2.2.4.2	Résultats au premier ordre	50
2.2.4.3	Résultats au second ordre	51
Annexes		54
2.A	Preuve du Théorème 9	55
2.A.1	Quelques notations	55
2.A.1.1	Linéarisation	56
2.A.1.2	Résultats asymptotique pour le polynôme caractéristique de $\check{\mathbf{Y}}$	56
2.A.1.3	Spectre de $\hat{\mathbf{R}}$	58
2.B	Preuve du Théorème 10	59
2.B.1	Quelques notations	59
2.B.2	Approximation des polynômes caractéristiques	59
2.B.3	Théorème limite central	61

2.C	Preuve de la Proposition 2	62
2.D	Preuve de la Proposition 3	64
2.D.1	Outils utiles	64
2.D.2	Développement de Ψ'	65

Dans ce Chapitre 2, diverses approches pour la détection de changements sont présentées. Notre étude se concentre particulièrement sur les méthodes qui reposent sur un modèle pour les données SAR, notamment en utilisant un modèle gaussien, comme exposé dans le chapitre précédent. Nous nous pencherons spécifiquement sur les tests d'égalité de covariance, détaillant différentes statistiques de tests pertinentes et diverses hypothèses d'études. Ce chapitre se poursuivra par une analyse approfondie du spectre des matrices de covariance qui entre en jeu dans les statistiques de test présentées.

2.1 Détection de changements

2.1.1 Introduction

Que ce soit dans le domaine de la surveillance environnementale, de la finance, de la médecine ou de la télédétection, les séries temporelles offrent un aperçu essentiel de l'évolution des phénomènes. La détection de changements à travers des séries temporelles repose sur l'identification de modifications significatives dans des ensembles de données enregistrés au fil du temps. On donne en Figure 2.1 un exemple de scène qui présente une évolution de cultures au cours du temps, capturée par un système *SAR*.

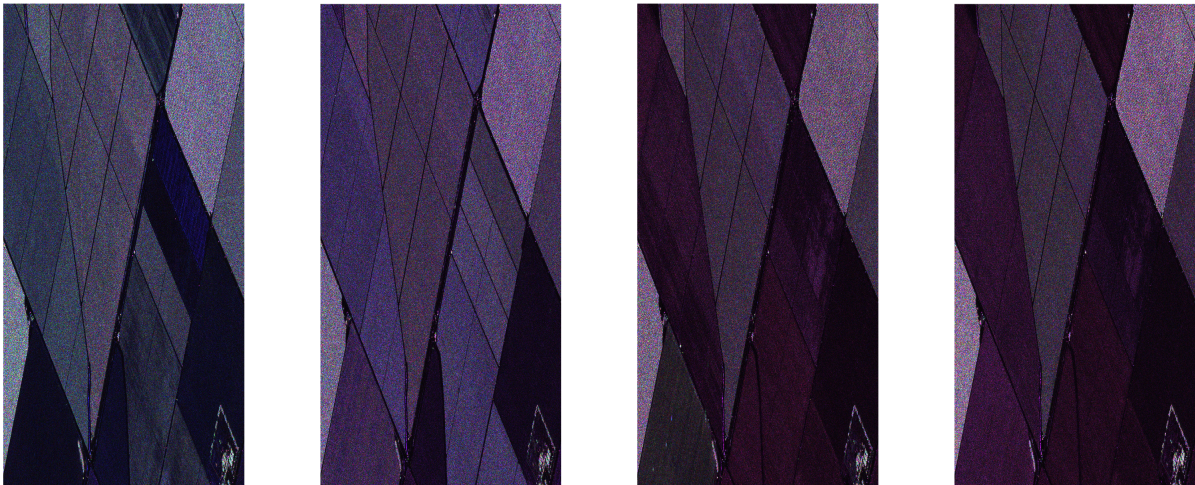


FIGURE 2.1 – Exemple d'une série temporelle *SAR*

La détection de changements au sein de ces séries vise à repérer des moments où des altérations significatives se sont produites dans les processus sous-jacents. Ces changements peuvent prendre diverses formes, comme des ruptures soudaines, des modifications graduelles ou des périodes de stabilité suivies de perturbations. Les méthodes de détection de changements pour les séries temporelles peuvent varier en fonction de la nature des données et des caractéristiques des phénomènes étudiés.

En repartant du modèle présenté dans les Sections 1.2 et 1.3 on a une série temporelle d'image *SAR* dont chaque pixel est défini comme un vecteur $\mathbf{y}_\ell \in \mathbb{C}^M$ avec $M = 3 \times C_f \times C_\theta$ où C_f et C_θ ont été introduits en Section 1.3.2. On a donc pour chaque pixel de l'image

l'évolution de ceux-ci au fil du temps ℓ avec $\ell \in \{1, \dots, L\}$. Comme illustré avec la Figure 2.2, l'analyse des données *SAR* peut être réduite à l'examen de fenêtres glissantes (appelées "patches") de taille N_ℓ .

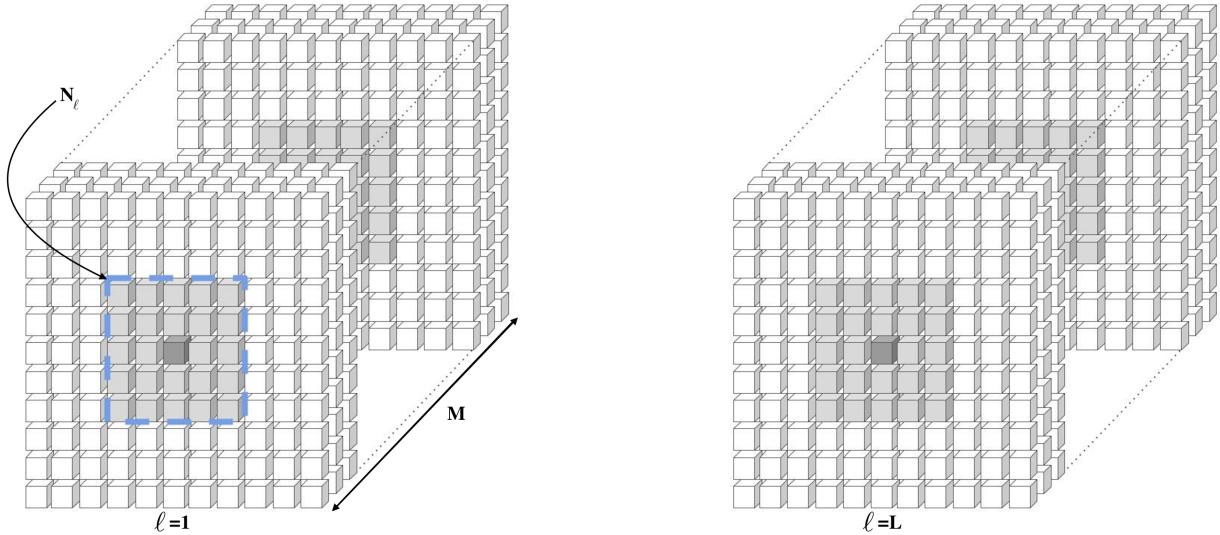


FIGURE 2.2 – Illustration des *patches* pour l'imagerie *SAR*

Les pixels d'étude sont représentés en gris clair, tandis que le pixel d'intérêt est distingué par une teinte de gris plus foncée.

L'utilisation de *patches* (ou sous-images) pour étudier des données de grandes dimensions, comme les images *SAR*, est une approche courante dans le domaine du traitement d'images et de la télédétection. Cette méthode présente plusieurs avantages :

- Traitement localisé : Le découpage de l'image en *patch* permet de traiter des zones locales de l'image de manière isolée. Cela peut être utile lorsque l'on s'intéresse à des caractéristiques spécifiques dans des parties particulières de l'image ou lorsque l'on souhaite étudier la variabilité spatiale des données.
- Adaptation aux propriétés locales : Dans certaines applications, les propriétés des données peuvent varier d'une région à l'autre de l'image. En utilisant des *patches*, on peut adapter le traitement en fonction des caractéristiques locales, ce qui permet d'obtenir des résultats plus précis et pertinents.

On présente en Figure 2.3 une illustration de la notation qui s'en suit $\mathbf{y}_{n,\ell}$, qui se rapporte au contexte de l'imagerie *SAR* pour un cas particulier où la taille du *patch* vaut $N_\ell = 25$ et donc $n \in \{1, \dots, 25\}$.

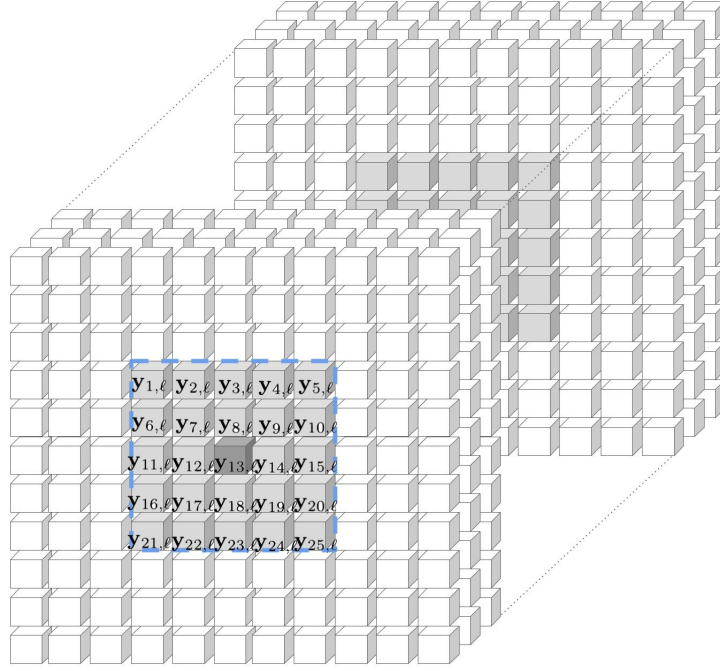


FIGURE 2.3 – Exemple d’application pour l’imagerie, image au temps ℓ

2.1.2 État de l’art des méthodes de détection de changements pour l’imagerie SAR

Dans cette section, nous présentons de manière concise quelques méthodes de détection de changements que l’on peut notamment appliquer pour l’imagerie SAR. Parmi le panorama des méthodes existantes, nous avons identifié deux catégories majeures : d’une part, les méthodes sans modèle préalablement posé, et d’autre part, les méthodes reposant sur un modèle préétabli.

2.1.2.1 Méthodes sans modèle statistique

On peut d’abord aborder les mesures de distance, parmi lesquelles figurent des méthodes classiques et intuitives telles que la distance euclidienne :

$$d_E = \sum_{\substack{\ell, \ell'=1 \\ \ell' \neq \ell}}^L d(\ell, \ell'), \quad (2.1)$$

avec

$$d(\ell, \ell') = \sum_{n=1}^{N_\ell} \|\mathbf{y}_{n,\ell} - \mathbf{y}_{n,\ell'}\|_2, \quad (2.2)$$

où $\forall(\ell, \ell') \in \{1, \dots, L\}^2$ avec $\ell' \neq \ell$, $N_\ell = N_{\ell'}$.

D’autres travaux de traitement des données SAR se concentrent uniquement sur l’amplitude des données complexes liée à l’intensité du signal réfléchi par la surface terrestre. Ces méthodes l’utilisent généralement pour des tâches de classification ([32], [33]), de détection d’objets ([34], [35]) et d’analyse des propriétés physiques des matériaux de la surface ([36], [37]). On peut évoquer le *Log-Ratio*, ou rapport logarithmique ([38], [39]) qui se base uniquement sur l’amplitude de l’image SAR. Par exemple, considérons une

série temporelle d'images, notées I_ℓ , composées de pixels multivariés. En utilisant nos notations, nous désignons les pixels par $y_{n,\ell}$, où $n \in \{1, \dots, N_\ell\}$ représente le nombre total de pixels, et $\ell \in \{1, \dots, L\}$ indique les L instants distincts. Ainsi, nous pouvons définir le *Log-Ratio* $_{i,j}$ pour chaque pixel de coordonnées i, j comme suit :

$$\text{Log-Ratio}_{i,j} = \sum_{\substack{\ell, \ell'=1 \\ \ell' \neq \ell}}^L \sum_{n=1}^{N_\ell} \log \left(\frac{\|\mathbf{y}_{n,\ell}\|_2}{\|\mathbf{y}_{n,\ell'}\|_2} \right) \quad (2.3)$$

avec le *patch* de taille N_ℓ centré sur le pixel de coordonnées (i, j) et $\forall (\ell, \ell') \in \{1, \dots, L\}^2$ avec $\ell' \neq \ell$, $N_\ell = N_{\ell'}$. Une fois que les valeurs ont été calculées pour chaque pixel, un histogramme de ces valeurs est généré. Ensuite, différentes méthodes peuvent être utilisées pour déterminer un seuil au-delà duquel un changement est considéré ([40], [38]).

D'autres travaux de traitement des données *SAR* basent leur étude sur le signal complet, amplitude et phase. Parmi ces approches, on peut mentionner la technique de Détection de Changement de Cohérence (*Coherent Change Detection* - CCD). On présente ici une formule standard ([41]) pour générer une carte de détection à partir d'une série d'images *SAR* ([42]) :

$$\text{CCD} = \sum_{\substack{\ell, \ell'=1 \\ \ell' \neq \ell}}^L \rho_{i,j}(\ell, \ell') \quad (2.4)$$

avec

$$\rho_{i,j}(\ell, \ell') = \frac{\left| \sum_{n=1}^{N_\ell} \mathbf{y}_{n,\ell} \mathbf{y}_{n,\ell'}^* \right|}{\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{N_\ell} \|\mathbf{y}_{n,\ell}\|_2 \right) \left(\sum_{n=1}^{N_\ell} \|\mathbf{y}_{n,\ell'}\|_2 \right)}} \quad (2.5)$$

où $\rho_{i,j}(\ell, \ell')$ est le coefficient de corrélation au pixel de coordonnées $\{i, j\}$ entre les images ℓ et ℓ' . Cela donne un indicateur de similitude pour chaque pixel, avec des valeurs variant de 0 à 1. Lorsqu'un changement significatif se produit, la valeur tend à se rapprocher de 0, tandis que lorsqu'il n'y a pas de changement, la valeur tend à se rapprocher de 1.

Il existe également des méthodes de détection de changements basées sur des mesures de divergence, telles que la divergence de *Kullback-Leibler* ([43]) ou la divergence de *Jensen-Shannon* ([44]), qui permettent d'évaluer la différence entre deux distributions de probabilité. On donne en exemple la divergence de *Kullback-Leibler* qui est couramment utilisée en statistiques, en apprentissage automatique, et en théorie de l'information pour comparer deux densités de probabilité. La divergence de *Kullback-Leibler* entre $p_{i,j}(\ell)$, la densité de probabilité du pixel de coordonnées (i, j) à l'instant ℓ , et $p_{i,j}(\ell')$, la densité de probabilité du pixel de coordonnées (i, j) à l'instant ℓ' , est définie comme suit :

$$D_{i,j} = \int p_{i,j}(\ell)(x) \log \left(\frac{p_{i,j}(\ell)(x)}{p_{i,j}(\ell')(x)} \right) dx. \quad (2.6)$$

En pratique les lois de probabilité $p_{i,j}(\ell)$ et $p_{i,j}(\ell')$ sont estimées empiriquement ([43], [45], [46]) à partir du *patch* des N_ℓ échantillons centrés sur le pixel de coordonnées (i, j) . En ce qui concerne l'interprétation de la valeur $D_{i,j}$, plus la divergence est élevée, plus les distributions sont différentes, et inversement.

Dans une méthode de détection de changements, comme celles évoquées précédemment, il est crucial de pouvoir choisir un seuil qui distingue les valeurs de changement ou de non-changement de la manière la plus judicieuse possible. Pour toutes les méthodes

évoquées précédemment, il est possible d'appliquer, par exemple, des méthodes basées sur l'apprentissage automatique. Ces méthodes reposent sur l'utilisation de données préalablement étiquetées, c'est-à-dire des exemples de situations où le changement est connu, afin d'entraîner un modèle de détection. L'objectif est d'apprendre à un algorithme à reconnaître les caractéristiques distinctives des changements sur un ensemble de données d'entraînement, lui permettant ainsi de généraliser sur des nouvelles données et de détecter les changements dans des situations non étiquetées. Cependant, ces méthodes nécessitent des données étiquetées pour l'entraînement, ce qui peut être difficile à obtenir dans certains domaines notamment en *SAR*.

2.1.2.2 Méthodes avec modèle statistique

Une autre possibilité est d'utiliser des méthodes qui adoptent une approche basée sur un modèle de données. Par exemple, on a vu que pour les données *SAR* on pouvait éventuellement utiliser le modèle gaussien.

Considérons alors le contexte de séries temporelles M -multidimensionnelles $(\mathbf{y}_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (\mathbf{y}_{n,L})_{n \in \mathbb{Z}}$, supposées mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $\ell \in \{1, \dots, L\}$:

$$(\mathbf{y}_{n,\ell})_{n \in \mathbb{Z}} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{C}^M}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_\ell), \quad (2.7)$$

où $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^M}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_\ell)$ représente la distribution normale complexe à moyenne nulle avec une matrice de covariance \mathbf{R}_ℓ . La détection des changements dans la distribution de $(\mathbf{y}_{n,\ell})_{n \in \mathbb{Z}}$, pour tout $\ell \in \{1, \dots, L\}$, peut être formalisée comme le test d'hypothèse binaire suivant traitant de l'égalité des L matrices de covariance $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : & \mathbf{R}_1 = \dots = \mathbf{R}_L \\ \mathcal{H}_1 : & \exists (i, j) \in \{1, \dots, L\}^2 / \mathbf{R}_i \neq \mathbf{R}_j \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'objectif est ensuite de développer des statistiques de test permettant de détecter des changements à travers les matrices de covariance \mathbf{R}_ℓ et, par extension, à travers la distribution des données $(\mathbf{y}_{n,\ell})_{n \in \mathbb{Z}}$.

En repartant des hypothèses du test (2.8) on s'intéresse au ratio des vraisemblances sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 . Nous avons comme expression de vraisemblance :

$$f(\mathbf{y}_{n,\ell} : \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L) = \prod_{\ell=1}^L \left(\frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{R}_\ell)} \right)^{N_\ell} \exp \left(- \sum_{n=1}^{N_\ell} \mathbf{y}_{n,\ell} \mathbf{R}_\ell^{-1} \mathbf{y}_{n,\ell}^* \right) \quad (2.9)$$

On introduit ainsi le log du Rapport de Vraisemblance Généralisé (GLR : *Generalized likelihood ratio*), initialement développé par *Wilks* dans [47], comme ([27]) :

$$\text{GLR} = \frac{1}{NLM} \log \left(\frac{\sup_{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L \in \mathcal{H}_M^{++}} (f_1(\mathbf{y}_{n,\ell} : \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L))}{\sup_{\mathbf{R} \in \mathcal{H}_M^{++}} (f_0(\mathbf{y}_{n,\ell} : \mathbf{R}))} \right), \quad (2.10)$$

où \mathcal{H}_M^{++} représente l'ensemble des matrices *Hermitiennes* définies positives et f_0, f_1 représentent les densités des observations (cf. (2.9)) sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 . On montre finalement que ([27]) :

$$\begin{aligned} \text{GLR} &= \frac{1}{NLM} \log \left(\frac{f_1(\mathbf{y}_{n,\ell} : \hat{\mathbf{R}}_1, \dots, \hat{\mathbf{R}}_L)}{f_0(\mathbf{y}_{n,\ell} : \hat{\mathbf{R}})} \right) \\ &= C + \frac{1}{M} \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \log \left(\det(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

où C est une constante, les matrices $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ sont définies comme suit ([47], [48]) :

$$\hat{\mathbf{R}}_\ell := \frac{1}{N_\ell} \sum_{n=1}^{N_\ell} \mathbf{y}_{n,\ell} \mathbf{y}_{n,\ell}^* \quad (2.12)$$

et où la matrice $\hat{\mathbf{R}}$, que l'on nomme la matrice de covariance combinée, est définie comme suit :

$$\hat{\mathbf{R}} := \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \hat{\mathbf{R}}_\ell, \quad (2.13)$$

avec $N = N_1 + \dots + N_L$.

Des statistiques de test alternatives ont également été proposées. On peut citer les tests de *Rao* ([49]), de *Durbin* ([50]), de *Nagao* ([51]), et de *Schott* ([52]), qui coïncident ou sont statistiquement équivalents avec le test de *Terrell* ([53], [27]) ou encore le test de *Wald*. Leurs études et leurs performances (puissances : [53], [54]) restent similaires à celles du GLR ([27]), ce qui explique l'intérêt particulier pour ce dernier. Par conséquent on a une grande classe de statistiques de test largement rencontrée dans la littérature ([27]) qui implique, à condition que $M < N_1, \dots, N_L$, des statistiques spectrales linéaires des matrices $\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}$ de la forme suivante :

$$S = \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \varphi \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}) \right), \quad (2.14)$$

Ici, φ désigne une fonction continue définie sur $]0, +\infty[$ et λ_k désigne la k -ième valeur propre. En particulier sont inclus dans la classe de statistiques (2.14), le GLR avec $\varphi(x) = \log(x)$:

$$\text{GLR} = \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \log \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}) \right), \quad (2.15)$$

ou encore par exemple la statistique de *Nagao* avec $\varphi(x) = (x - 1)^2$:

$$\text{Nagao} = \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}) - 1 \right)^2. \quad (2.16)$$

On notera également que nous pouvons réécrire la définition (2.13) comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \frac{N - N_\ell}{N} \sum_{\ell' \neq \ell} \frac{N_{\ell'}}{N - N_\ell} \hat{\mathbf{R}}_{\ell'} + \frac{N_\ell}{N} \hat{\mathbf{R}}_\ell \\ &= \frac{N - N_\ell}{N} \hat{\mathbf{R}}^{(\ell)} + \frac{N_\ell}{N} \hat{\mathbf{R}}_\ell \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec $\hat{\mathbf{R}}^{(\ell)} = \sum_{\ell' \neq \ell} \frac{N_{\ell'}}{N - N_\ell} \hat{\mathbf{R}}_{\ell'}$, ce qui permet une réécriture de la statistique S (2.14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \varphi \left(\lambda_m \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \left(\frac{N - N_\ell}{N} \hat{\mathbf{R}}^{(\ell)} + \frac{N_\ell}{N} \hat{\mathbf{R}}_\ell \right) \right) \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \varphi \left(\frac{N_\ell}{N} + \frac{N - N_\ell}{N} \lambda_m(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}^{(\ell)}) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

qui permet l'introduction des matrices $\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)}$ communément appelées matrices de *Fisher*, étant le produit d'une matrice de *Wishart* et d'une matrice de *Wishart* inverse indépendantes. Ainsi, à travers ces formulations, il devient clair que l'analyse du comportement des matrices de *Fisher* est au cœur de l'étude de (2.14), (2.15).

Étant donné l'importance du GLR dans la littérature ([55], [49], [27], [56], [57], [58]), nous avons choisi de nous concentrer sur les résultats associés à cette statistique et en particulier sur son comportement sous l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0), c'est-à-dire sa distribution sous cette hypothèse.

Régime où M, N_ℓ, L sont fixes Une première approche est d'étudier le comportement du GLR en supposant que les dimensions L , M et N_ℓ sont constantes. En notant qu'il est possible de réécrire le GLR présenté en (2.15) sous une forme qui dépend de matrices de *Wishart* plutôt que de matrices de *Fisher*, comme suit :

$$\text{GLR} = \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \left(\log \left(\det(\hat{\mathbf{R}}) \right) - \log \left(\det(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) \right), \quad (2.19)$$

la distribution du GLR sous \mathcal{H}_0 pour le cas $L = 2$ peut être obtenue à partir des résultats présentés dans [59]. En effet pour comprendre le comportement sous \mathcal{H}_0 , une approche est d'étudier la densité de probabilité des valeurs propres d'une matrice de *Wishart* ([59], [60], [61], [62], [63]), puis une fois cette densité de probabilité connue, il est possible d'obtenir la densité de probabilité de la statistique en utilisant le théorème de transfert.

Cependant il convient de noter que ces résultats ([59], [60], [64]) sont plutôt complexes et difficilement exploitables, poussant ainsi à explorer d'autres approches.

Une approche fréquemment adoptée consiste à supposer que le nombre d'échantillons N_ℓ est suffisamment élevé par rapport à la dimension des données M . Par conséquent, pour l'étude des statistiques de test de la forme (2.14), il est courant d'envisager un régime asymptotique spécifique appelé le *régime asymptotique standard*.

Régime asymptotique standard Le régime asymptotique standard considère le cas où le nombre de séries temporelles L et la dimension M des données restent fixes par rapport au nombre d'échantillons N_ℓ . On notera ce régime asymptotique $\xrightarrow[N_\ell \rightarrow \infty]$ pour la suite.

Dans ce régime, en plus des résultats de convergences suivants (conséquence de la loi des grands nombres) :

$$\hat{\mathbf{R}}_\ell - \mathbf{R}_\ell \xrightarrow[N_\ell \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

ce qui permet également de déduire

$$\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \xrightarrow[N_1, \dots, N_L \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

la convergence en loi sous l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) pour le GLR est établie ([47], [48], [65]). Ce résultat découle d'une application du Théorème de *Wilks* ([66]) et fournit une expression de la loi du GLR qui ne dépend pas des matrices de covariance \mathbf{R} et \mathbf{R}_ℓ . Au lieu de cela, elle repose exclusivement sur des paramètres constants, à savoir M et L , simplifiant ainsi son application. On obtient de ce fait sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 :

$$2M(N_1 + \dots + N_L) \text{GLR} \xrightarrow[N_\ell \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi^2(M^2(L-1)) \quad (2.22)$$

où $M^2(L - 1)$ représente le degré de liberté de la loi du χ^2 et \mathcal{D} la convergence en distribution. On illustre ce résultat de convergence vers la loi du χ^2 en Figure 2.4 où on considère le scénario où $\mathbf{R}_\ell = \mathbf{I}_M$ avec $L = 2$, $M = 5$, $N_1 = N_2$ et $N_\ell = \{50, 100, 200\}$.

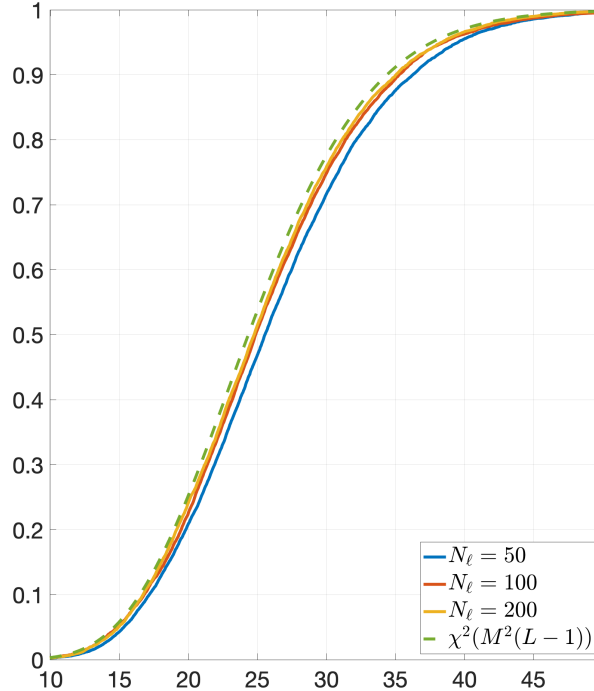


FIGURE 2.4 – Évolution de la fonction de répartition (CDF) du GLR sous \mathcal{H}_0 avec $N_\ell \in \{50, 100, 200\}$ et comparaison avec le théorème de *Wilks*

Afin d'améliorer la compréhension des courbes et d'intégrer des valeurs pour $N_\ell = \{500, 1000\}$, nous introduisons dans le Tableau 2.1 un niveau théorique de $(1 - \alpha)$ -quantile de la loi du χ^2 issu du Théorème de *Wilks*, que nous comparons aux niveaux empiriques issues de chaque courbe. Cette approche permet d'observer l'évolution avec l'augmentation de N_ℓ .

$CDF \backslash \alpha$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$N_\ell = 50$	0.009	0.02	0.03	0.07	0.13
$N_\ell = 100$	0.006	0.015	0.025	0.06	0.12
$N_\ell = 200$	0.005	0.015	0.022	0.05	0.11
$N_\ell = 500$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$N_\ell = 1000$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1

TABLE 2.1 – Convergence vers la loi du $\chi^2(M^2(L - 1))$

On remarque ainsi que les résultats empiriques sont en accord avec le résultat issu du Théorème de *Wilks* (2.22) pour des valeurs N_ℓ grandes telles que $N_\ell \gg M$.

Cependant, la condition $N_\ell \gg M$ n'est pas toujours vraie dans certaines applications, notamment dans le domaine du *SAR*, où la dimension M peut prendre des valeurs proches de la taille de l'échantillon N_ℓ . Dans ces conditions, la convergence en loi mise en évidence par le Théorème de *Wilks* n'est plus adaptée. En effet, nous illustrons dans la Figure 2.5 le même scénario que celui présenté dans la Figure 2.4, où $\mathbf{R}_\ell = \mathbf{I}_M$, $L = 2$ avec $N_\ell = 1000$

mais nous mettons cette fois-ci en évidence l'écart par rapport à la loi du χ^2 lorsque M augmente.

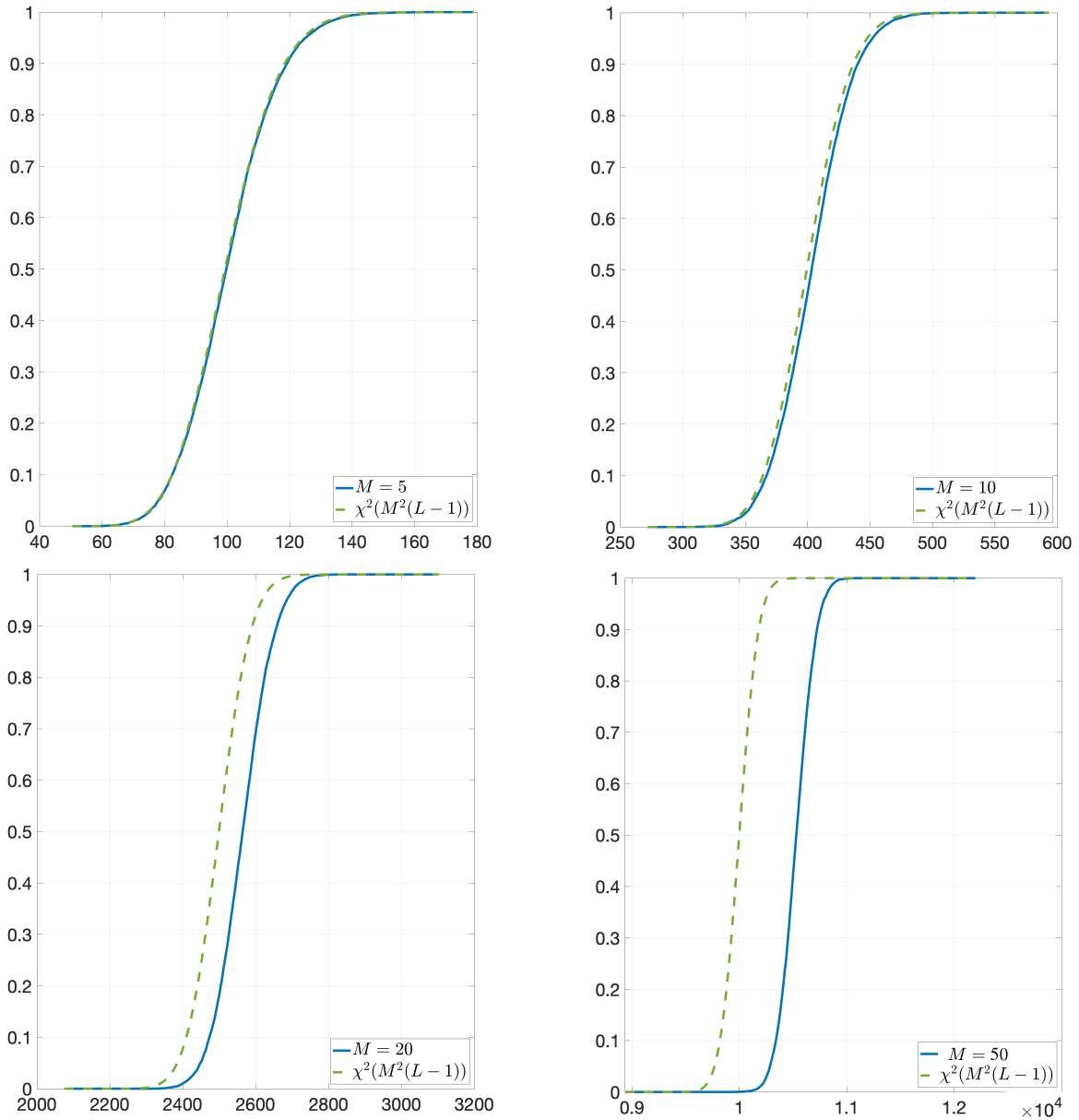


FIGURE 2.5 – Évolution de la fonction de répartition (CDF) du GLR sous \mathcal{H}_0 avec $M \in \{5, 10, 20, 50\}$, $L = 2$, $N_\ell = 1000$ et comparaison avec le théorème de *Wilks*

On constate un écart de plus en plus marqué par rapport à la loi du χ^2 avec M qui augmente, remettant en cause la pertinence de l'utilisation de la loi du χ^2 proposée par le Théorème de *Wilks* lorsque M est du même ordre de grandeur que N_ℓ .

Par conséquent, on s'intéresse à un nouveau régime asymptotique, à savoir le *régime asymptotique des grandes dimensions*.

2.2 Régime asymptotique des grandes dimensions

2.2.1 Introduction au régime

Le contexte où M, N_1, N_2, \dots, N_L sont du même ordre de grandeur peut être modélisé de manière plus réaliste en utilisant le *régime asymptotique des grandes dimensions* ([67], [68], [69]). Dans ce régime, on suppose que M tend vers l'infini au même rythme que N_1, N_2, \dots, N_L , tandis que L est maintenu constant, ce qui donne :

Hypothèse 1. *La taille des échantillons $N_1 = N_1(M), \dots, N_L = N_L(M)$ sont des fonctions de M telles que*

$$\frac{M}{N_\ell} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} c_\ell$$

avec $M \rightarrow \infty$, où $c_1, \dots, c_L > 0$ et L est indépendant de M .

Dans ce nouveau régime asymptotique, on a vu que les résultats de convergence (2.20), (2.21) et le Théorème de *Wilks* disponibles pour le régime asymptotique standard ne sont plus adaptés.

Dans les sections suivantes, en partant de l'expression des statistiques de test de la forme de S que l'on retrouve dans (2.15), on présente les résultats concernant le spectre des matrices $\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)}$ qui permettront, comme pour le régime des dimensions fixes, d'amener les résultats de convergence de S sous \mathcal{H}_0 . On fera ensuite de même pour les matrices de *Wishart* que l'on retrouve dans (2.19). On propose dans le paragraphe suivant une courte introduction sur la transformée de *Stieltjes* qui sera utile pour les sections qui suivent.

Transformée de *Stieltjes*. On rappelle dans un premier temps quelques résultats autour des transformées de *Stieltjes*, qui constituent l'objet central des résultats qui vont suivre. Soit μ une mesure finie sur \mathbb{R} ; sa transformée de *Stieltjes* est donnée par la fonction m_μ définie sur $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ par

$$m_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}.$$

La mesure μ peut être récupérée à partir de la connaissance de sa transformée de *Stieltjes*, comme indiqué dans le résultat suivant.

Lemme 1. *Soit μ une mesure finie sur \mathbb{R} . Alors, pour tout $-\infty < a \leq b < \infty$,*

$$\mu([a, b]) - \frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathcal{I}(m_\mu(x + iy)) dx.$$

En particulier, si la limite

$$f_\mu(x) := \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \mathcal{I}(m_\mu(x + iy))$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors μ est absolument continue avec une densité f_μ .

En plus de ces propriétés de base, nous utiliserons le résultat suivant sur les suites de transformées de *Stieltjes*.

Lemme 2. *Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Il existe une mesure de probabilité μ telle que

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{e} \mu.$$

2. La séquence $(m_{\mu_n})_{n \geq 1}$ converge ponctuellement sur \mathbb{C}^+ vers une fonction m telle que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} iym(iy) = -1.$$

Si 1. ou 2. est vérifiée, alors $m = m_\mu$.

Pour étudier la convergence étroite de la séquence $(\hat{\mu}_n)_{n \geq 1}$, il est donc équivalent d'étudier la convergence ponctuelle presque sûre des transformées de *Stieltjes* associées

$$\hat{m}_{\mu_n}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\hat{\mu}_n(\lambda)}{\lambda - z}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^+$.

2.2.2 Spectre des matrices de *Fisher*

2.2.2.1 Cas général

On peut définir la distribution empirique des valeurs propres de la matrice de *Fisher* $\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)}$ avec :

$$\hat{\mathbf{R}}_\ell = \frac{\mathbf{Y}_\ell \mathbf{Y}_\ell^*}{N_\ell}, \quad (2.23)$$

où $\mathbf{Y}_\ell = [\mathbf{y}_{1,1}, \dots, \mathbf{y}_{N_1,1}, \dots, \mathbf{y}_{1,L}, \dots, \mathbf{y}_{N_L,L}]$, à travers la mesure de probabilité aléatoire suivante :

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{\lambda_k} \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)} \right) \quad (2.24)$$

avec $\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)}), \dots, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)})$ les valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)}$ et δ_x la mesure de *Dirac* en x .

En repartant des notions évoquées dans le paragraphe sur la transformée de *Stieltjes*, on définit la résolvante de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)}$:

$$\mathbf{Q}_F(z) = \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{(\ell)} - z\mathbf{I} \right)^{-1}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On peut de la même manière définir la transformée de *Stieltjes* de $\hat{\mu}_N$ (2.24) comme suit :

$$m_{\hat{\mu}_N}(z) = \frac{1}{M} \text{tr}(\mathbf{Q}_F(z)) \quad (2.25)$$

Il est ensuite possible de montrer la convergence étroite de $\hat{\mu}_N$ à partir de la convergence de $m_{\hat{\mu}_N}$. Ainsi, d'après les travaux de [70], on a le résultat suivant.

Hypothèse 2. Soit $0 < c_\ell < 1$ et $0 < c_{(\ell)}$ définie comme suit :

$$\frac{M}{N - N_\ell} = \frac{M}{N_{(\ell)}} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} c_{(\ell)}$$

avec $N = N_1 + \dots + N_L$.

Théorème 1. *Sous les Hypothèses 1, 2, \mathcal{H}_1 , pour le cas particulier où $L = 2$ et où :*

$$0 < \lim(\inf(\lambda_M(\mathbf{R}_1))) \text{ et } \lim(\sup(\lambda_M(\mathbf{R}_2))) < \infty \quad (2.26)$$

la mesure spectrale empirique $\hat{\mu}_N$ satisfait la relation suivante :

$$\hat{\mu}_N \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{e} \mu_N \quad (2.27)$$

avec μ_N une mesure de probabilité déterministe et absolument continue. Puis de manière équivalente on obtient :

$$m_{\hat{\mu}_N}(z) - m_{\mu_N}(z) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad (2.28)$$

où

$$m_{\hat{\mu}_N}(z) = \int_R \frac{d\hat{\mu}_N(\lambda)}{\lambda - z} \quad (2.29)$$

est la transformée de Stieltjes de μ_N qui est l'unique solution de l'équation :

$$m_{\mu_N}(z) = \frac{1}{N} \text{tr} \left(\left(\left(\frac{N_2 - M}{N} - z \cdot m_{\mu_N}(z) \right) \left(\frac{N_1}{N} + z \cdot m_{\mu_N}(z) \right)^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 - z \cdot \mathbf{I} \right)^{-1} \right) \quad (2.30)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu_N)$ avec $\text{supp}(\mu_N)$ le support de μ_N .

On notera que les résultats ne se restreignent pas uniquement à la distribution gaussienne [71].

On illustre, par le biais d'une équation au point fixe et l'utilisation de la transformée de Stieltjes inverse, ce résultat dans la Figure 2.6 pour 1000 itérations de *Monte-Carlo* et pour un cas où $L = 2$, $\sigma^2 = 1$, $M = 50$, $N_1 = N_2 \in \{500, 100\}$, et \mathbf{R}_1 est choisi de manière à ce que ses valeurs propres soient fixées à $\{2, 5, 10, 20, 50\} + \sigma^2$ avec une multiplicité égale à 10 pour chacune d'entre elles tandis que $\mathbf{R}_2 = (1 + \sigma^2)\mathbf{I}$.

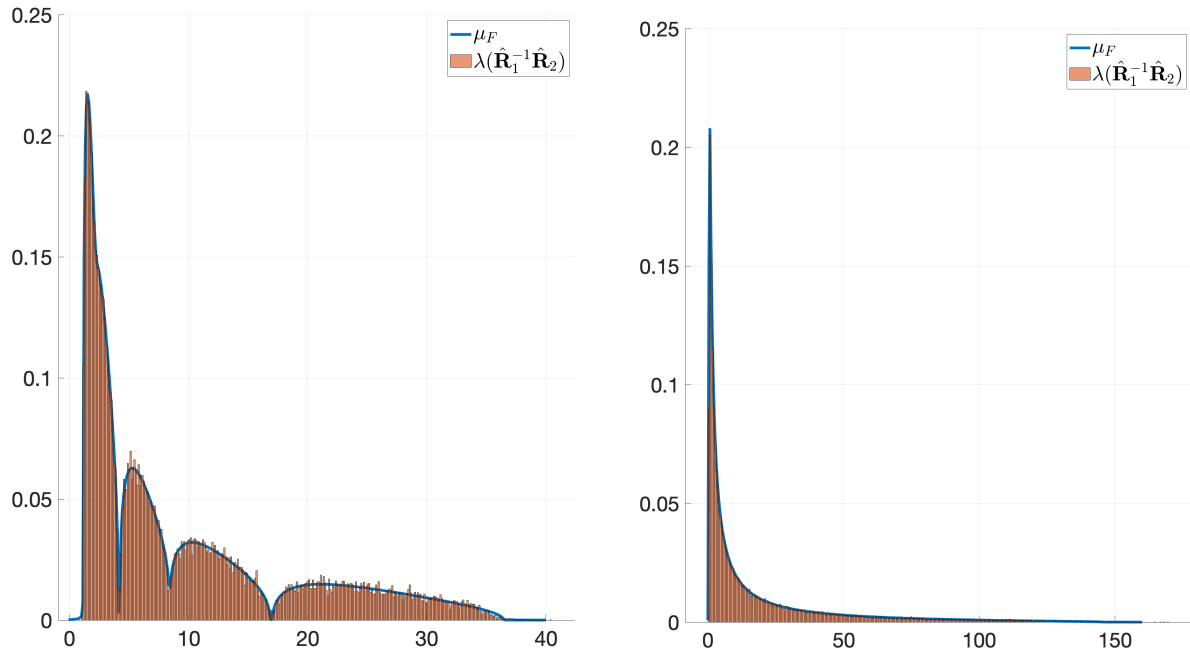


FIGURE 2.6 – Densité de la loi μ_N pour $\sigma^2 = 1$, $M = 50$, $N_\ell = 500$ à gauche et $N_\ell = 100$ à droite et $sp(\mathbf{R}_1) = \{(2 + \sigma^2)^{(p)}, (5 + \sigma^2)^{(p)}, (10 + \sigma^2)^{(p)}, (20 + \sigma^2)^{(p)}, 50^{(p)}\}$ où $p = 10$

On peut ensuite examiner le cas particulier lorsque $L = 2$ et que $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$.

2.2.2.2 Cas particulier où $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$

L'étude du spectre d'une matrice de Fisher $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2$ pour ce cas particulier se base de nouveau sur (2.24). Les travaux de référence menés par *Wachter* ([72]) (puis poursuivis par *Yin* ([73], [74]), *Silverstein* ([75]), et *Bai* ([76])) ont permis d'obtenir un résultat connu sous le nom de distribution de *Wachter*.

Théorème 2. *Sous les Hypothèses 1 et 2, il existe μ_N une mesure de probabilité déterministe et absolument continue telle que*

$$\hat{\mu}_N \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{e} \mu_N, \quad (2.31)$$

avec

$$\frac{d\mu_N}{d\lambda}(\lambda) = \frac{(1 - c_1) \sqrt{(\lambda - \lambda_F^-) (\lambda_F^+ - \lambda)}}{2\pi x(c_2 + c_1 \lambda)} \mathbb{1}_{[\lambda_F^-, \lambda_F^+]}(\lambda), \quad (2.32)$$

et où

$$\lambda_F^\pm = \left(\frac{1 \pm \sqrt{c_1 + c_2 - c_1 c_2}}{1 - c_1} \right)^2. \quad (2.33)$$

On illustre ce résultat à travers la Figure 2.7 avec une simulation où on considère $L = 2$. Cela conduit à obtenir la matrice de Fisher $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2$ et on en extrait l'histogramme des valeurs propres pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*. Dans cette simulation, on fixe $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \sigma^2 \mathbf{I}$ avec $\sigma^2 = 1$, et on choisit $N_1 = N_2 = 2M$ avec $M \in \{10, 100\}$.

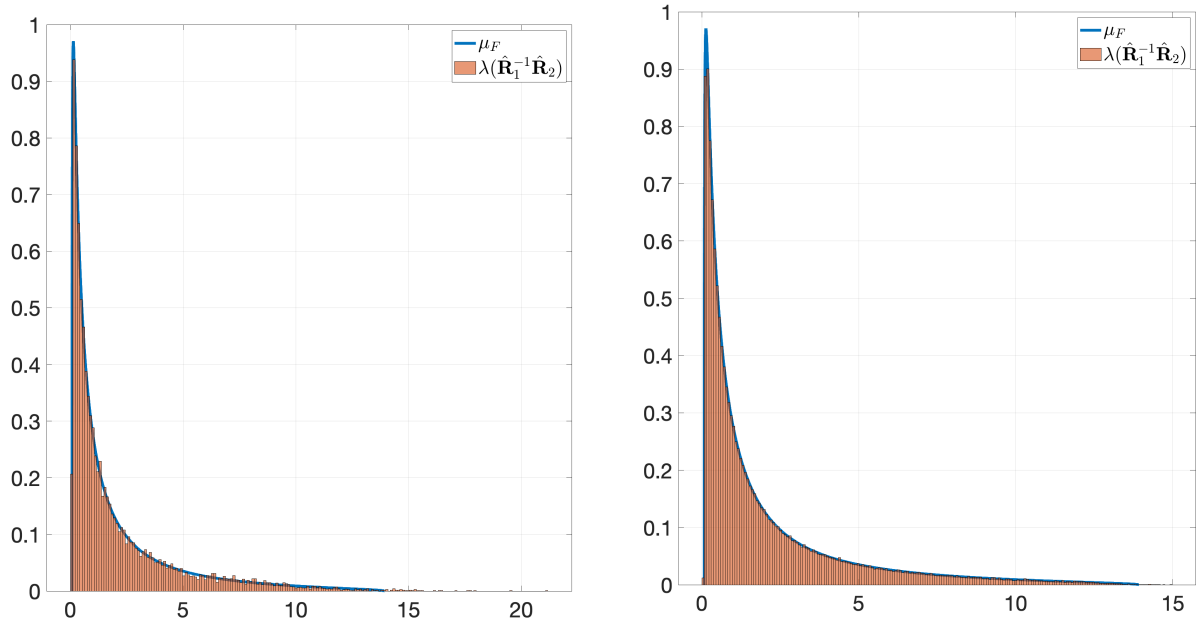


FIGURE 2.7 – Évolution de la densité de la loi de $\hat{\mu}_N$ avec $M \in \{10, 100\}$ et $N_\ell = 2M$

Encore une fois, on peut constater que la précision s'améliore à mesure que les dimensions augmentent. Cependant, il est important de noter que même pour des dimensions modérées, les résultats demeurent pertinents. On notera un résultat important ([77]) :

$$\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda^+, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda^- \quad (2.34)$$

qui implique que toutes les valeurs propres se situent presque sûrement dans un voisinage du support de la distribution à partir d'un certain rang M .

On illustre maintenant en Figure 2.8 la distribution de *Wachter* pour différentes valeurs de c_1 en prenant ici $c_1 = c_2$.

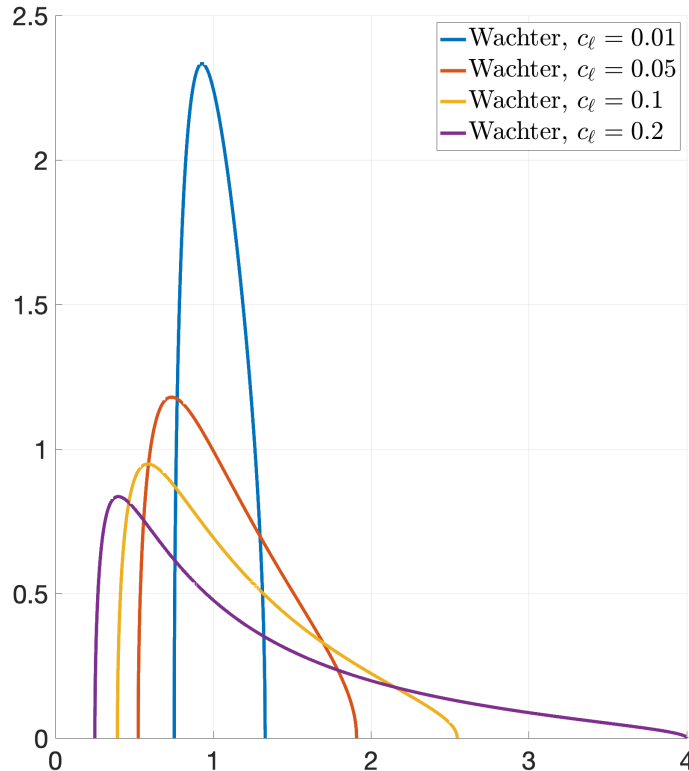


FIGURE 2.8 – Évolution de la densité de la loi de $\hat{\mu}_N$ en fonction de c_1

On observe bien l'impact de la valeur prise par c_1 qui, plus elle s'approchera de 1 plus le support s'étendra, avec le bord droit qui tend vers l'infini et le bord gauche qui tend vers 0.

Ainsi, on dispose également de résultats pour des matrices de covariance \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 différentes ou égales.

Une fois la distribution connue pour les matrices $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1}\hat{\mathbf{R}}_2$ il est possible d'en déduire des résultats pour la statistique de test S . En effet, en ce qui concerne la statistique de test S , différents travaux ([78], [79]) ont pu établir un théorème central limite sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , notamment pour les statistiques spectrales linéaires basées sur les valeurs propres des matrices de *Fisher*, en particulier dans le cas où $L = 2$. On obtient ainsi de nouveau un comportement théorique pour les statistiques de test de la forme de S (2.14) sous \mathcal{H}_0 permettant de contrôler ainsi le taux d'erreur de Type I.

Cependant, dans de nombreuses applications, telles que le *SAR*, on a généralement un modèle composé à la fois d'un signal et de bruit.

2.2.2.3 Cas particulier du modèle signal plus bruit

Dans plusieurs applications impliquant des observations de grande dimension, les variations potentielles de la covariance \mathbf{R}_ℓ peuvent être principalement dues à une composante de faible rang (voir par exemple [80], [81], [82]). Dans ce cas, on a le modèle suivant :

$$\mathbf{R}_\ell = \mathbf{\Gamma}_\ell + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.35)$$

avec $\mathbf{\Gamma}_\ell$ représentant la matrice de covariance de rang K supposé connu et fixe par rapport à M , d'un signal utile et $\sigma^2\mathbf{I}$ la matrice de covariance d'un bruit additif spatialement blanc.

On présente ensuite les résultats sur le comportement des plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1}\hat{\mathbf{R}}_2$.

Les convergences des plus grandes valeurs propres d'une matrice de *Fisher* suivant le modèle (2.35) ont été établies dans [83] et [71]. La particularité à noter est que pour les matrices de *Fisher*, lorsque le rang $K > 1$, les valeurs propres extrêmes qui sont au dessus ou en dessous d'une valeur critique peuvent sortir de la distribution de *Wachter*. On a ainsi le résultat suivant.

Hypothèse 3. *Pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,*

$$\lambda_k(\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2) = a_k + o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \quad (2.36)$$

et pour tout $k' \in \{M - K, \dots, M\}$,

$$\lambda_{k'}(\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2) = a_{k'} + o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \quad (2.37)$$

L'hypothèse 3 est une considération technique fréquente lors de la manipulation de modèles à rang réduit (voir par exemple [84], [85], [86]). Cette hypothèse assure que les grandeurs d'intérêt, notamment les valeurs propres des matrices de covariance $\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2$ convergent dans le régime asymptotique des grandes dimensions. Il est important de souligner que cette hypothèse est nécessaire lors de l'analyse asymptotique théorique mais ne restreint pas la pratique, car la statistique de test est utilisée avec des valeurs fixes M, N_1, \dots, N_L (cf. Chapitre 3 Section 3.2).

Théorème 3. *Sous les Hypothèses 1, 2 et 3 on a $\forall k \in \{1, \dots, K\}$,*

$$\lambda_k\left(\hat{\mathbf{R}}_1^{-1}\hat{\mathbf{R}}_2\right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \phi(a_k),$$

avec $\forall k \in \{1, \dots, K\}$

$$\phi(a_k) := \begin{cases} \frac{(a_k+c_1)(a_k+1)}{a_k-c_1(a_k+1)} & \text{si } \left|a_k - \frac{1}{1-c_2}\right| > \frac{1}{1-c_2}\sqrt{c_1+c_2-c_1c_2} \\ \left(\frac{1+\sqrt{c_1+c_2-c_1c_2}}{1-c_1}\right)^2 & \text{si } 1 < a_k < \frac{1}{1-c_2}(1+\sqrt{c_1+c_2-c_1c_2}), \\ \left(\frac{1-\sqrt{c_1+c_2-c_1c_2}}{1-c_1}\right)^2 & \text{si } 1 > a_k > \frac{1}{1-c_2}(1-\sqrt{c_1+c_2-c_1c_2}) \end{cases}$$

On illustre, avec la Figure 2.9, l'histogramme des valeurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1}\hat{\mathbf{R}}_2$ et la limite associée pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*, dans un scénario où $M = 40$, $N_1 = N_2 = 5M$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ et $\mathbf{\Gamma}_2 = \text{diag}(10, 0, \dots, 0)$.

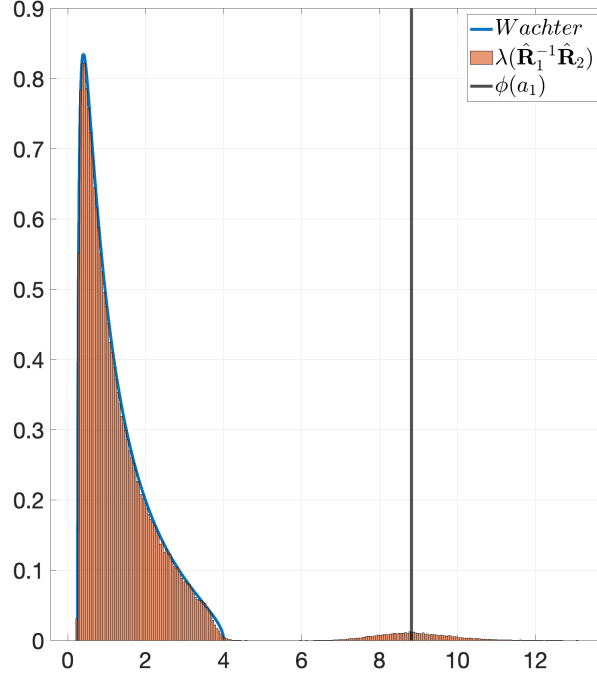


FIGURE 2.9 – Histogramme des valeurs propres des matrices $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2$ pour 1000 itérations de *Monte-Carlo*

Dans les références [83] et [71], on trouve également un théorème central limite pour les valeurs propres qui respectent une des conditions de séparation présentées dans le Théorème 3.

Théorème 4. *Sous les Hypothèses 1, 2 et 3 et lorsque les a_k respectent la condition de séparation décrite dans le Théorème 3, on a $\forall k \in \{1, \dots, K\}$,*

$$\sqrt{M} \left(\lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2 \right) - \phi(a_k) \right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{0}, \mathcal{V}_k^2 \right),$$

avec

$$\mathcal{V}_k^2 = \frac{(2c_1 - c_1^2)a_k^2(a_k + 1)^2(a_k^2 - c_1(a_k + 1)^2 - c_2)}{(c_1 - a_k + c_1a_k)^4}$$

On illustre le Théorème 4 dans la Figure 2.10 en utilisant les mêmes conditions de simulation que pour la Figure 2.9.

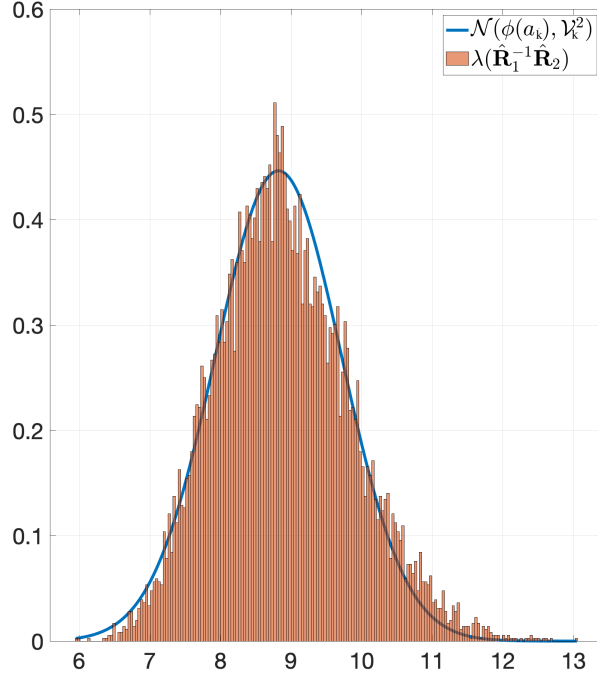


FIGURE 2.10 – Histogramme de la plus grande valeur propre des matrices $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{R}}_2$ pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

On obtient ainsi le comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes d'une matrice de *Fisher* sous le modèle (2.35). Cependant, lorsque le rang K reste constant dans le régime *asymptotique des grandes dimensions*, les matrices $\mathbf{R}_\ell^{-1} \mathbf{R}_{(\ell)}$ sont des perturbations de rang fixe de l'identité, et on peut montrer, sous les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 ([72], [71]) que :

$$S \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^L \frac{c}{c_\ell} \int_{x_\ell^-}^{x_\ell^+} \varphi \left(\frac{c}{c_\ell} (1+x) \right) f_\ell(x) dx \quad (2.38)$$

presque sûrement, où

$$c := \left(\sum_{\ell=1}^L \frac{1}{c_\ell} \right)^{-1} \quad (2.39)$$

et où f_ℓ est la distribution définie par :

$$f_\ell(x) = \left(\frac{1}{c_\ell} - 1 \right) \frac{\sqrt{(x - x_\ell^-)(x_\ell^+ - x)}}{2\pi x(1+x)} \mathbb{1}_{[x_\ell^-, x_\ell^+]}(x)$$

avec $x_\ell^\pm = \frac{c_\ell - c}{c(1-c_\ell)^2} \left(1 \pm \sqrt{c_\ell + \frac{cc_\ell}{c_\ell - c} - \frac{cc_\ell^2}{c_\ell - c}} \right)^2$. La limite étant identique sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , les statistiques de test basées sur (2.14) ne sont donc pas pertinentes dans le régime *asymptotique des grandes dimensions* et pour le modèle rang réduit en (2.35).

Le travail majeur de cette thèse consiste alors à élaborer une nouvelle statistique, non plus basée sur S , mais plutôt fondée sur une comparaison des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ et $\hat{\mathbf{R}}$. Afin d'introduire une nouvelle statistique basée sur les matrices de *Wishart*, nous présentons dans la partie suivante leurs études. Ensuite, dans le Chapitre 3, nous envisageons de proposer une statistique de test basée sur les résultats obtenus.

2.2.3 Spectre des matrices de *Wishart*

2.2.3.1 Cas général

On considère toujours le modèle défini, sous l'Hypothèse 1, par les équations (2.7) et (2.23) pour la matrice \mathbf{R}_ℓ . C'est grâce aux travaux pionniers de *Marcenko-Pastur* [68] que l'on dispose de résultats asymptotiques importants pour ces matrices de covariances. On peut définir la distribution empirique des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ à travers la mesure de probabilité aléatoire suivante :

$$\hat{\mu}_\ell = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)} \quad (2.40)$$

avec $\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_\ell), \dots, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_\ell)$ les valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ et δ_x la mesure de *Dirac* en x .

Dans le but d'analyser le comportement des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$, on utilise également la transformée de *Stieltjes* et on définit d'abord la résolvante de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_\ell$:

$$\mathbf{Q}_\ell(z) = \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell - z\mathbf{I} \right)^{-1}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Puis on peut exprimer la transformée de *Stieltjes* de $\hat{\mu}_\ell$ (2.40) comme suit :

$$m_{\hat{\mu}_\ell}(z) = \frac{1}{M} \text{tr}(\mathbf{Q}_\ell(z)) \quad (2.41)$$

Les études ([87], [70]) ont montré que la convergence étroite de $\hat{\mu}_\ell$ peut être obtenue en étudiant la convergence de $m_{\hat{\mu}_\ell}(z)$.

Théorème 5. *Sous l'Hypothèse 1, et sous réserve que la matrice \mathbf{R}_ℓ soit bornée en norme spectrale il existe μ_ℓ une mesure de probabilité déterministe et absolument continue telle que :*

$$\hat{\mu}_\ell \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{e} \mu_\ell \quad (2.42)$$

On a de manière équivalente :

$$m_{\hat{\mu}_\ell}(z) - m_{\mu_\ell}(z) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad (2.43)$$

où :

$$m_{\mu_\ell}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\ell(\lambda)}{\lambda - z} \quad (2.44)$$

est la transformée de *Stieltjes* de μ_ℓ qui est l'unique solution de l'équation qui suit :

$$m_{\mu_\ell}(z) = \frac{1}{M} \text{tr} \left(\left(\mathbf{R}_\ell \left(1 - z \frac{M}{N_\ell} m_{\mu_\ell}(z) - \frac{M}{N_\ell} \right) - z\mathbf{I} \right)^{-1} \right) \quad (2.45)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu_\ell)$ avec $\text{supp}(\mu_\ell)$ le support de μ_ℓ .

On notera également que les résultats présentés dans le Théorème 5 sont présentés pour un modèle Gaussien mais ne sont pas limités à cette distribution ([70]).

Par conséquent, par rapport au modèle de bruit pur, le comportement asymptotique des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ n'est plus déterminé de manière explicite, mais s'obtient à travers des équations. Néanmoins, une approximation de la densité de la loi de μ_ℓ peut être obtenue en résolvant l'équation au point fixe représentée par (2.45) puis en inversant la

transformée de *Stieltjes*. Ce résultat est illustré dans la Figure 2.11 pour 1000 itérations de *Monte-Carlo*, où on a choisi $\sigma^2 = 1$, $M = 50$, $N_\ell = \{2M, 10M\}$ et où les valeurs propres de la matrice \mathbf{S}_ℓ ont été fixées à 2, 5, 10, 20 et 50, avec une multiplicité égale à 10 pour chacune d'entre elles.

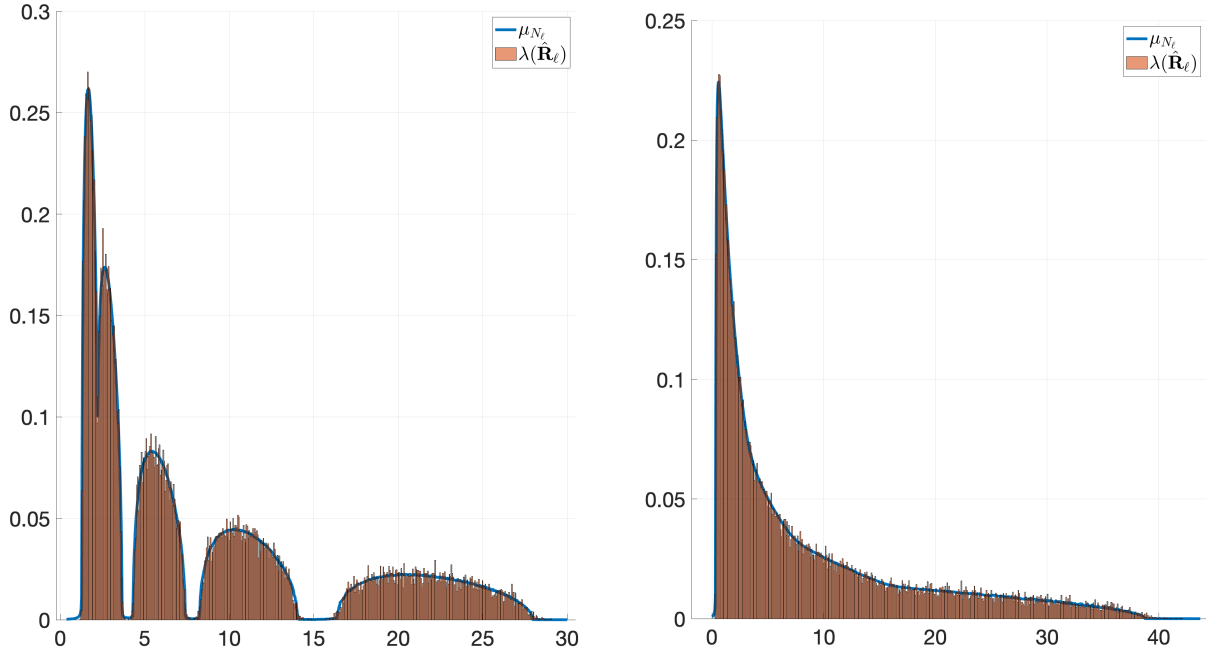


FIGURE 2.11 – Densité de la loi μ_{N_ℓ} pour $\sigma^2 = 1$, $M = 50$, $N_\ell = \{500, 100\}$ et $sp(\mathbf{S}_\ell) = \{2^{(p)}, 5^{(p)}, 10^{(p)}, 20^{(p)}, 50^{(p)}\}$ où $p = 10$

Il est également possible d'obtenir des résultats pour le cas particulier où le signal est composé uniquement de bruit c'est à dire lorsque $\mathbf{R}_\ell = \sigma^2 \mathbf{I}$.

2.2.3.2 Cas particulier où $\mathbf{R}_\ell = \sigma^2 \mathbf{I}$

Les travaux de *Marcenko-Pastur* fournissent le résultat suivant ([68], [88]).

Théorème 6. *Sous l'Hypothèse 1, il existe μ_ℓ une mesure de probabilité déterministe et absolument continue telle que :*

$$\hat{\mu}_\ell \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{e} \mu_\ell \quad (2.46)$$

avec $\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{e}$ désignant la convergence étroite et la loi μ_ℓ étant donnée par :

$$\frac{d\mu_\ell}{d\lambda}(\lambda) = \frac{\sqrt{(\lambda - \lambda^-)(\lambda^+ - \lambda)}}{2\pi\sigma^2 c_\ell \lambda} \mathbb{1}_{[\lambda^-, \lambda^+]}(\lambda) + \left(1 - \frac{1}{c_\ell}\right)^+ \delta, \quad (2.47)$$

et où

$$\lambda^\pm = \sigma^2(1 \pm \sqrt{c_\ell})^2 \quad (2.48)$$

Suite à ces travaux d'autres résultats ont pu mettre en avant les convergences suivantes [77] :

$$\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda^+, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda^- \quad (2.49)$$

Ce résultat implique que toutes les valeurs propres se situent presque sûrement dans un voisinage du support de la distribution à partir d'un certain rang M .

Le Théorème 6 est illustré dans la Figure 2.12 à travers une simulation utilisant une matrice $\mathbf{R}_\ell = \sigma^2 \mathbf{I}_M$ avec $\sigma^2 = 1$. Cette simulation génère l'histogramme des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ pour 1000 itérations de *Monte-Carlo*, avec un ratio $c_\ell = 0.5$ pour différentes valeurs de M telles que ($M \in \{10, 100\}$) et ($N_\ell = 2M$) :

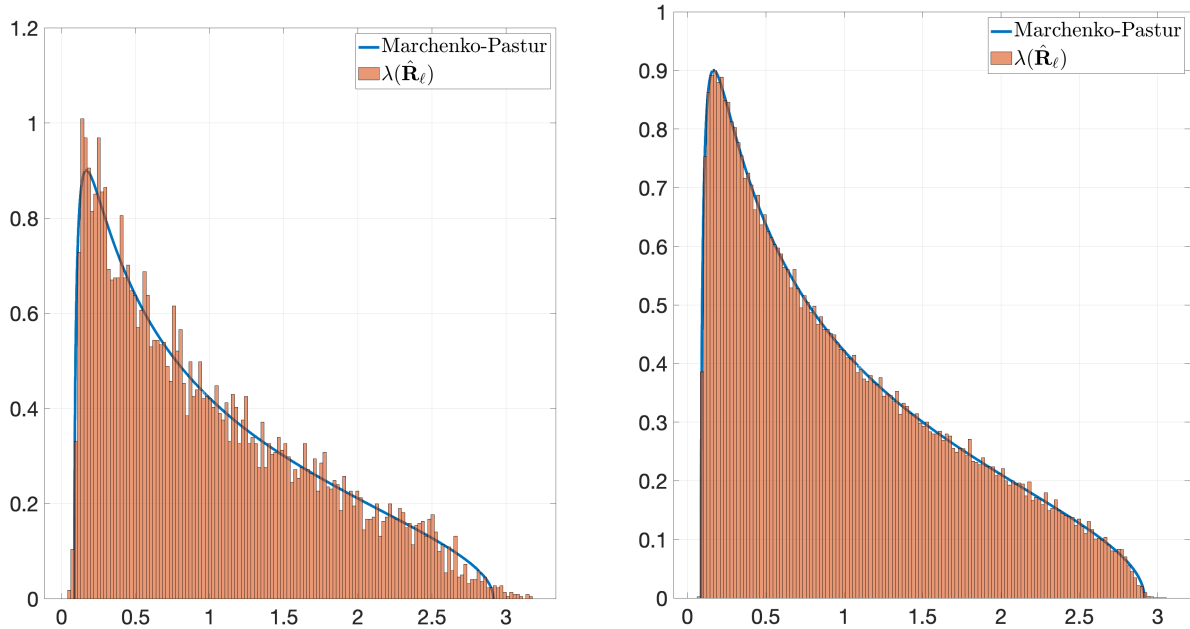


FIGURE 2.12 – Évolution de la densité de la loi de *Marchenko-Pastur* avec $M \in \{10, 100\}$ et $N_\ell = 2M$ pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*.

Il est intéressant de constater que des résultats théoriquement valables pour des dimensions tendant vers l'infini s'avèrent empiriquement raisonnables, même pour des dimensions modérées. De plus on observe bien les résultats de convergence évoqués plus haut. Dans la Figure 2.13 on illustre cette fois-ci la loi pour différents ratios c_ℓ :

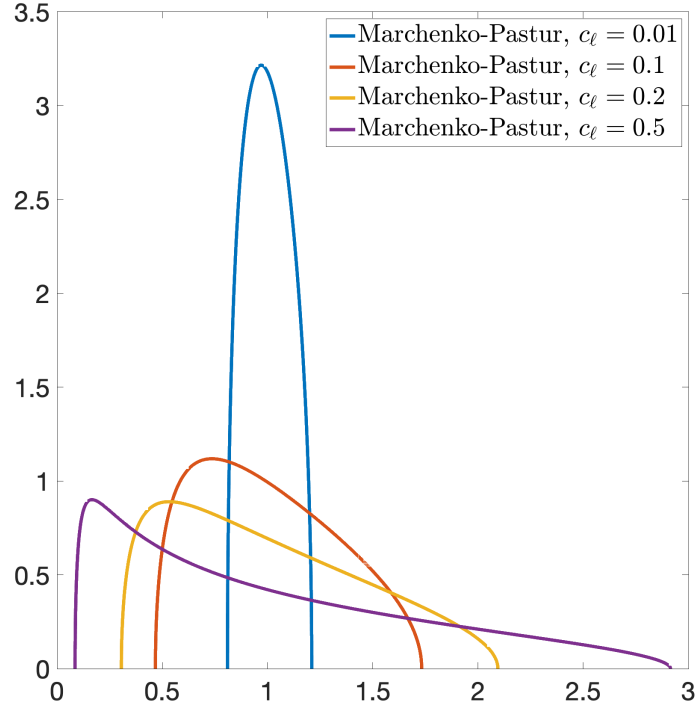


FIGURE 2.13 – Évolution de la densité de la loi de *Marchenko-Pastur* en fonction de c_ℓ

On peut voir un étalement du spectre avec c_ℓ qui tend vers 1. Il est intéressant de retrouver les résultats de convergence (2.20) et (2.21) pour de faibles valeurs de c_ℓ .

2.2.3.3 Cas particulier du modèle signal plus bruit

En ce qui concerne les matrices de *Wishart*, le comportement des plus grandes valeurs propres a été décliné en plusieurs résultats. Le premier concerne la limite des valeurs extrêmes.

Hypothèse 4. Pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $\ell \in \{1, \dots, L\}$,

$$\lambda_k(\mathbf{\Gamma}_\ell) = \gamma_{k,\ell} + o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \quad (2.50)$$

avec $\gamma_{1,\ell} < \gamma_{2,\ell} < \dots < \gamma_{K,\ell}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, KL\}$,

$$\lambda_k(\mathbf{\Gamma}) = \gamma_k + o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \quad (2.51)$$

avec $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_K$.

Encore une fois ici, l'hypothèse 4 est une hypothèse purement technique (voir par exemple [84], [85], [86]) qui assure que les valeurs propres des matrices de covariance $\mathbf{\Gamma}_\ell$ et $\mathbf{\Gamma}$ convergent dans le régime asymptotique des grandes dimensions. Cette hypothèse est nécessaire lors de l'analyse asymptotique théorique mais en pratique la statistique de test est utilisée avec des valeurs fixes M, N_1, \dots, N_L (cf. Chapitre 3 Section 3.2).

Théorème 7. [86, Th. 2.7] Sous les Hypothèses 1 et 4 on a $\forall k \in \{1, \dots, K\}$,

$$\lambda_k\left(\hat{\mathbf{R}}_\ell\right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \phi_c\left(\gamma_{k,\ell}, \sigma^2\right),$$

avec

$$\phi_{c_\ell}(\gamma_{k,\ell}, \sigma^2) := \begin{cases} \frac{(\gamma_{k,\ell} + \sigma^2)(\gamma_{k,\ell} + \sigma^2 c_\ell)}{\gamma_{k,\ell}} & \text{si } \gamma_{k,\ell} > \sigma^2 \sqrt{c_\ell} \\ \sigma^2 (1 + \sqrt{c_\ell})^2 & \text{si } \gamma_{k,\ell} \leq \sigma^2 \sqrt{c_\ell} \end{cases},$$

De plus, $\lambda_{K+1}(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \rightarrow \sigma^2 (1 + \sqrt{c_\ell})^2$ p.s. lorsque $M \rightarrow \infty$.

On illustre le résultat dans la Figure 2.16 en examinant l'histogramme des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_1$ pour 5000 itérations de *Monte-Carlo*, en prenant en compte les paramètres suivants : $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}(5, 0, \dots, 0)$, $\sigma^2 = 1$, $M = 50$, et $N_1 = 100$.

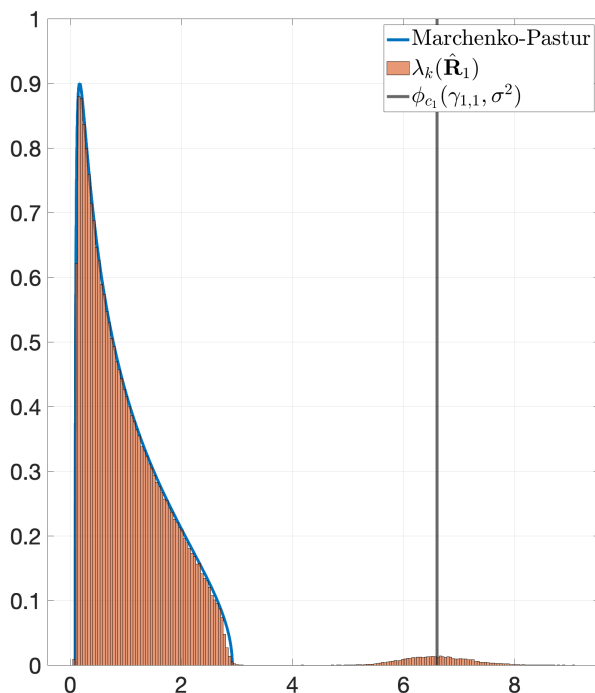


FIGURE 2.14 – Histogramme de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_1$ pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

La limite $\phi_{c_1}(\gamma_{1,1}, \sigma^2)$ est représentée par une ligne verticale noire, et on vérifie ainsi empiriquement sa validité. Par la suite les travaux de [82] ont pu mettre en avant les fluctuations des valeurs propres extrêmes.

Théorème 8. [82, Th. 1.4] Sous les Hypothèses 1 et 4 on a pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $\ell \in \{1, \dots, L\}$:

$$\sqrt{M} \left(\lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell \right) - \phi_{c_\ell}(\gamma_{k,\ell}, \sigma^2) \right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{0}, \theta_{k,\ell}^2 \right),$$

avec

$$\theta_{k,\ell}^2 = c_\ell \frac{(\gamma_{k,\ell}^2 - \sigma^4 c_\ell)(\gamma_{k,\ell} + \sigma^2)^2}{\gamma_{k,\ell}^2}$$

Dans la Figure 2.15, on présente les histogrammes des plus grandes valeurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_1$. On y illustre la loi normale théoriquement associée, avec la limite calculée dans le Théorème 7 et la variance calculée dans le Théorème 8. On reproduit les conditions de simulation de la Figure 2.14 en choisissant $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}(5, 0, \dots, 0)$.

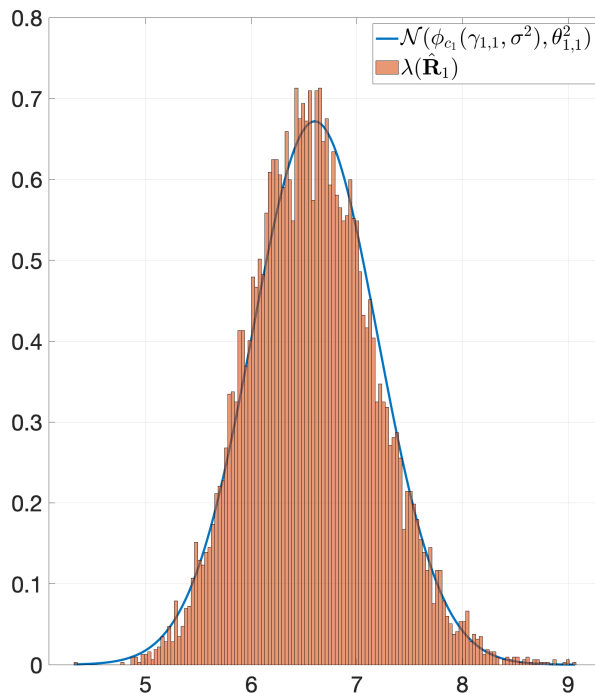


FIGURE 2.15 – Histogramme de la plus grande valeur propre de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_1$ pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

2.2.4 Contribution sur l'étude du spectre de $\hat{\mathbf{R}}$

2.2.4.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions le comportement asymptotique aux ordres 1^{er} et 2^{nd} des plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ lorsque les matrices $\hat{\mathbf{R}}_1, \dots, \hat{\mathbf{R}}_L$ suivent le modèle rang réduit (2.35) dans le cas où $L > 1$. Considérons l'Hypothèse 1 et l'Hypothèse 4, qui décrivent le *régime asymptotique des grandes dimensions* et spécifient le comportement asymptotique des valeurs propres de $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_L$. Nous définissons dans un premier temps :

$$\mathbf{\Gamma} := \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \mathbf{\Gamma}_\ell. \quad (2.52)$$

On peut remarquer que $\mathbf{\Gamma}$ est la combinaison des matrices de covariance rang réduit $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_L$ et a un rang au plus égal à KL .

Sous les Hypothèses 1 et 4, le comportement global des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ peut être décrit par sa distribution spectrale empirique définie comme la mesure de probabilité aléatoire :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta_{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \quad (2.53)$$

où δ_x est la mesure de *Dirac* centrée en x . Sous le modèle (2.35), chaque matrice de covariance $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L$ est une perturbation de rang fixe K de la matrice $\sigma^2 \mathbf{I}$, et on peut montrer à l'aide d'arguments standards de perturbation que $\hat{\mu}$ converge presque sûrement ([89]) vers la mesure de probabilité définie dans le Théorème 6. Par conséquent, toute

fonctionnelle du type :

$$\hat{\mu}(\varphi) := \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \varphi(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})) \quad (2.54)$$

où φ est une fonction continue bornée, satisfait

$$\hat{\mu}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\hat{\mu}(\lambda) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\mu(\lambda). \quad (2.55)$$

Comme la limite dans (2.55) dépend uniquement de σ^2 et de c , il n'est pas possible de récupérer des informations sur les matrices rang réduit $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_L$ dans le *régime asymptotique des grandes dimensions* à partir de statistiques de type (2.54).

2.2.4.2 Résultats au premier ordre

Sous les hypothèses précédentes, on a vu avec le Théorème 7 qu'il peut être démontré que les informations liées au spectre de $\mathbf{\Gamma}_\ell$ peuvent être trouvées dans les K plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ ([85], [86]). Nous proposons un élargissement de ce résultat au cas où $L > 1$ et on montre ainsi que les informations liées au spectre de $\mathbf{\Gamma}$ peuvent être trouvées dans les KL plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ grâce au théorème suivant.

Théorème 9. *Sous les Hypothèses 1 et 4, $\forall k \in \{1, \dots, KL\}$,*

$$\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \phi_c(\gamma_k, \sigma^2) \quad (2.56)$$

avec

$$\phi_c(\gamma, \sigma^2) := \begin{cases} \frac{(\gamma + \sigma^2)(\gamma + \sigma^2 c)}{\gamma} & \text{si } \gamma > \sigma^2 \sqrt{c} \\ \sigma^2 (1 + \sqrt{c})^2 & \text{si } \gamma \leq \sigma^2 \sqrt{c} \end{cases}, \quad (2.57)$$

De plus, $\lambda_{KL+1}(\hat{\mathbf{R}}) \rightarrow \sigma^2 (1 + \sqrt{c})^2$ p.s. lorsque $M \rightarrow \infty$.

Démonstration. La preuve du Théorème 9 est reportée à l'Annexe 2.A. □

Le Théorème 9, qui étend les résultats du Théorème 7 ([84],[86, Th. 2.7]) au cas $L > 1$, montre en particulier que les plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ convergent vers des limites dépendantes directement des valeurs propres de $\mathbf{\Gamma}$, à condition que $\forall k \in \{1, \dots, KL\}$ les rapports $\frac{\gamma_k}{\sigma^2}$ soient supérieurs à \sqrt{c} . Le seuil \sqrt{c} peut être interprété comme un rapport signal-sur-bruit minimal au-dessus duquel les $k^{\text{ièmes}}$ plus grandes valeurs propres *liées au signal* de $\hat{\mathbf{R}}$ se séparent de la plus grande valeur propre *liée au bruit* $\lambda_{KL+1}(\hat{\mathbf{R}})$. On obtient ainsi un résultat sur les valeurs propres non plus d'une matrice de *Wishart* simple, comme c'était le cas pour le Théorème 7, mais d'une matrice qui est un mélange de matrices de *Wishart* indépendantes.

On illustre le résultat dans la Figure 2.16 pour $L = 2$ en examinant l'histogramme des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ pour 5000 itérations de *Monte-Carlo*, en prenant en compte les mêmes paramètres que pour la Figure 2.14 : $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}(5, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{\Gamma}_2 = \text{diag}(0, 10, \dots, 0)$, $\sigma^2 = 1$, $M = 50$, et $N_1 = N_2 = 100$. Nous avons ainsi le rang de $\mathbf{\Gamma}$ égal à 2.

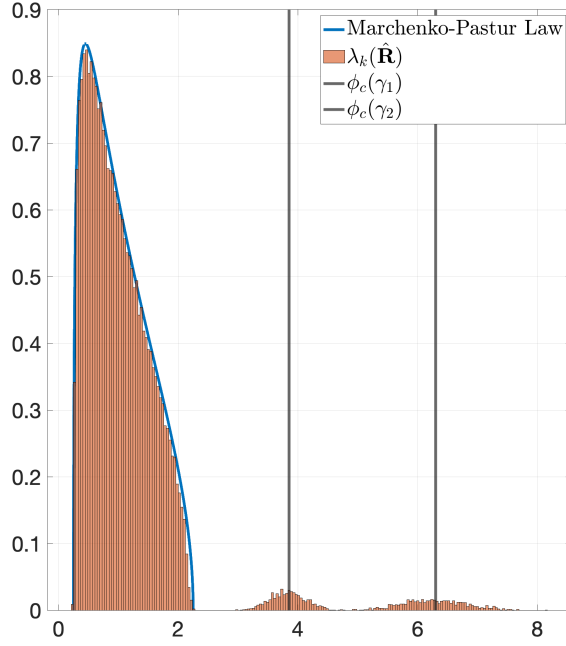


FIGURE 2.16 – Histogramme des matrices $\hat{\mathbf{R}}$ pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

Nous examinons les limites respectives $\phi_c(\gamma_1, \sigma^2)$ et $\phi_c(\gamma_2, \sigma^2)$ représentées par une ligne verticale noire, et nous vérifions ainsi empiriquement leur validité.

Maintenant que nous connaissons les limites dans le *régime asymptotique des grandes dimensions* pour les valeurs propres des matrices $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ et que nous avons établi celles des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$, notre objectif est d'étudier la variance autour de ces limites.

2.2.4.3 Résultats au second ordre

Nous considérons maintenant l'hypothèse suivante qui assure que les valeurs propres liées au signal et au bruit des matrices $\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}_1, \dots, \hat{\mathbf{R}}_L$ sont séparées dans le *régime asymptotique des grandes dimensions* (cf. Théorème 9).

Le résultat suivant montre, lorsque $\mathbf{\Gamma}_1 = \dots = \mathbf{\Gamma}_L$, un *Théorème Central Limite* (CLT) conjoint sur les plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_1, \dots, \hat{\mathbf{R}}_L, \hat{\mathbf{R}}$. Il s'agit d'une extension des résultats de [90] et [82, Th. 1.4] pour le cas $L > 1$.

Théorème 10. *Sous les Hypothèses 1-4 et lorsque $\mathbf{\Gamma}_1 = \dots = \mathbf{\Gamma}_L$ avec pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ et $\ell \in \{1, \dots, L\}$,*

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\ell} &> \dots > \gamma_{K,\ell} > \sigma^2 \max\{\sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_L}\} \\ \gamma_1 &> \dots > \gamma_K > \sigma^2 \sqrt{c} \end{aligned}$$

on a :

$$\sqrt{M} \begin{pmatrix} \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) - \phi_c(\gamma_k, \sigma^2) \\ \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_1) - \phi_{c_1}(\gamma_{k,1}, \sigma^2) \\ \vdots \\ \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_L) - \phi_{c_L}(\gamma_{k,L}, \sigma^2) \end{pmatrix}_{k=1,\dots,K} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{K(L+1)}}(\mathbf{0}, \mathbf{\Theta}),$$

où Θ est une matrice diagonale par blocs définie positive donnée par $\Theta := \text{bdiag}(\Theta_1, \dots, \Theta_K)$ avec

$$\Theta_k := \begin{pmatrix} \theta_{k,0}^2 & \vartheta_{k,1} & \dots & \vartheta_{k,L} \\ \vartheta_{k,1} & \ddots & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ \vartheta_{k,L} & & & \theta_{k,L}^2 \end{pmatrix}$$

en notant $c_0 = c$,

$$\theta_{k,\ell}^2 = c_\ell \frac{(\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell)(\gamma_k + \sigma^2)^2}{\gamma_k^2}, \quad \ell \geq 0$$

$$\vartheta_{k,\ell} = c_0 \frac{(\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell)(\gamma_k + \sigma^2)^2}{\gamma_k^2}, \quad \ell \geq 1$$

Démonstration. La preuve est reportée à l'Annexe 2.B. □

Afin d'illustrer ce théorème, nous reproduisons les conditions de simulation de la Figure 2.16 en choisissant $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{diag}(5, 0, \dots, 0)$. Ceci nous permettra de vérifier empiriquement la variance théorique prédite par le Théorème 10. Dans la Figure 2.17, nous proposons une illustration de l'extension au cas $L > 1$, appuyée par les Théorèmes 9 et 10, en présentant l'histogramme des matrices $\hat{\mathbf{R}}$ et les résultats théoriques associés.

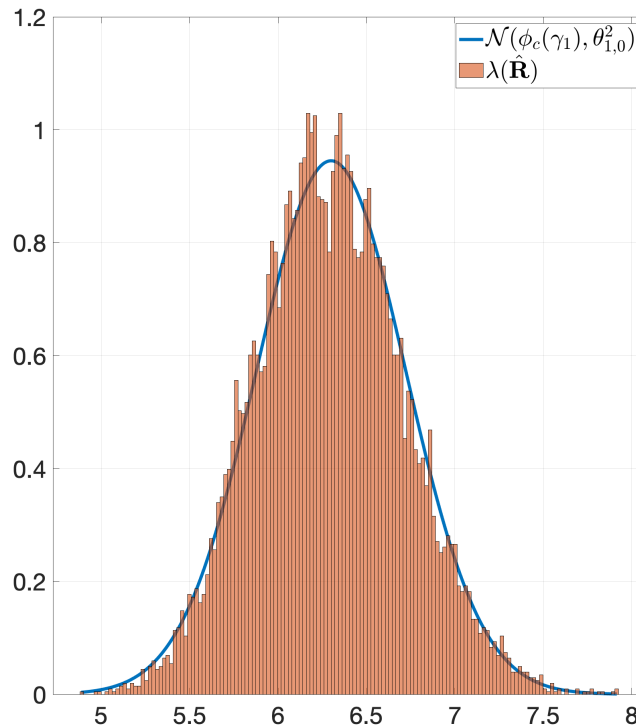


FIGURE 2.17 – Histogramme de la plus grande valeur propre des matrices $\hat{\mathbf{R}}$ pour 1000 itérations de *Monte-Carlo*

Il est également crucial de noter que la précision des simulations s'améliore à mesure que M augmente. C'est la raison pour laquelle nous présentons dans le Tableau 2.2 les quantiles de la loi théorique (à 25%, 50% et 75%) auxquels nous comparons les quantiles empiriques (à 25%, 50% et 75%), pour des conditions de simulation identiques mais avec une augmentation de M tout en maintenant un ratio c_ℓ constant.

Théorique $M = 25$	5.8973	6.3	6.7027
Empirique $M = 25$	5.8898	6.2885	6.6873
Théorique $M = 50$	6.0153	6.3	6.5847
Empirique $M = 50$	6.0058	6.2904	6.5751
Théorique $M = 100$	6.0987	6.3	6.5013
Empirique $M = 100$	6.0971	6.3001	6.5032

TABLE 2.2 – Comparaison des quantiles empiriques avec les quantiles théoriques pour M qui augmente

À la suite de cette étude, nous avons caractérisé le comportement au premier et au second ordre des valeurs propres des matrices $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ et $\hat{\mathbf{R}}$. Dans le chapitre suivante, nous allons présenter une statistique de test basée sur ces valeurs propres.

Annexes

Notations. Dans toute cette annexe, nous utilisons les notations suivantes. Pour une séquence de matrices aléatoires $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$, $\mathbf{X}_n = o_{\mathbb{P}}(1)$ signifie que la convergence de $(\|\mathbf{X}_n\|_2)$ vers 0 en probabilité, tandis que $\mathbf{X}_n = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ signifie que $(\|\mathbf{X}_n\|_2)$ est bornée en probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme spectrale. Si \mathbf{X} est une matrice aléatoire, nous notons $\mathbf{X}^\circ = \mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]$. Enfin, $\mathcal{C}^1(U)$ (resp. $\mathcal{C}_c^\infty(U)$) désigne l'ensemble des fonctions continûment différentiables (resp. infiniment différentiables à support compact) définies sur un ensemble ouvert U .

Résultats utiles autour de la distribution de Marcenko-Pastur. Dans cette section, nous rappelons des résultats connus sur la transformée de *Stieltjes*

$$m(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (2.58)$$

de la distribution de *Marcenko-Pastur* μ avec les paramètres (σ^2, c) définis dans (2.47), ayant pour support l'intervalle $[x^-, x^+]$ avec $x^\pm = \sigma^2(1 \pm \sqrt{c})^2$. Cette transformée de *Stieltjes* sera constamment utilisée dans les démonstrations des Théorèmes 9 et 10 ci-dessous (ainsi que pour la preuve du Corollaire 2 dans le Chapitre 3). Nous rappelons tout d'abord que la limite $m(x) = \lim_{z \in \mathbb{C}^+, z \rightarrow x} m(z)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x^-, x^+\}$, et que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{x^-, x^+\}$, $m(z)$ satisfait l'équation :

$$m(z) = \frac{1 + \sigma^2 c m(z)}{\sigma^2 - z(1 + \sigma^2 c m(z))} = \frac{w(z)}{z(\sigma^2 - w(z))}, \quad (2.59)$$

avec

$$w(z) = z(1 + \sigma^2 c m(z)). \quad (2.60)$$

De plus, m est continûment différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, x^-, x^+\}$. Nous fournissons maintenant quelques résultats sur la fonction w , qui joue un rôle central dans la description du comportement des plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$. À partir de (2.59), nous observons que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{x^-, x^+\}$,

$$\phi(w(z)) = z$$

où ϕ est définie comme suit :

$$\phi(w) = w \left(1 - \frac{\sigma^2 c}{\sigma^2 - w} \right).$$

La fonction ϕ est croissante sur $(-\infty, w^-) \cup (w^+, \infty)$ et décroissante sur $(w^-, \sigma^2) \cup (\sigma^2, w^+)$, avec $w^\pm = \sigma^2(1 \pm \sqrt{c})$ et $\phi(w^\pm) = x^\pm$. Ensuite, nous examinons le lemme suivant (voir [91]) concernant w .

Lemme 3. *Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x^-, x^+\}$, $w(x) \in \phi^{-1}(\{x\})$. De plus, parmi les antécédents de x sous ϕ ,*

- si $x \in (x^-, x^+)$, $w(x)$ est le seul tel que $\Im(w(x)) > 0$;
- si $x \in \mathbb{R} \setminus [x^-, x^+]$, $w(x)$ est réel et est l'antécédent unique tel que $\phi'(w(x)) > 0$.

Enfin, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $w(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Soit $\gamma \geq 0$. À partir du Lemme 3, on déduit que l'équation $w(x) = \gamma + \sigma^2$ admet une solution si et seulement si $\gamma > \sigma^2\sqrt{c}$, et que la solution est unique et donnée par :

$$x = \phi(\gamma + \sigma^2) = \frac{(\gamma + \sigma^2)(\gamma + \sigma^2 c)}{\gamma}.$$

Enfin, nous avons également le résultat suivant donnant diverses formules utiles. On définit $\tilde{m}(z) = -\frac{1}{z(1+\sigma^2 cm(z))}$ et $\tau(z) = zm(z)\tilde{m}(z)$.

Lemme 4. *Si $\gamma > \sigma^2\sqrt{c}$, alors nous avons*

$$\begin{aligned} m(\phi(\gamma + \sigma^2)) &= -\frac{1}{\gamma + \sigma^2 c}, \\ \tilde{m}(\phi(\gamma + \sigma^2)) &= -\frac{1}{\gamma + \sigma^2}, \\ m'(\phi(\gamma + \sigma^2)) &= \frac{\gamma^2}{(\gamma + \sigma^2 c)^2(\gamma^2 - \sigma^4 c)}, \\ \tilde{m}'(\phi(\gamma + \sigma^2)) &= \frac{\gamma^2}{(\gamma + \sigma^2)^2(\gamma^2 - \sigma^4 c)}, \\ \tau(\phi(\gamma + \sigma^2)) &= \frac{1}{\gamma}, \\ \tau'(\phi(\gamma + \sigma^2)) &= -\frac{1}{\gamma^2 - \sigma^4 c} \end{aligned}$$

Annexe 2.A Preuve du Théorème 9

Cette démonstration s'appuie sur les techniques développées dans [86].

2.A.1 Quelques notations

Soit $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ les vecteurs colonnes de la base standard de \mathbb{C}^N , et posons :

$$\mathbf{J}_1 := \sum_{n=1}^{N_1} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^*$$

et pour $\ell = 2, \dots, L$,

$$\mathbf{J}_\ell := \sum_{n=N_1+\dots+N_{\ell-1}+1}^{N_1+\dots+N_\ell} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^*.$$

Nous considérons également la décomposition propre suivante de $\mathbf{\Gamma}_\ell$:

$$\mathbf{\Gamma}_\ell = \mathbf{U}_\ell \mathbf{D}_\ell \mathbf{U}_\ell^*,$$

avec \mathbf{U}_ℓ une matrice isométrique de taille $(M \times K)$ et $\mathbf{D}_\ell = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{\Gamma}_\ell), \dots, \lambda_K(\mathbf{\Gamma}_\ell))$.

2.A.1.1 Linéarisation

Soit \mathbf{Y} la matrice $(M \times N)$ donnée par $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_{1,1}, \dots, \mathbf{y}_{N_1,1}, \dots, \mathbf{y}_{1,L}, \dots, \mathbf{y}_{N_L,L}]$. En raison du modèle gaussien, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Omega} \mathbf{S}^* + \mathbf{W}$$

où \mathbf{W} est une matrice de dimension $(M \times N)$ avec des entrées *i.i.d.* $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$ et où $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \mathbf{U}_L \mathbf{D}_L^{\frac{1}{2}}]$ et $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_L]$ avec $\mathbf{S}_\ell = \mathbf{J}_\ell \mathbf{X}$ et \mathbf{X} une matrice de dimension $(N \times K)$ avec des entrées *i.i.d.* $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ et indépendante de \mathbf{W} . En particulier, nous avons $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^*$, et \mathbf{Y} est une perturbation de rang fixe (au plus KL) de \mathbf{W} , de sorte qu'en utilisant l'inégalité de *Weyl* et les résultats classiques sur les valeurs propres extrêmes des matrices *Wishart* (voir par exemple [92]), on a :

$$\lambda_M(\hat{\mathbf{R}}) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} x^-,$$

tandis que *p.s.*

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \lambda_{KL+1}(\hat{\mathbf{R}}) \leq \limsup_{M \rightarrow \infty} \lambda_1\left(\frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{W}^*\right) = x^+$$

Pour étudier les valeurs propres restantes de $\hat{\mathbf{R}}$, nous utilisons la méthode de linéarisation qui consiste à étudier la matrice hermitienne de blocs suivante :

$$\check{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{Y} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{Y}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

pour laquelle on sait que [93, Th. 7.3.7] :

$$\text{sp}(\check{\mathbf{Y}}) = \left\{ \pm \sqrt{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right\} \cup \{0\}.$$

2.A.1.2 Résultats asymptotique pour le polynôme caractéristique de $\check{\mathbf{Y}}$

Nous avons :

$$\check{\mathbf{Y}} = \check{\mathbf{B}} \check{\mathbf{I}} \check{\mathbf{B}}^* + \check{\mathbf{W}}$$

où $\check{\mathbf{B}}$, $\check{\mathbf{I}}$ et $\check{\mathbf{W}}$ sont donnés par :

$$\check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{S} \end{bmatrix}, \check{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \check{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Soit $\epsilon > 0$ et \mathcal{D}_ϵ l'ensemble de voisinage de rayon ϵ dans \mathbb{C} de l'ensemble $\mathcal{D} = [x^-, x^+]$. Soit \mathcal{K} un sous-ensemble compact de $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{D}_\epsilon \cup (-\infty, 0))$. Ensuite (voir à nouveau [92]), avec probabilité un pour tous les grands M ,

$$\text{sp}(\check{\mathbf{W}}) \cap \{\sqrt{z} : z \in \mathcal{K}\} = \emptyset,$$

et la factorisation suivante

$$\det(\check{\mathbf{Y}} - \sqrt{z} \mathbf{I}) = \det(\check{\mathbf{W}} - \sqrt{z} \mathbf{I}) \det(\check{\mathbf{I}} \hat{P}(z)), \quad (2.61)$$

où

$$\hat{P}(z) = \det \left(\check{\mathbf{I}} + \hat{\Xi}(z) \right)$$

et $\hat{\Xi}(z) = \mathbf{B}^* (\check{\mathbf{W}} - \sqrt{z}\mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}$, est valable pour tous les $z \in \mathcal{K}$. Ensuite, à partir de la formule d'inversion de la matrice par blocs, nous avons :

$$\hat{\Xi}(z) = \begin{bmatrix} \sqrt{z}\mathbf{\Omega}^*\mathbf{Q}(z)\mathbf{\Omega} & \frac{1}{N}\mathbf{\Omega}^*\mathbf{Q}(z)\mathbf{W}\mathbf{S} \\ \frac{1}{N}\mathbf{S}^*\mathbf{W}^*\mathbf{Q}(z)\mathbf{\Omega} & \sqrt{z}\frac{1}{N}\mathbf{S}^*\tilde{\mathbf{Q}}(z)\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

où $\mathbf{Q}(z)$ et $\tilde{\mathbf{Q}}(z)$ sont les matrices résolvantes de $\frac{1}{N}\mathbf{W}\mathbf{W}^*$ et $\frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{W}$ données par :

$$\mathbf{Q}(z) = \left(\frac{1}{N}\mathbf{W}\mathbf{W}^* - z\mathbf{I} \right)^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}(z) = \left(\frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{W} - z\mathbf{I} \right)^{-1}$$

Nous utilisons ensuite le résultat suivant.

Proposition 1. *Nous avons*

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} \left\| \mathbf{\Omega}^*\mathbf{Q}(z)\mathbf{\Omega} - m(z)\mathbf{\Omega}^*\mathbf{\Omega} \right\|_2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

ainsi que

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} \left\| \frac{1}{N}\mathbf{S}_k^*\tilde{\mathbf{Q}}(z)\mathbf{S}_\ell + \frac{\delta_{k-\ell}\frac{N_k}{N}}{z(1+\sigma^2cm(z))}\mathbf{I} \right\|_2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0$$

et

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} \left\| \frac{1}{N}\mathbf{S}_k^*\mathbf{W}^*\mathbf{Q}(z)\mathbf{\Omega} \right\|_2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Démonstration. La Proposition 1 est obtenue en tant que modification de résultats standards en théorie des matrices aléatoires concernant les formes quadratiques des résolvantes de matrices *Wishart* standard (voir par exemple [94, Sec. 5.5]), la preuve est donc omise. \square

En utilisant la Proposition 1, nous déduisons que :

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} \left\| \hat{\Xi}(z) - \Xi(z) \right\|_2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

où

$$\Xi(z) = \begin{bmatrix} \sqrt{z}m(z)\mathbf{\Omega}^*\mathbf{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(z) \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}(z)$ est la matrice diagonale par blocs ($KL \times KL$) donnée par :

$$\mathbf{A}(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}(1+\sigma^2cm(z))} \begin{bmatrix} \frac{N_1}{N}\mathbf{I} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{N_L}{N}\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} \det(\check{\mathbf{I}} + \Xi(z)) &= \det(\sqrt{z}m(z)\mathbf{\Omega}^*\mathbf{\Omega}\mathbf{A}(z) - \mathbf{I}) \\ &= \det\left(-\frac{m(z)}{1+\sigma^2cm(z)}\mathbf{\Gamma} - \mathbf{I}\right), \end{aligned}$$

où Γ est défini dans l'équation (2.52). Par conséquent, en vertu de l'Hypothèse 4, on a :

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} \left| \hat{P}(z) - P(z) \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0, \quad (2.63)$$

où

$$P(z) = \prod_{k=1}^{KL} \left(-\frac{m(z)}{1 + \sigma^2 c m(z)} \gamma_k - 1 \right).$$

En utilisant l'équation (2.59), on peut réécrire $P(z)$ comme suit :

$$P(z) = \prod_{k=1}^{KL} \left(\frac{\gamma_k}{w(z) - \sigma^2} - 1 \right),$$

avec w défini dans (2.60).

2.A.1.3 Spectre de $\hat{\mathbf{R}}$

En utilisant le Lemme 3, nous obtenons que l'ensemble des zéros (multiplicité 1) de P est donné par :

$$\mathcal{Z} = \{ \phi(\gamma_k + \sigma^2) : k = 1, \dots, KL, \gamma_k > \sigma^2 \sqrt{c} \}.$$

De plus, le Lemme 3 implique également que P n'a aucun pôle et donc que P est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [x^-, x^+]$. Soit $Q = |\mathcal{Z}|$ et désignons par $x_1 > \dots > x_Q$ les éléments de \mathcal{Z} . Fixons également $\epsilon > 0$ suffisamment petit de telle sorte que :

$$\mathcal{D}_\epsilon \cap \bigcap_{q=1}^Q [x_q - \epsilon, x_q + \epsilon] = \emptyset.$$

Pour tout $q = 1, \dots, Q$, définissons \mathcal{C}_q comme une courbe fermée simple continûment différentiable qui n'intersecte l'axe réel qu'aux deux points $x_q \pm \epsilon$ et qui englobe x_q . Ainsi, \mathcal{C}_q est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{D}_\epsilon \cup (-\infty, 0))$. En appliquant (2.63) avec $\mathcal{K} = \mathcal{C}_q$, on obtient que, avec une probabilité 1 pour tout M grand :

$$\left| \hat{P}(z) - P(z) \right| < |P(z)|.$$

Pour tout z dans \mathcal{C}_q , avec à la fois \hat{P} et P étant holomorphes sur tout ensemble ouvert englobé par \mathcal{C}_q . Ainsi, pour tout $q = 1, \dots, Q$, nous déduisons du Théorème de *Rouché* que \hat{P} possède un unique zéro dans l'intervalle $[x_q - \epsilon, x_q + \epsilon]$. Avec un raisonnement similaire, \hat{P} n'a aucun zéro dans $(0, x^- - \epsilon) \cup (x_1 + \epsilon, \infty)$ avec une probabilité 1 pour tout grand M . Par conséquent, en revenant à (2.61) et puisque ϵ peut être rendu arbitrairement petit, on en conclut que :

$$\lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}} \right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \phi(\gamma_k + \sigma^2) = \frac{(\gamma_k + \sigma^2)(\gamma_k + \sigma^2 c)}{\gamma_k}.$$

Pour tous les $k = 1, \dots, KL$ tels que $\gamma_k > \sigma^2 \sqrt{c}$. De plus, avec une probabilité 1 pour tout grand M , $\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) \in \mathcal{D}_\epsilon$ pour tous les $k = 1, \dots, KL$ tels que $\gamma_k \leq \sigma^2 \sqrt{c}$. Puisque la distribution spectrale empirique $\hat{\mu}$ de $\hat{\mathbf{R}}$ converge presque sûrement vers la distribution de *Marcenko-Pastur* à mesure que $M \rightarrow \infty$, cela implique en outre que pour tous les $k = 1, \dots, KL$ tels que $\gamma_k \leq \sigma^2 \sqrt{c}$, $\lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}} \right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} x^+$ et de même $\lambda_{KL+1} \left(\hat{\mathbf{R}} \right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} x^+$.

Annexe 2.B Preuve du Théorème 10

2.B.1 Quelques notations

Commençons par rappeler qu'en vertu de l'hypothèse \mathcal{H}_0 , nous avons $\mathbf{\Gamma}_1 = \dots = \mathbf{\Gamma}_L = \mathbf{\Gamma}$, et nous désignons $\mathbf{\Gamma}$ par \mathbf{UDU}^* avec \mathbf{U} une matrice isométrique de dimensions $(M \times K)$ et $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{\Gamma}), \dots, \lambda_K(\mathbf{\Gamma}))$. Pour uniformiser certaines notations, définissons comme dans la section précédente $\mathbf{Y}_\ell = [\mathbf{y}_{1,\ell}, \dots, \mathbf{y}_{N_\ell,\ell}]$ pour tous les $\ell = 1, \dots, L$, de telle sorte que nous obtenons :

$$\mathbf{Y}_\ell = \mathbf{\Omega}\mathbf{S}_\ell^* + \mathbf{W}_\ell,$$

où $\mathbf{\Omega} = \mathbf{UD}^{1/2}$, $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_L$ sont des matrices indépendantes telles que $\mathbf{S}_\ell = [\mathbf{s}_{1,\ell}, \dots, \mathbf{s}_{K,\ell}]$ est de dimension $(N_\ell \times K)$ avec des entrées i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, et où $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_L$ sont des matrices indépendantes avec \mathbf{W}_ℓ ayant des entrées i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$. Nous définissons également $\mathbf{Y}_0 = [\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_L]$, de telle sorte que :

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{\Omega}\mathbf{S}_0^* + \mathbf{W}_0,$$

avec $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{W}_1^*, \dots, \mathbf{W}_L^*]^*$ et $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_L]$, et notons $N_0 = N_1 + \dots + N_L$, de sorte que $\hat{\mathbf{R}}_0 = \frac{\mathbf{Y}_0\mathbf{Y}_0^*}{N_0} = \hat{\mathbf{R}}$. De plus, définissons $c_0 = c = \left(\frac{1}{c_1} + \dots + \frac{1}{c_L}\right)^{-1}$ et :

$$a := \sigma^2 \min_{\ell=0, \dots, L} (1 - \sqrt{c_\ell})^2, \quad b := \sigma^2 \max_{\ell=0, \dots, L} (1 + \sqrt{c_\ell})^2,$$

et considérons $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\varphi) = [a - \epsilon, b + \epsilon]$ et $\varphi(t) = 1$ pour tout $t \in [a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2}]$, où $\epsilon < a$. La quantité suivante définie comme :

$$\chi = \prod_{\ell=0}^L \det \varphi \left(\frac{\mathbf{W}_\ell, \mathbf{W}_\ell^*}{N_\ell} \right) \quad (2.64)$$

vérifie que $\chi = 1$ avec une probabilité de 1 pour tous les grands M d'après les résultats classiques sur la localisation des valeurs propres des matrices *Wishart* [92]. Rappelons également la définition de m et w dans (2.58) et (2.60) respectivement, et désignons, pour tous les $\ell = 0, \dots, L$, par m_ℓ la transformée de *Stieltjes* de la distribution de *Marcenko-Pastur* avec le paramètre (c_ℓ, σ^2) , ainsi que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [x_\ell^-, x_\ell^+]$

$$\begin{aligned} w_\ell(z) &= z(1 + \sigma^2 c_\ell m_\ell(z)), \\ \tilde{m}_\ell(z) &= -\frac{1}{z(1 + \sigma^2 c_\ell m_\ell(z))}, \\ \tau_\ell(z) &= z m_\ell(z) \tilde{m}_\ell(z), \end{aligned}$$

avec $x_\ell^\pm = \sigma^2 (1 \pm \sqrt{c_\ell})^2$.

2.B.2 Approximation des polynômes caractéristiques

La première étape de la preuve consiste à utiliser l'astuce de [95], dont l'idée principale est de relier la fonction de répartition cumulative des valeurs propres *spike* avec le déterminant de certaines matrices aléatoires. En utilisant le Théorème 9 et les mêmes

arguments utilisés pour obtenir la factorisation (2.61) et (2.62) dans l'Annexe 2.A, nous savons que $\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_\ell), \dots, \lambda_K(\hat{\mathbf{R}}_\ell)$ sont les zéros de :

$$\hat{P}_\ell(z) = \det \left(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{\Xi}}_\ell(z) \right),$$

pour tous les $\ell \in \{0, \dots, L\}$, avec une probabilité 1 pour tous les grands M , avec

$$\hat{\mathbf{\Xi}}_\ell(z) = \begin{bmatrix} \sqrt{z} \mathbf{\Omega}^* \mathbf{Q}_\ell(z) \mathbf{\Omega} \chi & \frac{1}{N_\ell} \mathbf{\Omega}^* \mathbf{Q}_\ell(z) \mathbf{W}_\ell \mathbf{S}_\ell \chi \\ \frac{1}{N_\ell} \mathbf{S}_\ell^* \mathbf{W}_\ell^* \mathbf{Q}_\ell(z) \mathbf{\Omega} \chi & \sqrt{z} \frac{1}{N_\ell} \mathbf{S}_\ell^* \tilde{\mathbf{Q}}_\ell(z) \mathbf{S}_\ell \chi \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{Q}_\ell(z) = \left(\frac{\mathbf{W}_\ell \mathbf{W}_\ell^*}{N_\ell} - z \mathbf{I} \right)^{-1}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}_\ell(z) = \left(\frac{\mathbf{W}_\ell^* \mathbf{W}_\ell}{N_\ell} - z \mathbf{I} \right)^{-1}$. Pour tous les ℓ, k , supposons que $-\infty < x_{k,\ell} < y_{k,\ell} < +\infty$ et désignons

$$\rho_{k,\ell} = \frac{(\gamma_k + \sigma^2)(\gamma_k + \sigma^2 c_\ell)}{\gamma_k}$$

Ensuite, avec une probabilité 1 pour tous les grands M , nous avons :

$$\sqrt{M} \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) - \rho_{k,\ell} \right) \in [x_{k,\ell}, y_{k,\ell}] \Leftrightarrow \hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{x_{k,\ell}}{\sqrt{M}} \right) \hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{y_{k,\ell}}{\sqrt{M}} \right) < 0$$

Par conséquent, avec $M \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^K \bigcap_{\ell=0}^L \left\{ \sqrt{M} \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) - \rho_{k,\ell} \right) \in [x_{k,\ell}, y_{k,\ell}] \right\} \right) = \\ \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^K \bigcap_{\ell=0}^L \left\{ \hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{x_{k,\ell}}{\sqrt{M}} \right) \hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{y_{k,\ell}}{\sqrt{M}} \right) < 0 \right\} \right) + o(1) \end{aligned} \quad (2.65)$$

La proposition suivante fournit le développement de $\hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}} \right)$ autour de $\rho_{k,\ell}$.

Proposition 2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}} \right) = \frac{1}{\sqrt{M}} \prod_{i \neq k} (\gamma_i \tau_\ell(\rho_{k,\ell}) - 1) \left(x \gamma_k \tau'_\ell(\rho_{k,\ell}) - 2\sqrt{\gamma_k} \Re(\eta_{3,k,\ell}) \right. \\ \left. + \gamma_k \rho_{k,\ell} \tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}) \eta_{1,k,\ell} + \gamma_k \rho_{k,\ell} m_\ell(\rho_{k,\ell}) \eta_{2,k,\ell} \right) + o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right) \end{aligned}$$

où $\tau_\ell(z) = z m_\ell(z) \tilde{m}_\ell(z)$ et :

$$\begin{aligned} \eta_{1,k,\ell} &= \sqrt{M} \mathbf{u}_k^* (\mathbf{Q}_\ell(\rho_{k,\ell}) \chi)^\circ \mathbf{u}_k \\ \eta_{2,k,\ell} &= \frac{\sqrt{M}}{N_\ell} \left(\mathbf{s}_{k,\ell}^* \tilde{\mathbf{Q}}_\ell(\rho_{k,\ell}) \mathbf{s}_{k,\ell} \chi \right)^\circ \\ \eta_{3,k,\ell} &= \frac{\sqrt{M}}{N_\ell} \mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k,\ell}) \mathbf{W}_\ell \mathbf{s}_{k,\ell} \chi \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est reportée à l'Annexe 2.C. □

À partir de (2.65) et de la Proposition 2, il est clair que nous devons étudier un *TCL* pour la quantité générique suivante

$$\eta = \sum_{\ell=0}^L \sum_{k=1}^K (\beta_{1,k,\ell} \eta_{1,k,\ell} + \beta_{2,k,\ell} \eta_{2,k,\ell} + \Re(\overline{\beta_{3,k,\ell}} \eta_{3,k,\ell}))$$

où $(\beta_{i,k,\ell})_{\substack{i=1,2 \\ k=1,\dots,K \\ \ell=0,\dots,L}} \in \mathbb{R}^{2K(L+1)}$ et $(\beta_{3,k,\ell})_{k=1,\dots,K, \ell=0,\dots,L} \in \mathbb{C}^{K(L+1)}$.

2.B.3 Théorème limite central

Considérons la fonction caractéristique suivante :

$$\Psi(u) = \mathbb{E} [\xi(u)]$$

avec $\xi(u) = \exp(iu\eta)$. Notre approche consiste à dériver une équation différentielle perturbée pour Ψ comme le montre la proposition suivante. Soit $\text{bdiag}()$ l'opérateur de bloc diagonal. On définit $\mathbf{K} = \text{bdiag}(\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_K)$ avec $\mathbf{K}_k = \text{bdiag}(\mathbf{K}_{1,k}, \dots, \mathbf{K}_{4,k})$ et où $(\mathbf{K}_{i,k})_{i=1,\dots,4}$ sont des matrices symétriques de taille $((L+1) \times (L+1))$ dont les éléments sont donnés par :

$$[\mathbf{K}_{1,k}]_{\ell+1,\ell'+1} = \begin{cases} \frac{\sigma^4 c_\ell}{(\gamma_k + \sigma^2 c_\ell)^2 (\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell)} & \text{if } \ell = \ell' \\ \frac{\sigma^4 c_0}{(\gamma_k + \sigma^2 c_0)(\gamma_k + \sigma^2 c_{\ell'}) (\gamma_k^2 - \sigma^4 c_0)} & \text{if } \ell = 0 < \ell' \\ 0 & \text{if } 0 < \ell < \ell' \end{cases}$$

$$[\mathbf{K}_{2,k}]_{\ell+1,\ell'+1} = \begin{cases} \frac{c_\ell}{(\gamma_k + \sigma^2)^2 (\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell)} & \text{if } \ell = \ell' \\ \frac{c_0}{(\gamma_k + \sigma^2)^2 (\gamma_k^2 - \sigma^4 c_0)} & \text{if } \ell = 0 < \ell' \\ 0 & \text{if } 0 < \ell < \ell' \end{cases}$$

$$[\mathbf{K}_{3,k}]_{\ell+1,\ell'+1} = [\mathbf{K}_{4,k}]_{\ell+1,\ell'+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 c_\ell}{\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell} & \text{if } \ell = \ell' \\ \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 c_0}{\gamma_k^2 - \sigma^4 c_0} & \text{if } \ell = 0 < \ell' \\ 0 & \text{if } 0 < \ell < \ell' \end{cases}$$

On note également $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_K^T)^T$ avec :

$$\boldsymbol{\beta}_k = \left(\beta_{1,k,0}, \dots, \beta_{1,k,L}, \beta_{2,k,0}, \dots, \beta_{2,k,L}, \Re(\beta_{3,k,0}), \dots, \Re(\beta_{3,k,L}), \Im(\beta_{3,k,0}), \dots, \Im(\beta_{3,k,L}) \right)^T$$

Proposition 3. *La matrice \mathbf{K} est définie positive et*

$$\Psi'(u) = -u\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} \Psi(u) + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}} \quad (2.66)$$

où Δ est une fonction continue telle que $|\Delta(u)| < P(u)$ pour un certain polynôme P avec des coefficients positifs indépendants de M .

Démonstration. La preuve est présentée en Annexe 2.D. □

À partir de la Proposition 3, en résolvant l'équation différentielle perturbée dans (2.66), nous déduisons que :

$$\Psi(u) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \exp\left(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} \frac{u^2}{2}\right)$$

ce qui implique :

$$\eta \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{\mathbb{R}}\left(0, \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\beta}\right) \quad (2.67)$$

La dernière étape de la preuve consiste à transférer le TCL aux K plus grandes valeurs propres de $(\hat{\mathbf{R}}_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$. À partir de la Proposition (2), nous avons que :

$$\hat{P}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}} \right) = \frac{1}{\sqrt{M}} \gamma_k \tau'_\ell(\rho_{k,\ell}) (x - \zeta_{k,\ell} + o_{\mathbb{P}}(1)) \prod_{i \neq k} (\gamma_i \tau_\ell(\rho_{k,\ell}) - 1) \quad (2.68)$$

avec

$$\zeta_{k,\ell} = \frac{1}{\gamma_k \tau'_\ell(\rho_{k,\ell})} \left(2\sqrt{\gamma_k} \Re(\eta_{3,k,\ell}) - \gamma_k \rho_{k,\ell} \tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}) \eta_{1,k,\ell} - \gamma_k \rho_{k,\ell} m_\ell(\rho_{k,\ell}) \eta_{2,k,\ell} \right) \quad (2.69)$$

Ainsi, en revenant à l'équation (2.65), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^K \bigcap_{\ell=0}^L \left\{ \sqrt{M} \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) - \rho_{k,\ell} \right) \in [x_{k,\ell}, y_{k,\ell}] \right\} \right) = \\ \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^K \bigcap_{\ell=0}^L \{ x_{k,\ell} < \zeta_{k,\ell} + o_{\mathbb{P}}(1) < y_{k,\ell} \} \right) + o(1) \end{aligned} \quad (2.70)$$

En utilisant l'équation (2.67) avec des valeurs appropriées pour β , ainsi que les égalités du Lemme 4, nous obtenons :

$$\zeta = (\zeta_{k,\ell})_{\substack{\ell=0,\dots,L \\ k=1,\dots,K}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{K(L+1)}}(\mathbf{0}, \Theta)$$

où Θ est donné dans le Théorème 10. Enfin, on note que :

$$\begin{aligned} \det(\Theta) &= \prod_{k=1}^K \prod_{\ell=1}^L \theta_{k,\ell}^2 \left(\theta_0^2 - \sum_{\ell'=1}^L \frac{\vartheta_{k,\ell'}^2}{\theta_{k,\ell}^2} \right) \\ &= (\sigma^4 c_0^2 (L-1))^K \prod_{k=1}^K \left(\frac{\gamma_k + \sigma^2}{\gamma_k} \right)^{2(L+1)} \prod_{\ell=1}^L c_\ell (\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell), \end{aligned}$$

On remarque que $\det(\Theta) > 0$ grâce à l'Hypothèse 5, ce qui conclut la preuve du Théorème 10.

Annexe 2.C Preuve de la Proposition 2

En utilisant la Proposition 1, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\Xi}_\ell \left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}} \right) = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_{k,\ell}} m_\ell(\rho_{k,\ell}) \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\rho_{k,\ell}} \tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}) \mathbf{I} \end{bmatrix} + \Delta \quad (2.71)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_{k,\ell}} \Omega^* (\mathbf{Q}_\ell(\rho_{k,\ell}) \chi)^\circ \Omega & \frac{1}{N_\ell} \Omega^* \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k,\ell}) \chi \mathbf{W}_\ell \mathbf{S}_\ell \\ \frac{1}{N_\ell} \mathbf{S}_\ell^* \mathbf{W}_\ell^* \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k,\ell}) \chi \Omega & \sqrt{\rho_{k,\ell}} \frac{1}{N_\ell} \left(\mathbf{S}_\ell^* \tilde{\mathbf{Q}}_\ell(\rho_{k,\ell}) \mathbf{S}_\ell \chi \right)^\circ \end{bmatrix} \\ &+ \frac{x}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} h(\rho_{k,\ell}) \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{h}(\rho_{k,\ell}) \mathbf{I} \end{bmatrix} + o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

avec $h_\ell(z) = \frac{m_\ell(z)}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z} m'_\ell(z)$ et $\tilde{h}_\ell(z) = \frac{\tilde{m}_\ell(z)}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z} \tilde{m}'_\ell(z)$. Notez que $\|\Delta\|_2 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right)$ et nous considérons également la partition $\Delta = (\Delta_{i,j})_{i,j=1,2}$ où chaque bloc $\Delta_{i,j}$ est de

taille $(K \times K)$. Considérez l'événement $\mathcal{A} = \{\|\Delta_{2,2}\|_2 < \sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\}$. À partir de la formule du déterminant de matrice par blocs, nous avons :

$$\hat{P}_\ell\left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}}\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}} = \Phi \det\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{I} + \Delta_{2,2}\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$$

avec

$$\Phi = \det\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{D} + \Delta_{1,1} - (\mathbf{I} + \Delta_{2,1})\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{I} + \Delta_{2,2}\right)^{-1}(\mathbf{I} + \Delta_{1,2})\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$$

De plus,

$$\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{I} + \Delta_{2,2}\right)^{-1}\mathbb{1}_{\mathcal{A}} = \left(\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})} - \frac{\Delta_{2,2}}{\rho_{k,\ell}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})^2}\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}} + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Phi &= \det\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{D} - \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})} + \Delta_{1,1} - \frac{\Delta_{1,2} + \Delta_{2,1}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})} + \frac{\Delta_{2,2}}{\rho_{k,\ell}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})^2}\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \\ &\quad + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \end{aligned}$$

Étant donné que $\mathbf{D} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_K) + o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ d'après l'Hypothèse 4, et d'après le Lemme 4, nous avons :

$$\det\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{D} - \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right).$$

En utilisant la dérivée du déterminant, nous obtenons ensuite :

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{tr}\left[\text{com}\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{D} - \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})}\right)^T \left(\Delta_{1,1} - \frac{\Delta_{1,2} + \Delta_{2,1}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})} + \frac{\Delta_{2,2}}{\rho_{k,\ell}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})^2}\right)\right]\mathbb{1}_{\mathcal{A}} \\ &\quad + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \end{aligned}$$

où $\text{com}()$ désigne l'opération de comatrice. Un calcul direct en conjonction avec l'Hypothèse 4 fournit :

$$\begin{aligned} \text{com}\left(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{D} - \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})}\right) &= \frac{\prod_{i \neq k} (\gamma_i \rho_{k,\ell} \tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}) - 1)}{(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}))^{K-1}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^* \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\prod_{i \neq k} (\gamma_i \rho_{k,\ell} \tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}) - 1)}{(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}))^{K-1}} \left[\Delta_{1,1} - \frac{\Delta_{1,2} + \Delta_{2,1}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})} + \frac{\Delta_{2,2}}{\rho_{k,\ell}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})^2}\right]_{k,k} \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \\ &\quad + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\det(\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{I} + \mathbf{\Delta}_{2,2}) = (\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}))^K + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right),$$

tel que :

$$\begin{aligned} \hat{P}_\ell\left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}}\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}} &= \left[\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})\mathbf{\Delta}_{1,1} + \frac{\mathbf{\Delta}_{2,2}}{\sqrt{\rho_{k,\ell}}\tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell})} - (\mathbf{\Delta}_{1,2} + \mathbf{\Delta}_{2,1})\right]_{k,k} \\ &\quad \times \prod_{i \neq k} (\gamma_i \rho_{k,\ell} m_\ell(\rho_{k,\ell}) \tilde{m}_\ell(\rho_{k,\ell}) - 1) + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \end{aligned}$$

Étant donné que $\mathbb{1}_{\mathcal{A}} = 1 + o_{\mathbb{P}}(1)$, nous déduisons également que :

$$\hat{P}_\ell\left(\rho_{k,\ell} + \frac{x}{\sqrt{M}}\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}^c} = o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

et en utilisant l'Hypothèse 4, nous aboutissons au résultat de la Proposition 2.

Annexe 2.D Preuve de la Proposition 3

La preuve fait usage de techniques spécifiques à la distribution gaussienne, à savoir le lemme de *Stein* et l'inégalité de *Poincaré*, que nous rappelons ci-dessous et qui ont déjà été utilisées par exemple dans [96, 97, 98]. Par conséquent, nous ne présentons que les étapes principales de la preuve et sautons certains détails des calculs.

2.D.1 Outils utiles

Une fonction $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n)$ si $f(\mathbf{z}) = \tilde{f}(\Re(\mathbf{z}), \Im(\mathbf{z}))$ avec $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2n})$. De plus, nous rappelons également la définition des opérateurs différentiels complexes standards :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{x} = \Re(\mathbf{z})$ et $\mathbf{y} = \Im(\mathbf{z})$.

Lemme 5 (lemme de *Stein*). *Soit $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^n}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n)$, supposée polynomialement bornée ainsi que ses dérivées partielles. Alors, pour tout $k = 1, \dots, n$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\mathbf{w})w_k] &= \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial w_k}(\mathbf{w})\right], \\ \mathbb{E}[f(\mathbf{w})\bar{w}_k] &= \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k}(\mathbf{w})\right]. \end{aligned}$$

Lemme 6 (Inégalité de *Poincaré*). *Soit $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^n}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n)$, supposée polynomialement bornée ainsi que ses dérivées partielles. Alors,*

$$\mathbb{V}[f(\mathbf{w})] \leq \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{E}\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k}(\mathbf{w})\right|^2 + \mathbb{E}\left|\frac{\partial f}{\partial w_k}(\mathbf{w})\right|^2 \right).$$

Pour plus de clarté, nous introduisons les opérateurs de différentiation suivants par rapport aux entrées de la matrice \mathbf{W}_ℓ de dimensions $(M \times N_\ell)$, qui seront constamment utilisés dans les dérivations ci-dessous,

$$\partial_{i,j}^{(\ell)} = \frac{\partial}{\partial[\mathbf{W}_\ell]_{i,j}}, \quad \bar{\partial}_{i,j}^{(\ell)} = \frac{\partial}{\partial[\overline{\mathbf{W}}_\ell]_{i,j}}.$$

Nous aurons également besoin du résultat auxiliaire suivant (voir [94]) concernant la quantité χ définie dans (2.64).

Lemme 7. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{E}[\chi^r] = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$$

et pour $\ell \in \{0, \dots, L\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, $j \in \{1, \dots, N_\ell\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\partial_{i,j}^{(\ell)} \chi^r\right] &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^p}\right) \\ \mathbb{E}\left[\bar{\partial}_{i,j}^{(\ell)} \chi^r\right] &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^p}\right). \end{aligned}$$

Le Lemme 7 montre en particulier que la présence du terme de régularisation χ peut être supprimée des attentes, avec une erreur de décroissance polynomiale arbitraire.

Dans la suite, Δ est une notation générique pour une fonction continue telle que $|\Delta(u)| < P(u)$ pour un certain polynôme P avec des coefficients positifs indépendants de M , et dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre.

2.D.2 Développement de Ψ'

Nous avons :

$$\Psi'(u) = i \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=0}^L \mathbb{E} \left[\left(\beta_{1,k,\ell} \eta_{1,k,\ell} + \beta_{2,k,\ell} \eta_{2,k,\ell} + \Re(\overline{\beta_{3,k,\ell}} \eta_{3,k,\ell}) \right) \xi(u) \right]$$

Dans la suite, nous ne fournissons que quelques détails pour le développement de $\mathbb{E}[\eta_{1,k,0} \xi(u)]$, car les autres termes peuvent être obtenus de manière similaire. En utilisant l'identité de la résolvante, nous commençons par écrire :

$$\mathbb{E}[\eta_{1,k,0} \xi(u)] = \frac{\sqrt{M}}{\rho_{k,0}} \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0}) \frac{\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_0^*}{N_0} \mathbf{u}_k \chi \right)^\circ \xi(u) \right]$$

Ensuite, nous appliquons le lemme de *Stein*, l'inégalité de *Poincaré* et le Lemme 7 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0}) \frac{\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_0^*}{N_0} \mathbf{u}_k \chi \xi(u) \right] &= \frac{i u \sigma^2 \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0})]_i [\mathbf{W}_\ell^* \mathbf{u}_k]_j \chi \bar{\partial}_{i,j}^{(0)} \{\eta\} \xi(u) \right]}{N_0 (1 + \alpha_0(\rho_{k,0}))} \\ &\quad + \frac{\sigma^2 \mathbb{E} [\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0}) \mathbf{u}_k \chi \xi(u)]}{1 + \alpha_0(\rho_{k,0})} + \frac{\Delta(u)}{M} \end{aligned}$$

où $\alpha_\ell(z) = \mathbb{E} \left[\frac{\sigma^2}{N_\ell} \text{tr} \mathbf{Q}_\ell(z) \chi \right]$ pour tout $\ell = 0, \dots, L$. En utilisant le fait que $\alpha_0(\rho_{k,0}) = \sigma^2 c_0 m_0(\rho_{k,0}) + \mathcal{O}(\frac{1}{M^2})$, cela donne :

$$\mathbb{E} [\eta_{1,k,0} \xi(u)] = \frac{i u \sigma^2 \sqrt{M} \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0})]_i [\mathbf{W}_\ell^* \mathbf{u}_k]_j \chi \bar{\partial}_{i,j}^{(0)} \{\eta\} \xi(u) \right]}{N_0(\rho_{k,0})(1 + \sigma^2 c_0 m_0(\rho_{k,0})) - \sigma^2} + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}}$$

En développant davantage les dérivées et en utilisant le Lemme 7, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0})]_i [\mathbf{W}_\ell^* \mathbf{u}_k]_j \chi \bar{\partial}_{i,j}^{(0)} \{\eta_{1,k',\ell}\} \xi(u) \right] &= -\sqrt{M} \mathbb{E} \left[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0}) \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k',\ell}) \mathbf{u}_{k'} \mathbf{u}_{k'}^* \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k',\ell}) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\mathbf{W}_\ell \mathbf{W}_\ell^*}{N_\ell} \mathbf{u}_k \chi \xi(u) \right] + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}} \\ &= \sqrt{M} \theta_{k,\ell} \delta_{k-k'} \Psi(u) + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_{k,\ell} &= \begin{cases} \frac{\sigma^2 m_0(\rho_{k,0}) m'_0(\rho_{k,0})}{1 + \sigma^2 c_0 m_0(\rho_{k,0})} & \text{if } \ell = 0, \\ \frac{\sigma^2 m_\ell(\rho_{k,\ell}) m_0(\rho_{k,0}) (1 + \sigma^2 c_0 m_0(\rho_{k,0}))}{\sigma^2 - \rho_{k,\ell} (1 + \sigma^2 c_0 m_0(\rho_{k,0})) (1 + \sigma^2 c_\ell m_\ell(\rho_{k,\ell}))} & \text{if } \ell \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{\sigma^2 \gamma_k}{(\gamma_k + \sigma^2 c_0)^2 (\gamma_k^2 - \sigma^2 c_0)} & \text{if } \ell = 0, \\ -\frac{\sigma^2 \gamma_k}{(\gamma_k + \sigma^2 c_0) (\gamma_k + \sigma^2 c_\ell) (\gamma_k^2 - \sigma^2 c_0)} & \text{if } \ell \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité dans l'expression de $\theta_{k,\ell}$ peut être obtenue avec le Lemme 4. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0})]_i [\mathbf{W}_\ell^* \mathbf{u}_k]_j \chi \bar{\partial}_{i,j}^{(0)} \{\eta_{2,k',\ell}\} \xi(u) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{M}}{N_\ell^2} \mathbb{E} \left[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0}) \mathbf{W}_\ell \tilde{\mathbf{Q}}_\ell(\rho_{k',\ell}) \mathbf{s}_{k',\ell} \mathbf{s}_{k',\ell}^* \tilde{\mathbf{Q}}_\ell(\rho_{k',\ell}) \mathbf{W}_\ell^* \mathbf{u}_k \chi \xi(u) \right] + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}} \\ &= \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0})]_i [\mathbf{W}_\ell^* \mathbf{u}_k]_j \chi \bar{\partial}_{i,j}^{(0)} \{\eta_{3,k',\ell}\} \xi(u) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{M}}{N_\ell} \mathbb{E} \left[\mathbf{u}_k^* \mathbf{Q}_0(\rho_{k,0}) \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k',\ell}) \mathbf{W}_\ell \mathbf{s}_{k',\ell} \mathbf{u}_{k'}^* \mathbf{Q}_\ell(\rho_{k',\ell}) \frac{\mathbf{W}_\ell \mathbf{W}_\ell^*}{N_\ell} \mathbf{u}_k \chi \xi(u) \right] + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}} \\ &= \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant à nouveau le Lemme 4, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\eta_{1,k,0}\xi(u)] &= \frac{i u \sigma^2 c_0 \sum_{\ell=0}^L \beta_{1,k,\ell} \kappa_{k,\ell}}{\rho_{k,0}(1 + \sigma^2 c_0 m_0(\rho_{k,0})) - \sigma^2} \Psi(u) + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}} \\ &= -iu \left(\frac{\beta_{1,k,0} \sigma^4 c_0}{(\gamma_k + \sigma^2 c_0)^2 (\gamma_k^2 - \sigma^2 c_0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^L \frac{\beta_{1,k,\ell} \sigma^4 c_0}{(\gamma_k + \sigma^2 c_0)(\gamma_k + \sigma^2 c_\ell)(\gamma_k^2 - \sigma^2 c_0)} \right) \Psi(u) + \frac{\Delta(u)}{\sqrt{M}}.\end{aligned}$$

En utilisant des calculs similaires pour les termes restants $(\mathbb{E}[\eta_{i,k,\ell}\xi(u)])_{\substack{\ell \geq 1 \\ i=2,3}}$ dans $\Psi'(u)$, nous obtenons finalement le résultat de la Proposition 3.

Un nouveau test d'égalité de covariances pour les modèles rang réduit

Sommaire

3.1 Une nouvelle statistique de test	69
3.1.1 Introduction	69
3.1.2 Construction des estimateurs	69
3.1.3 Proposition d'une nouvelle statistique de test	70
3.2 Simulations	73
3.2.1 Modèle de simulation	73
3.2.2 Illustration du Théorème 12	74
3.2.3 Méthodes alternatives	75
3.2.3.1 Statistique de test Fisher	76
3.2.3.2 Statistique de test GLR_{LR}	77
3.2.4 Illustration des performances des statistiques de test	78
3.2.4.1 Changement de valeurs propres	79
3.2.4.2 Changement de sous espace	83
3.2.4.3 Modèle de simulation pour $L = 3$ et $N_1 \neq N_2 = N_3$	87
3.2.4.4 Changement de valeurs propres	87
3.2.4.5 Changement de sous espace	89
Annexes	92
3.A Preuve du Lemme 8	92
3.B Preuve du Corollaire 2	92
3.C Développement autour du GLR_{LR}	93

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné le spectre des matrices de Wishart dans le contexte d'un modèle de rang réduit. Dans le présent chapitre, nous exploitons ces résultats pour introduire une nouvelle statistique de test basée sur les valeurs propres de ces matrices de Wishart. Nous proposerons également l'introduction d'autres statistiques de test spécialement conçues pour le modèle de rang réduit, évaluant leurs performances au moyen de simulations sur des données empiriques en vue d'une comparaison.

3.1 Une nouvelle statistique de test

3.1.1 Introduction

Avant de présenter la nouvelle statistique de test, il convient de noter en premier lieu que sous le modèle (2.35) le test (2.8) peut être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \quad & \mathbf{\Gamma}_1 = \dots = \mathbf{\Gamma}_L \\ \mathcal{H}_1 : \quad & \exists(i, j) \in \{1, \dots, L\}^2 / \mathbf{\Gamma}_i \neq \mathbf{\Gamma}_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ensuite, on considère le lemme suivant, qui montre que l'hypothèse \mathcal{H}_0 peut être vérifiée en comparant les valeurs propres de la matrice $\mathbf{\Gamma}$ avec celles des matrices $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_L$.

Lemme 8. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\mathbf{\Gamma}_1 = \dots = \mathbf{\Gamma}_L$
- (b) Pour tout $k = 1, \dots, K$, $\ell = 1, \dots, L$, $\lambda_k(\mathbf{\Gamma}_\ell) = \lambda_k(\mathbf{\Gamma})$.

Démonstration. La preuve du Lemme 8 est mise en Annexe 3.A. □

En utilisant le Lemme 8, on peut formuler de manière équivalente le test (3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \quad & \forall k, \ell, \lambda_k(\mathbf{\Gamma}_\ell) = \lambda_k(\mathbf{\Gamma}) \\ \mathcal{H}_1 : \quad & \exists k, \ell : \lambda_k(\mathbf{\Gamma}_\ell) \neq \lambda_k(\mathbf{\Gamma}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Par conséquent, il est possible de discriminer les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 en exploitant uniquement les valeurs propres des matrices $\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_L, \mathbf{\Gamma}$, pour lesquelles on peut également construire des estimateurs consistant dans le *régime asymptotique des grandes dimensions*.

3.1.2 Construction des estimateurs

À partir de (2.35) et du Théorème 9 on commence par considérer l'estimateur suivant de la variance du bruit σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 := \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M-K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell). \quad (3.3)$$

On peut démontrer également que $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) = \sigma^2$ presque sûrement lorsque $M \rightarrow +\infty$. Ici, μ représente la mesure de probabilité associée à la distribution de *Marcenko-Pastur*, définie dans le Théorème 6. En d'autres termes, $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur consistant de σ^2 dans le *régime asymptotique des grandes dimensions*. Ensuite, pour tout $k \in \{1, \dots, KL\}$, soit $\hat{\gamma}_k$ la plus grande solution de l'équation (cf. Théorème 9) :

$$\phi_c(\gamma_k, \hat{\sigma}^2) = \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) \quad (3.4)$$

si $\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) > \hat{\sigma}^2(1 + \sqrt{c})^2$, sinon $\hat{\gamma}_k = \hat{\sigma}^2\sqrt{c}$. De même, pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, soit $\hat{\gamma}_{k,\ell}$ la plus grande solution de l'équation :

$$\phi_{c_\ell}(\gamma_{k,\ell}, \hat{\sigma}^2) = \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \quad (3.5)$$

si $\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) > \hat{\sigma}^2(1 + \sqrt{c_\ell})^2$, sinon $\hat{\gamma}_{k,\ell} = \hat{\sigma}^2\sqrt{c_\ell}$.

On notera que $\phi_c(\gamma_k, \hat{\sigma}^2)$ est une fonction définie sur \mathbb{R}^* qui est croissante sur $] -\infty; \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2] \cup [\sigma^2(1 + \sqrt{c})^2; +\infty[$ et décroissante sur $[\sigma^2(1 - \sqrt{c})^2; 0[\cup]0; \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2]$. De même

$\phi_{c_\ell}(\gamma_{k,\ell}, \hat{\sigma}^2)$ est une fonction définie sur \mathbb{R}^* qui est croissante sur $] -\infty; \sigma^2(1 - \sqrt{c_\ell})^2] \cup [\sigma^2(1 + \sqrt{c_\ell})^2; +\infty[$ et décroissante sur $[\sigma^2(1 - \sqrt{c_\ell})^2; 0[\cup]0; \sigma^2(1 + \sqrt{c_\ell})^2]$.

On donne en Figure 3.1 une représentation typique de la fonction $\phi_c(\gamma_k, \hat{\sigma}^2)$, ici pour le cas où $c_\ell = 0.5$ et $\sigma^2 = 1$.

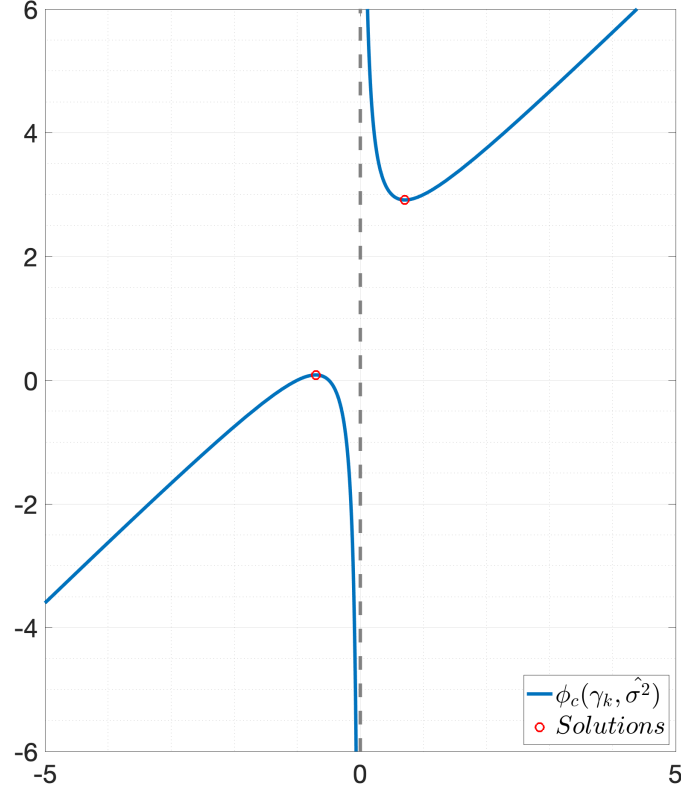


FIGURE 3.1 – Représentation de la fonction $\phi_c(\gamma_k, \hat{\sigma}^2)$ et de ses extremums

Une fois les estimateurs construits on obtient alors le résultat suivant, en conséquence du Théorème 9.

Corollaire 1. *Sous les Hypothèses 1 et 4, on a :*

$$\hat{\gamma}_k \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{cases} \gamma_k & \text{si } \gamma_k > \sigma^2 \sqrt{c} \\ \sigma^2 \sqrt{c} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\hat{\gamma}_{k,\ell} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{cases} \gamma_{k,\ell} & \text{si } \gamma_{k,\ell} > \sigma^2 \sqrt{c_\ell} \\ \sigma^2 \sqrt{c_\ell} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.1.3 Proposition d'une nouvelle statistique de test

En considérant les résultats précédemment évoqués, on propose la statistique de test suivante :

$$T(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty[} (\|\hat{\gamma}\|_2^2) \quad (3.8)$$

où

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k,\ell})_{\substack{k=1,\dots,K \\ \ell=1,\dots,L}} \cdot \quad (3.9)$$

En conséquence du Corollaire 1, on a ;

$$\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}\|_2^2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{cases} 0 & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \epsilon_1 := \|\boldsymbol{\gamma}\|_2^2 > 0 & \text{sous } \mathcal{H}_1, \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\boldsymbol{\gamma}$ est un vecteur de taille KL , donné par

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_k - \gamma_{k,\ell})_{\substack{k=1,\dots,K \\ \ell=1,\dots,L}} \quad (3.11)$$

Ce qui implique le résultat de cohérence suivant pour (3.8).

Hypothèse 5. Pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ et $\ell \in \{1, \dots, L\}$,

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\ell} &> \dots > \gamma_{K,\ell} > \sigma^2 \max\{\sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_L}\} \\ \gamma_1 &> \dots > \gamma_K > \sigma^2 \sqrt{c} \end{aligned}$$

De plus, sous \mathcal{H}_1 , il existe k, ℓ tels que $\gamma_k \neq \gamma_{k,\ell}$.

Théorème 11. Sous les Hypothèses 1, 5 on a pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$:

$$\mathbb{P}_i \left(\lim_{M \rightarrow \infty} T(\epsilon) = i \right) = 1, \quad (3.12)$$

où \mathbb{P}_i est la mesure de probabilité sous l'hypothèse \mathcal{H}_i .

Pour contrôler l'erreur de type I asymptotique de cette nouvelle statistique de test (3.8), on a également besoin du résultat suivant, qui, en conséquence du Théorème 10, fournit un *TCL* pour (3.9).

Corollaire 2. Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 et les Hypothèses 1-5, on a :

$$\sqrt{M}\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{KL}}(\mathbf{0}, \mathbf{H}\boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{H}^T) \quad (3.13)$$

où $\mathbf{H} = \text{bdiag}(\tilde{\mathbf{H}}, \dots, \tilde{\mathbf{H}})$, $\boldsymbol{\Upsilon} = \text{bdiag}(\boldsymbol{\Upsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\Upsilon}_K)$, avec $\tilde{\mathbf{H}}$ la matrice $L \times (L + 1)$ donnée par

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

et avec

$$\boldsymbol{\Upsilon}_k = \begin{pmatrix} \omega_{k,0}^2 & \xi_k & \dots & \xi_k \\ \xi_k & \ddots & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ \xi_k & & & \omega_{k,L}^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_{k,\ell}^2 &= \frac{c_\ell \gamma_k^2 (\gamma_k + \sigma^2)^2}{\gamma_k^2 - \sigma^4 c_\ell}, \quad \ell \geq 0 \\ \xi_k &= \frac{c_0 \gamma_k^2 (\gamma_k + \sigma^2)^2}{\gamma_k^2 - \sigma^4 c_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Démonstration. La preuve est reportée à l'Annexe 3.B. \square

D'après le Corollaire 2, il est possible d'ajuster le seuil ϵ dans (3.8) pour contrôler l'erreur de type I asymptotique dans le régime *asymptotique des grandes dimensions*, comme décrit dans le résultat suivant. Définissons $\hat{\mathbf{\Upsilon}} = \text{bdiag}(\hat{\mathbf{\Upsilon}}_1, \dots, \hat{\mathbf{\Upsilon}}_K)$ avec :

$$\hat{\mathbf{\Upsilon}}_k = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{k,0}^2 & \hat{\xi}_k & \cdots & \hat{\xi}_k \\ \hat{\xi}_k & \ddots & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ \hat{\xi}_k & & & \hat{\omega}_{k,L}^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{k,\ell}^2 &= \frac{c_\ell \hat{\gamma}_k^2 (\hat{\gamma}_k + \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\gamma}_k^2 - \hat{\sigma}^4 c_\ell}, \quad \ell \geq 0 \\ \hat{\xi}_k &= \frac{c_0 \hat{\gamma}_k^2 (\hat{\gamma}_k + \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\gamma}_k^2 - \hat{\sigma}^4 c_0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

D'après le Corollaire 1, on a $\hat{\mathbf{\Upsilon}} \rightarrow \mathbf{\Upsilon}$ presque sûrement lorsque $M \rightarrow \infty$.

Théorème 12. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{KL}}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ et $F(t, \mathbf{\Xi}) = \mathbb{P}(\mathbf{x}^T \mathbf{\Xi} \mathbf{x} \leq t)$, $\alpha \in]0, 1[$, et définissons :

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{M} \inf \left\{ t \in \mathbb{R}, F\left(t, \mathbf{H} \hat{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{H}^T\right) \geq 1 - \alpha \right\} \quad (3.19)$$

Alors, sous les hypothèses 1 et 5, on a :

$$\mathbb{P}_0(T(\hat{\epsilon}) = 1) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \alpha. \quad (3.20)$$

En pratique, le Théorème 12 est utilisé comme suit. Pour une réalisation fixe de $\hat{\mathbf{\Upsilon}}$, on échantillonne la distribution de la forme quadratique gaussienne $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ et le seuil $\hat{\epsilon}$ est ensuite fixé en tant que quantile $(1 - \alpha)$ de $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$.

Remarque 1. Pour une approche plus générale où chaque $\mathbf{\Gamma}_\ell$ a un rang inconnu K_ℓ , on peut obtenir des estimations consistantes de K_1, \dots, K_L grâce au Théorème 9. En supposant que K_1, \dots, K_L sont fixes par rapport à M , et si pour $\ell \in \{1, \dots, L\}$, $\gamma_{K_\ell, \ell} > \sigma^2 \sqrt{c_\ell}$, sous l'hypothèse 4, la quantité

$$\hat{K}_\ell = \max \left\{ k : \lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell \right) > \sigma^2 (1 + \sqrt{c_\ell})^2 + \epsilon_\ell \right\} \quad (3.21)$$

est un estimateur consistant de K_ℓ dans le régime *asymptotique des grandes dimensions*, pour tout $\epsilon_\ell \in (0, \phi_{c_\ell}(\gamma_{K_\ell, \ell}) - \sigma^2 (1 + \sqrt{c_\ell})^2)$. Par conséquent, on peut construire une statistique de test consistante pour détecter des changements dans le rang.

Remarque 2. Il peut être démontré de manière simple que sous l'hypothèse 5, la matrice $\mathbf{H} \mathbf{\Upsilon} \mathbf{H}^T$ est inversible. Par conséquent, une approche alternative pour obtenir une statistique de test avec une erreur de type I asymptotique maîtrisée serait de considérer la statistique suivante :

$$\tilde{T}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty[} \left(M \left\| \left(\mathbf{H} \hat{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{H}^T \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right\|_2^2 \right) \quad (3.22)$$

car, d'après le Corollaire 2, on a :

$$M \left\| \left(\mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\Upsilon}} \mathbf{H}^T \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right\|_2^2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi^2(KL). \quad (3.23)$$

Cependant, bien que cette approche semble plus simple, il apparaît que la matrice de covariance $\mathbf{H} \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{H}^T$ est mal conditionnée et, en pratique, définir le seuil ϵ en se basant sur la distribution $\chi^2(KL)$ donne de mauvaises performances.

Nous avons ainsi introduit une nouvelle statistique de test spécifiquement conçue pour le modèle décrit en (2.35) et pour le test formulé dans (3.2). Dans la section suivante, nous évaluons la pertinence du Théorème 12 à l'aide de simulations. Par la suite, nous présentons des statistiques de test pertinentes pour le modèle (2.35), afin de procéder à une comparaison des performances de ces statistiques.

3.2 Simulations

3.2.1 Modèle de simulation

Pour mener des simulations, commençons par détailler les scénarios de test envisagés. Considérons $\sigma^2 = 0,5$, $K = 2$, $L = 2$, et pour tout $\ell \in \{1, 2\}$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_\ell = \gamma_{1,\ell} \mathbf{a}(\theta_{1,\ell}) \mathbf{a}^*(\theta_{1,\ell}) + \gamma_{2,\ell} \mathbf{a}(\theta_{2,\ell}) \mathbf{a}^*(\theta_{2,\ell})$$

avec $\mathbf{a}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{M}}(1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(M-1)\theta})^T$. La description de ce modèle pour les matrices $\boldsymbol{\Gamma}_\ell$ permet d'envisager les deux types de scénarios suivants.

- *Changement de valeurs propres :*

TABLE 3.1 – Scénario de changement de valeurs propres

$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{2,2}$
Sous \mathcal{H}_0							
0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	2	1.5	2	1.5
Sous \mathcal{H}_1							
0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	2	1.5	5	4

On considère également, sous les deux hypothèses, $N_1 = N_2 = 2M$, donc $c_1 = c_2$.

- *Changement de sous-espace :*

TABLE 3.2 – Scénario de changement de sous-espace

$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{2,2}$
Sous \mathcal{H}_0							
0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	2	1	2	1
Sous \mathcal{H}_1							
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	2	1	2	1

On considère également, sous les deux hypothèses, $N_1 = N_2 = 2M$, donc $c_1 = c_2$.

3.2.2 Illustration du Théorème 12

Pour illustrer le résultat du Théorème 12, on considère le scénario de changement de valeurs propres. La valeur seuil ϵ de l'équation (3.8) est définie comme le $(1 - \alpha)$ -quantile de la forme quadratique gaussienne $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ avec $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{KL}}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ pour $M = 100$. On présente dans la Figure 3.2 l'erreur de Type I empirique de $T(\epsilon)$ (évaluée sur 100 000 itérations) pour $M \in \{10, 20, 50, 100\}$.

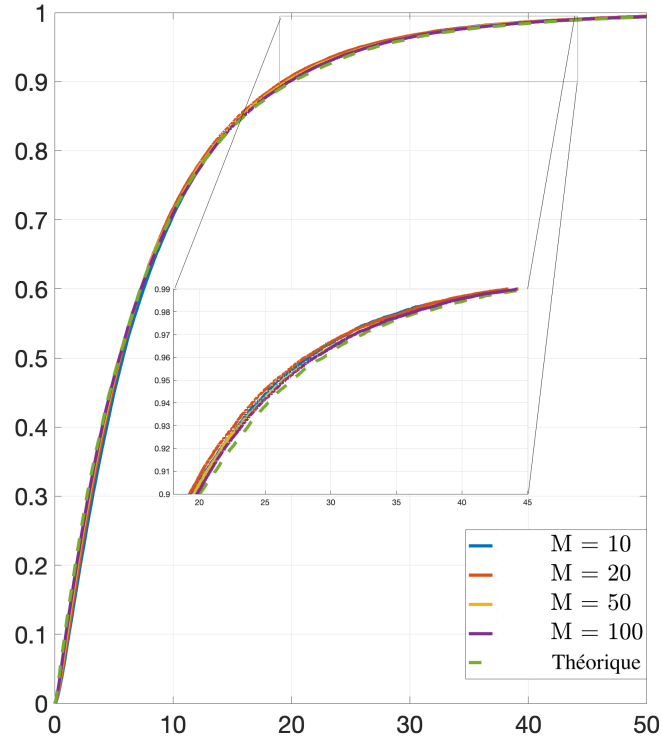


FIGURE 3.2 – Comparaison des tracés des erreurs de type I de $T(\epsilon)$ pour différentes valeurs de M pour 100000 itérations de *Monte-Carlo*

Afin de rendre les différences plus distinctes, nous présentons un récapitulatif des valeurs significatives pour chaque courbe dans le tableau 3.3.

$T(\epsilon)$ \ α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.10
$M = 10$	0.002	0.004	0.009	0.028	0.065
$M = 20$	0.0025	0.005	0.01	0.03	0.073
$M = 50$	0.003	0.006	0.013	0.038	0.083
$M = 100$	0.004	0.008	0.016	0.043	0.09

TABLE 3.3 – Taux d'erreur de Type I de $T(\epsilon)$

L'approximation de l'erreur asymptotique de Type I présentée dans le Tableau 3.3 montre une certaine fiabilité lorsque M augmente. On considère ensuite toujours le cas d'un scénario de changement de valeurs propres mais cette fois-ci avec $\gamma_{1,\ell} = 3$ et $\gamma_{2,\ell} = 1, 5$ pour $\ell \in \{1, 2\}$. On présente dans la Figure 3.3 l'erreur de Type I empirique de $T(\epsilon)$ (évaluée sur 100 000 itérations de *Monte-Carlo*) pour $M \in \{10, 20, 50, 100\}$ et nous définissons encore une fois la valeur seuil ϵ de l'équation (3.8) comme le $(1 - \alpha)$ -quantile de la forme quadratique gaussienne $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ avec $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{KL}}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ pour $M = 100$.

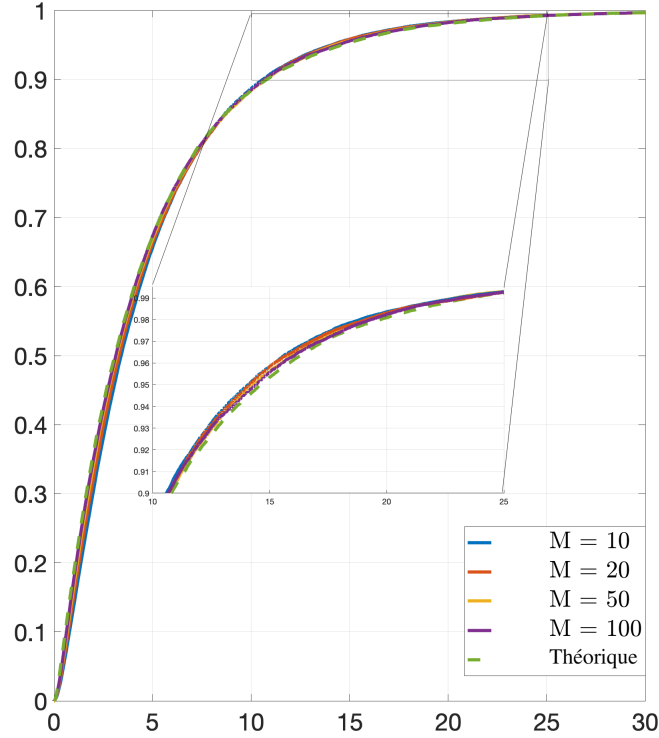


FIGURE 3.3 – Comparaison des tracés des erreurs de type I de $T(\epsilon)$ pour différentes valeurs de M pour 100000 itérations de *Monte-Carlo*

Nous donnons dans le Tableau 3.4 un aperçu des valeurs significatives pour chaque courbe.

$T(\epsilon)$ \ α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.10
$M = 10$	0.0049	0.009	0.018	0.046	0.0995
$M = 20$	0.0049	0.0095	0.019	0.047	0.0998
$M = 50$	0.0049	0.0095	0.019	0.048	0.0999
$M = 100$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1

TABLE 3.4 – Taux d’erreur de Type I de $T(\epsilon)$

Ainsi, on constate une amélioration significative, même pour des valeurs modérées de M , avec une augmentation du SNR . On précise que les résultats sont similaires pour le scénario de changement de sous-espace.

Nous allons à présent introduire deux autres statistiques de test. Par la suite, nous évaluerons les performances de détection des changements pour chacune de ces statistiques et les comparerons à celles de $T(\epsilon)$.

3.2.3 Méthodes alternatives

Dans cette section, nous comparons brièvement la statistique de test définie dans l’équation (3.8) avec deux alternatives appropriées pour le modèle de rang réduit décrit dans l’équation (2.35), dans le contexte du *régime asymptotique des grandes dimensions* énoncé dans l’Hypothèse 1. Parmi ces deux statistiques de test alternatives, la première, appelée $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$, repose sur une analyse dans le contexte du régime asymptotique des grandes dimensions et s’appuie sur l’étude des matrices de *Fisher* pour un modèle de

rang réduit, comme décrit en détail dans la section 2.2.2.3 du Chapitre 2. La seconde statistique est une extension du $T_{GLR}(\epsilon)$ spécialement adaptée au modèle de rang réduit.

3.2.3.1 Statistique de test Fisher

Statistique de test. Malgré le fait que les statistiques de test de la forme (2.14) ne soient pas consistantes dans le contexte du régime asymptotique des grandes dimensions, il est possible de construire des statistiques de test consistantes en tirant parti des comportements des valeurs propres les plus grandes et les plus petites des matrices de Fisher $\hat{\mathbf{R}}_1^{-1}\hat{\mathbf{R}}_2$, comme discuté dans [71]. Nous proposons d'utiliser la statistique $T_{\text{Fisher}}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty[}(F)$ avec les composantes suivantes :

$$F = \sum_{\substack{\ell, \ell'=1 \\ \ell' \neq \ell}}^L \sum_{k=1}^K \left[\left(\lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}}_{\ell}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{\ell'} \right) - \nu_{\ell, \ell'}^+ \right)^+ + \left(\nu_{\ell, \ell'}^- - \lambda_{M-k} \left(\hat{\mathbf{R}}_{\ell}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{\ell'} \right) \right)^+ \right] \quad (3.24)$$

où $\nu_{\ell, \ell'}^{\pm} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{c_{\ell} + c_{\ell'} - c_{\ell} c_{\ell'}}}{1 - c_{\ell}} \right)^2$.

Remarques. Cette statistique de test repose sur la comparaison entre les bords droit et gauche de la distribution de *Wachter* et les valeurs propres extrêmes. Comme observé dans la Section 2.2.2.3, similairement aux matrices de *Wishart*, les valeurs propres extrêmes doivent satisfaire une condition de séparation pour sortir de la distribution de *Wachter*. Il peut donc être pertinent de comparer la condition de séparation pour les matrices de *Wishart* avec celle des matrices de *Fisher*. On présente l'analyse pour les deux scénarios évoqués en Section 3.2.1.

- *Changement de sous-espace.*

Dans ce scénario on suppose donc sous \mathcal{H}_1 que $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ $\gamma_{k,1} = \gamma_{k,2}$ et que $\theta_{k,1} \neq \theta_{k,2}$. On peut ainsi montrer que :

$$\lambda_k \left(\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{\gamma_{k,2} + \sigma^2}{\sigma^2} & \text{pour } k = 1, \dots, K \\ 1 & \text{pour } k = K + 1, \dots, M - (K + 1) \\ \frac{\sigma^2}{\gamma_{k,1} + \sigma^2} & \text{pour } k = M - K, \dots, M. \end{cases}$$

Ensuite l'application du Théorème 3 montre que, pour tout petit $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}_i(\lim T_{\text{Fisher}}(\epsilon) = i) = 1$ pour $i \in \{0, 1\}$ lorsque $M \rightarrow \infty$ si et seulement si il existe au moins un $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que :

$$\frac{\gamma_{k,1}}{\sigma^2} > \beta := \frac{(2c + 2\sqrt{c - c^2})}{1 - 2c}$$

avec $c_1 = c_2 = 2c$. Ici comme $0 < c < 0.5$, on peut voir que $\beta > 2c > \sqrt{2c}$. Par conséquent, en utilisant l'Hypothèse 5 et le Théorème 11, on déduit que la statistique de test $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$ nécessite un rapport signal-bruit $\frac{\gamma_{k,1}}{\sigma^2}$ plus élevé par rapport à la statistique $T(\epsilon)$ proposée dans (3.8) pour être consistante dans le scénario de changement de sous-espace.

- *Changement de valeurs propres.*

Dans ce scénario on suppose donc sous \mathcal{H}_1 que $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ $\gamma_{k,2} = \gamma_{k,1}(1 + \delta)$ avec $\delta > 0$ et que $\theta_{k,1} = \theta_{k,2}$. On peut alors montrer que :

$$\lambda_k \left(\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \right) = \begin{cases} \frac{\gamma_{k,1}(1+\delta) + \sigma^2}{\gamma_{k,1} + \sigma^2} & \text{pour } k = 1, \dots, K \\ 1 & \text{if } k = K + 1, \dots, M. \end{cases}$$

En utilisant à nouveau le Théorème 3, on a pour tout petit $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(\lim T_{\text{Fisher}}(\epsilon) = i) = 1$ pour $i \in \{0, 1\}$ lorsque $M \rightarrow \infty$ si et seulement si il existe au moins un $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que :

$$\delta_k > \frac{2c + 2\sqrt{c - c^2}}{1 - 2c} \quad (3.25)$$

et

$$\frac{\gamma_{k,1}}{\sigma^2} > \beta_k := \frac{2c + 2\sqrt{c - c^2}}{(1 + \delta_k)(1 - 2c) - (1 + 2\sqrt{c - c^2})}. \quad (3.26)$$

Dans ce scénario, on peut observer que le rapport signal-bruit minimal β_k diminue lorsque δ_k augmente, ce qui peut être exploité pour établir des conditions où la statistique de test $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$ est consistante tandis que $T(\epsilon)$ ne l'est pas. Par exemple en choisissant $\sqrt{c} < \frac{\gamma_{k,1}}{\sigma^2} < \sqrt{2c}$ et δ_k suffisamment grand pour que les conditions (3.25) et (3.26) soient vérifiées, il ressort du Corollaire 1 que $\|\hat{\gamma}\|_2^2 \rightarrow KL(\gamma_k - \sigma^2\sqrt{2c})^2$ presque sûrement lorsque $M \rightarrow \infty$, et donc, pour tout petit $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}_0(\lim T(\epsilon) = 1) = 1$.

3.2.3.2 Statistique de test GLR_{LR}

Statistique de test. En tant qu'alternative au test GLR pour le test général d'égalité de covariances (2.8), le test GLR pour le test de rang faible (3.2) peut être dérivé. Des calculs classiques (Annexe 3.C) fournissent la statistique de test suivante $T_{\text{GLR-LR}}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty[}(G)$ où :

$$G = - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \log \left(\frac{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right) - N(M - K) \log \left(\frac{\frac{1}{M-K} \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\frac{1}{M-K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right) \quad (3.27)$$

En utilisant le Théorème 9, on peut montrer à partir du Théorème 9 que $G \rightarrow G_\infty$ presque sûrement lorsque $M \rightarrow \infty$, où :

$$G_\infty = \sum_{\ell=1}^L \frac{c}{c_\ell} \sum_{k=1}^K \left(\psi \left(\frac{\phi_c(\gamma_k)}{\sigma^2} \right) - \psi \left(\frac{\phi_{c_\ell}(\gamma_{k,\ell})}{\sigma^2} \right) \right) \quad (3.28)$$

avec $\psi(x) := x - \log(x)$. On peut remarquer à partir de (3.28) que la limite G_∞ sous \mathcal{H}_0 dépend des paramètres inconnus $\sigma^2, \gamma_{k,\ell}, \gamma_k$ pour tous les $k = 1, \dots, K$.

Remarques. Prenons par exemple le cas d'un changement de valeurs propres dans le cas particulier où $L = 2, K = 1$ avec $\gamma_{1,2} = \gamma_{1,1} + \delta$ et $\mathbf{a}(\theta_{1,2}) = \mathbf{a}(\theta_{1,1})$ sous \mathcal{H}_1 . Alors il est possible de montrer que, lorsque $\gamma_{1,1} \rightarrow +\infty$, sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 :

$$G_\infty = -c + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\gamma_{1,1}} \right).$$

Cela suggère que pour un $\gamma_{1,1}$ élevé et un changement fixe δ , le test $T_{\text{GLR}_{LR}}(\epsilon)$ pourrait connaître une perte de performance par rapport au test (3.8). En ce qui concerne le test proposé (3.8), on a sous \mathcal{H}_1 :

$$\|\gamma\|_2^2 = \frac{\delta^2}{2},$$

ce qui montre que la limite (3.10) sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 ne peut pas être rendue arbitrairement proche lorsque $\gamma_{1,1} \rightarrow \infty$.

On donne en Figure 3.4, une simulation dans le cas d'un changement de valeur propre pour $L = 2$, $K = 1$, $\gamma_{1,1} = 5$, $\gamma_{1,2} = 6$, $\sigma^2 = 0.5$, $N_1 = N_2 = 2M$ et $M \in \{25, 50, 100, 200\}$.

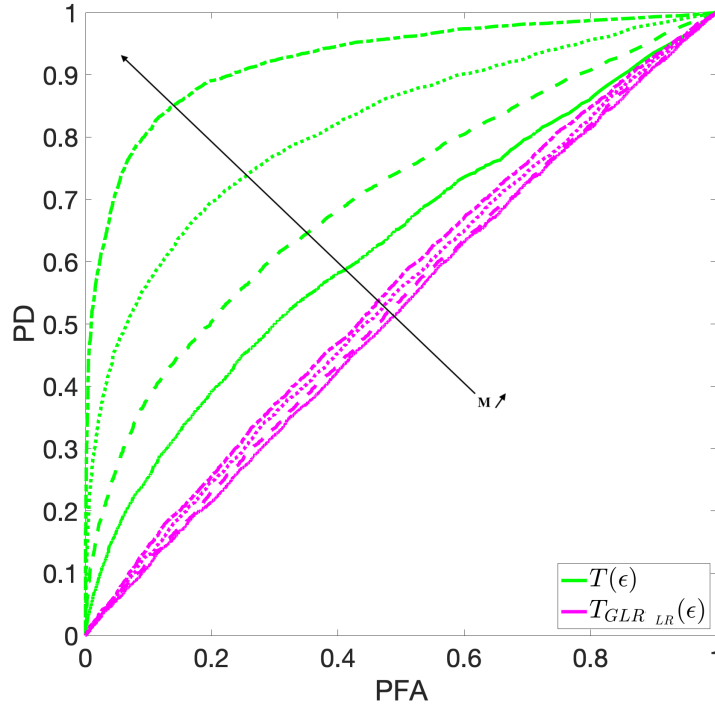


FIGURE 3.4 – Comparaison des courbes *ROC* de T et T_{GLR-LR} pour différentes valeurs de M pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

Ainsi, on peut constater des diminutions de performance même pour des valeurs propres relativement modérées avec ici un changement à hauteur de 20%, et ce phénomène persiste même lorsque la dimension M augmente.

D'autres scénarios de changement de valeurs propres, découlant de l'idée précédemment mentionnée, sont envisageables et pourraient également influencer les performances de la statistique de test $T_{GLR-LR}(\epsilon)$.

3.2.4 Illustration des performances des statistiques de test

Dans les simulations qui suivent, on évalue la puissance des différentes statistiques de test pour différentes valeurs α d'erreur de Type I. On y examine l'influence de la dimension des données en utilisant différentes valeurs de M puis on évalue la robustesse face au bruit en mettant en évidence l'impact de l'augmentation de σ^2 (et par conséquent, la réduction du rapport signal/bruit). La statistique $T(\epsilon)$ sera comparée aux statistiques $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$, $T_{GLR-LR}(\epsilon)$ et $T_{GLR}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty[}(S_{|\varphi=\log})$ où S est donnée dans l'équation (2.14). Pour chacune de ces statistiques, le seuil ϵ est ajusté séparément afin d'obtenir une erreur de Type I α . Il convient de noter que, pour les deux scénarios, les Hypothèses 4 et 5 sont vérifiées, de même que la condition de consistance de la statistique $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$. On présente les résultats sous forme de courbes *ROC* (*Receiver Operating Characteristic*), représentant le taux de détection des vrais positifs (PD, *Probability of Detection*, la puissance) en fonction du taux de fausses alarmes positives (PFA, *Probability of False Alarm*, le taux d'erreur de Type I).

3.2.4.1 Changement de valeurs propres

On considère dans cette partie le scénario de changement de valeurs propres décrit dans le Tableau 3.1. On commence par présenter en Figure 3.5 les courbes *ROC* des statistiques de test pour différentes valeurs de M .

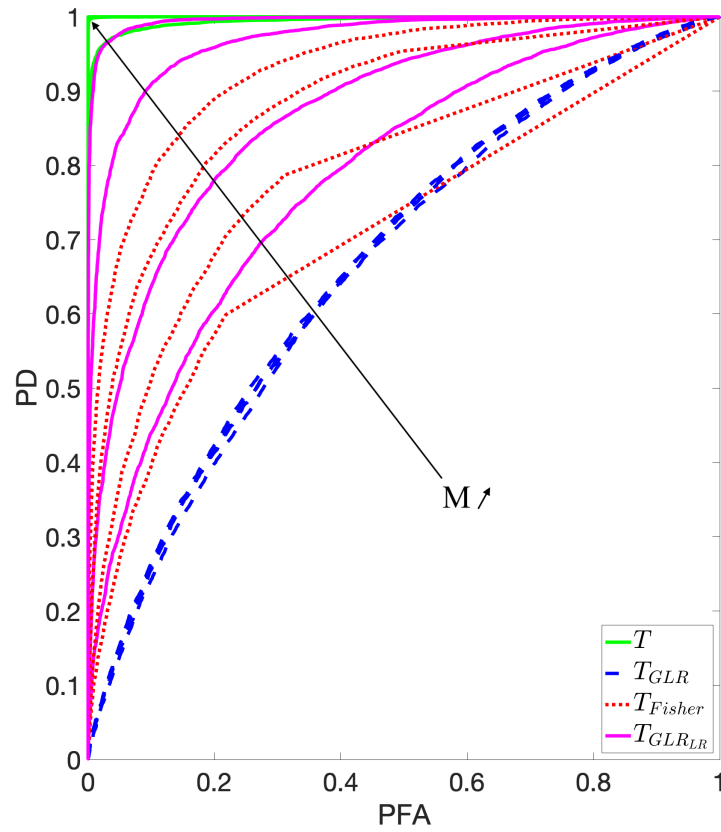


FIGURE 3.5 – Comparaison des courbes *ROC* pour différentes valeurs de M pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

Pour plus de lisibilité nous proposons le Tableau 3.5 qui regroupe les valeurs des courbes *ROC* pour les valeurs α les plus utilisées.

α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
Statistiques					
$M = 10$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.029	0.042	0.074	0.144	0.244
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.089	0.145	0.197	0.308	0.441
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.072	0.107	0.228	0.372	0.51
$T(\epsilon)$	0.920	0.942	0.959	0.973	0.986
$M = 20$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.029	0.042	0.074	0.146	0.248
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.192	0.277	0.36	0.506	0.637
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.092	0.149	0.228	0.372	0.515
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$M = 50$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.029	0.042	0.074	0.15	0.25
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.528	0.6	0.716	0.837	0.91
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.192	0.291	0.407	0.55	0.679
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$M = 100$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.03	0.043	0.075	0.153	0.25
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.87	0.923	0.955	0.973	0.986
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.343	0.43	0.535	0.678	0.785
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1

TABLE 3.5 – Puissance pour différentes valeurs de M (scénario de changement de valeurs propres)

On remarque que les statistiques de test $T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$, $T_{Fisher}(\epsilon)$ et $T(\epsilon)$ ont des performances qui s'améliorent avec M qui augmente. En effet contrairement à la statistique de test $T_{GLR}(\epsilon)$, elles sont adaptées au modèle 2.35 et sont consistantes dans le *régime asymptotiques des grandes dimensions*. On pourrait également expliquer que les performances se dégradent pour la statistique $T_{GLR}(\epsilon)$ en raison du fait qu'un changement dans les K premières valeurs propres, une fois mélangé dans la somme sur M telle que décrite dans (2.14), se retrouve mélangé avec les $M - K$ plus petites valeurs propres. Par conséquent, ce changement devient de moins en moins discernable à mesure que M augmente.

On peut s'interroger sur la capacité de chaque statistique à détecter un changement de valeurs propres de faible amplitude. C'est pourquoi, dans la prochaine simulation, on envisage sous \mathcal{H}_1 : $\gamma_{1,1} = 2$, $\gamma_{2,1} = 1,5$, $\gamma_{1,2} = 2 + x$ et $\gamma_{2,2} = 1,5 + x$ avec $x \in \{1.5, 1.2, 1.1, 0.5\}$. Cette configuration permet d'évaluer la sensibilité de chaque statistique de test pour la détection de changements de faible amplitude. On obtient ainsi la Figure 3.6.

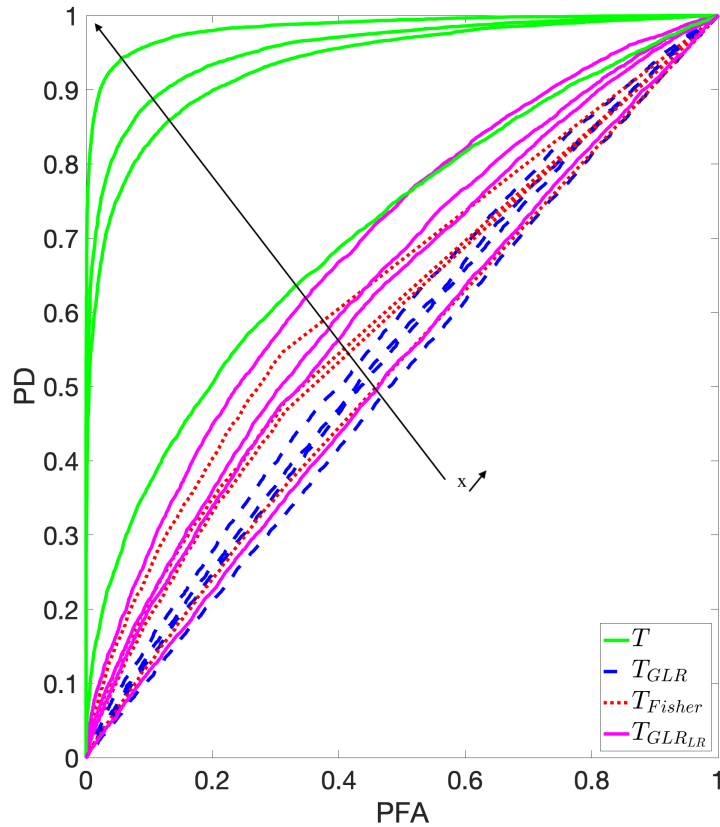


FIGURE 3.6 – Comparaison des courbes ROC pour différentes puissances de changement pour 10000 itérations de *Monte-Carlo* avec $M = 20$

Dans de telles conditions, on observe une détection plus précise des changements avec la statistique de test $T(\epsilon)$ et ce pour une valeur de M assez faible. Par conséquent, pour des changements de faible amplitude, cette statistique de test semble être plus adaptée.

On aborde maintenant l'étude de l'incidence du bruit sur les performances des statistiques. On considère de nouveau le scénario de changement de valeurs propres décrit dans le Tableau 3.1. À cette fin, on présente les courbes ROC pour $M = 100$ et différentes valeurs de σ^2 dans la Figure 3.7.

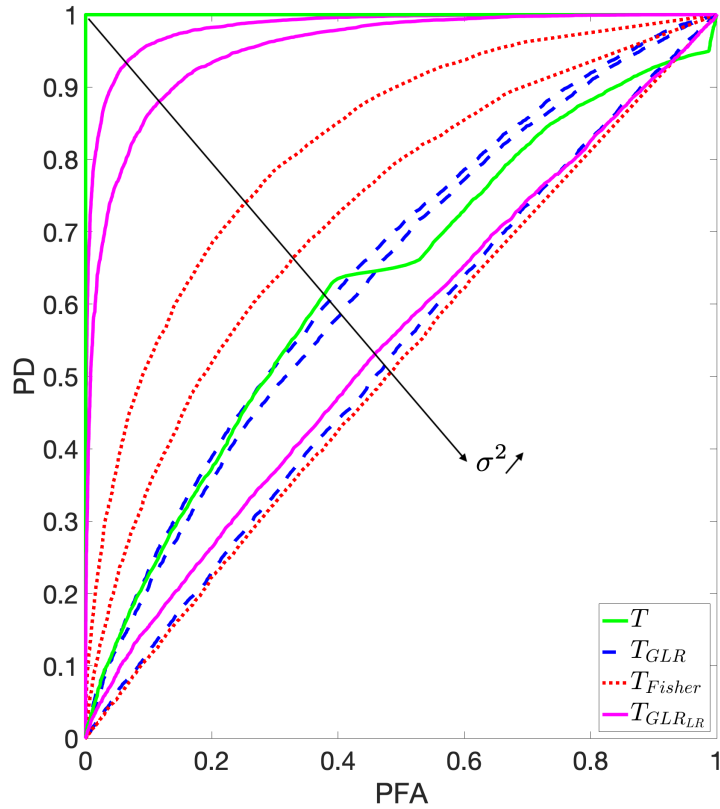


FIGURE 3.7 – Comparaison des courbes *ROC* pour différentes valeurs de σ^2 pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

On observe une discontinuité notable dans la statistique de test T pour la courbe correspondant à $\sigma^2 = 5.5$. Cette cassure est attribuable au non-respect de la condition de séparation, comme expliqué en détail dans la Section 2.2.4.2. En l'absence de cette condition, les estimateurs $\hat{\gamma}_{k,\ell}$ ont tendance à être fréquemment pris à $\sigma^2\sqrt{c_\ell}$, générant ainsi de nombreuses valeurs identiques de T sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 . Cette situation engendre l'anomalie observée dans la courbe. Afin de mieux observer les valeurs d'intérêt nous proposons le Tableau 3.6.

α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$\sigma^2 = 0.75$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.028	0.034	0.069	0.136	0.22
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.675	0.776	0.834	0.916	0.958
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.121	0.161	0.23	0.378	0.513
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$\sigma^2 = 1$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.025	0.031	0.065	0.132	0.19
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.429	0.543	0.646	0.77	0.872
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.04	0.072	0.117	0.225	0.341
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$\sigma^2 = 5.5$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.006	0.011	0.022	0.055	0.12
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.016	0.026	0.044	0.09	0.16
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.006	0.011	0.022	0.055	0.12
$T(\epsilon)$	0.029	0.035	0.068	0.136	0.22

TABLE 3.6 – Puissance pour différentes valeurs de σ^2 (scénario changement de valeurs propres)

On observe une résistance au bruit de la part des statistiques de test $T(\epsilon)$ et $T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$, avec un avantage pour la statistique $T(\epsilon)$, qui peut supporter des niveaux de bruit plus élevés.

Dans l'ensemble, dans un contexte de changement de valeurs propres, la statistique de test $T(\epsilon)$ semble être la plus performante. On se penche désormais sur le scénario de changement de sous-espace.

3.2.4.2 Changement de sous espace

On considère maintenant le scénario de changement de sous-espace décrit dans le Tableau 3.2. On commence par présenter en Figure 3.8 les courbes *ROC* pour différentes valeurs de M .

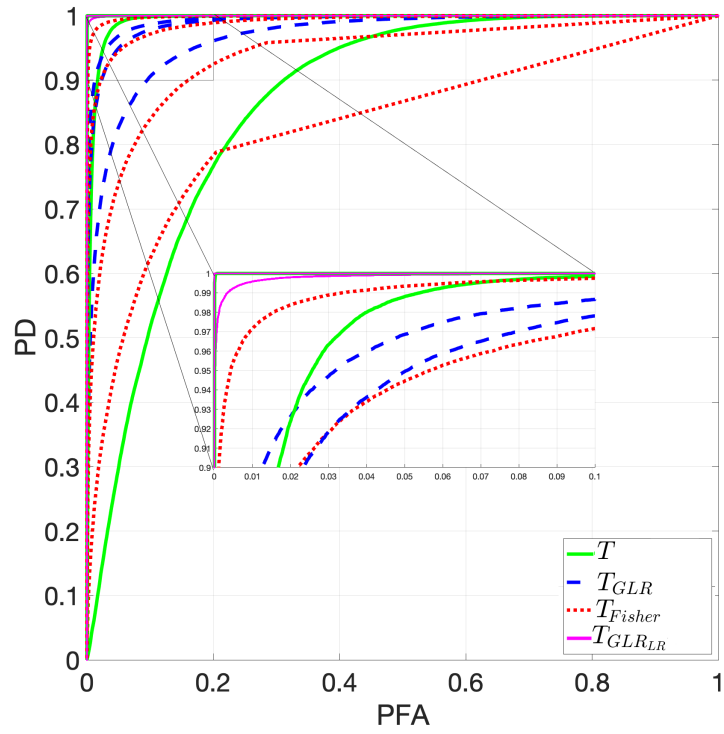


FIGURE 3.8 – Comparaison des courbes *ROC* pour différentes valeurs de M pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

Pour faciliter la lecture nous proposons le Tableau 3.7.

α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$M = 10$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.493	0.592	0.701	0.826	0.906
T_{GLR-LR}	0.992	0.996	0.998	0.999	1
$T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$	0.149	0.215	0.312	0.473	0.624
$T(\epsilon)$	0.026	0.056	0.119	0.3	0.519
$M = 20$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.757	0.829	0.89	0.949	0.978
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$	0.398	0.493	0.597	0.739	0.84
$T(\epsilon)$	0.646	0.812	0.924	0.988	1
$M = 50$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.832	0.883	0.927	0.968	0.987
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$	0.783	0.846	0.894	0.944	0.972
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$M = 100$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.838	0.891	0.934	0.972	0.988
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$	0.955	0.971	0.984	0.993	0.997
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1

TABLE 3.7 – Puissance pour différentes valeurs de M (scénario de changement de sous espace)

Dans ce scénario, on constate que la statistique de test $T(\epsilon)$ semble moins performante pour de faibles valeurs de M . Il est également remarquable que la statistique de test $T_{GLR-LR}(\epsilon)$ offre de bonnes performances. Par ailleurs, les statistiques de test $T(\epsilon)$, $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$ et $T_{GLR-LR}(\epsilon)$ s'améliorent encore une fois à mesure que M augmente, contrairement à la statistique $T_{GLR}(\epsilon)$.

Remarque 3. *Il convient de noter que les courbes de la statistique de test $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$ présentent des discontinuités. Cette caractéristique est due à la partie positive de la statistique. En effet, bien que théoriquement vérifiée, la condition de séparation des valeurs propres n'est suffisante en pratique que pour certaines valeurs propres qui sortent de la distribution des matrices de $T_{\text{Fisher}}(\epsilon)$.*

On présente maintenant l'impact de la puissance du bruit sur les performances des statistiques. On retrouve ainsi en Figure 3.9 les courbes *ROC* pour $M = 100$ et différentes valeurs de σ^2 .

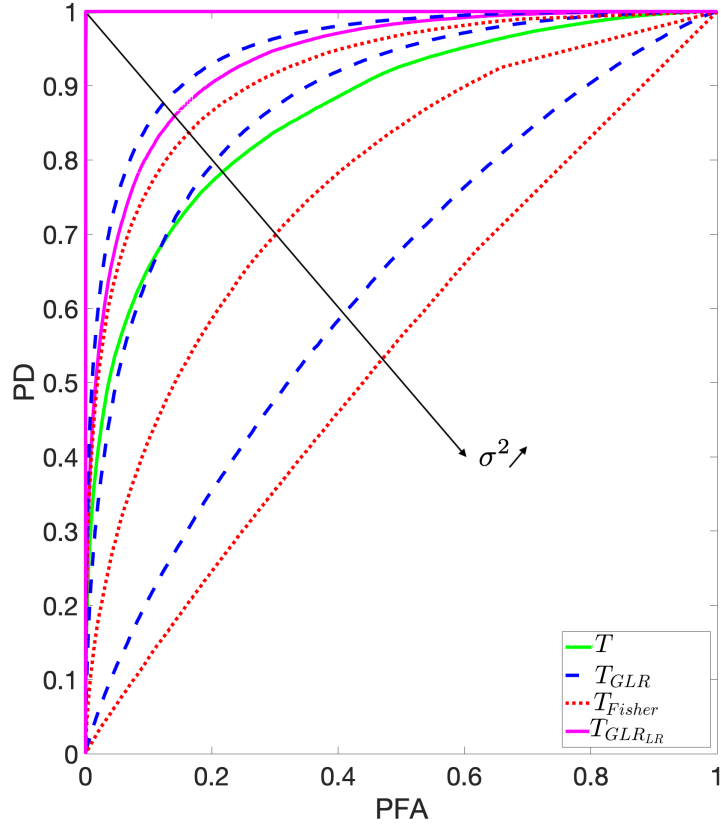


FIGURE 3.9 – Comparaison des courbes *ROC* pour différentes valeurs de σ^2 pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

Nous proposons une nouvelle fois de regrouper les valeurs les plus utiles dans le Tableau 3.8. On peut ici remarquer les performances supérieures de $T(\epsilon)$ et $T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$ avec une

Statistiques \ α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$\sigma^2 = 0.75$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.4	0.496	0.602	0.749	0.849
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.329	0.414	0.510	0.625	0.763
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$\sigma^2 = 1$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.172	0.246	0.34	0.505	0.646
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.077	0.119	0.18	0.297	0.424
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$\sigma^2 = 2.5$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.017	0.031	0.057	0.120	0.209
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.341	0.423	0.537	0.695	0.809
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.007	0.015	0.03	0.068	0.129
$T(\epsilon)$	0.256	0.327	0.414	0.566	0.655

TABLE 3.8 – Puissance pour différentes valeurs de σ^2 (scénario de changement de sous-espace)

résistance accrue au bruit de la part de $T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$. Une explication plausible de cette supériorité réside dans le fait que lorsqu'il y a un changement de sous-espace, ce sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} qui évoluent et non celles de \mathbf{R}_ℓ . Ainsi, alors que la statistique $T(\epsilon)$ compare les valeurs propres de $\mathbf{\Gamma}_\ell$ et de $\mathbf{\Gamma}$, la statistique $T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$ se contente de calculer le rapport des valeurs propres de \mathbf{R}_ℓ et de \mathbf{R} . De plus, le $T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$ prend ensuite le logarithme de ce rapport (voir (3.27)), ce qui peut accentuer les différences dans certains cas.

3.2.4.3 Modèle de simulation pour $L = 3$ et $N_1 \neq N_2 = N_3$

Dans cette section, on considère un modèle identique à celui utilisé précédemment, mais pour le cas où $L = 3$ et $N_1 \neq N_2 = N_3$. L'objectif est de montrer que les conclusions restent similaires pour ce genre de scénarios. On considère $\sigma^2 = 0,5$, $K = 2$, $L = 3$, et pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mathbf{\Gamma}_\ell = \gamma_{1,\ell} \mathbf{a}(\theta_{1,\ell}) \mathbf{a}^*(\theta_{1,\ell}) + \gamma_{2,\ell} \mathbf{a}(\theta_{2,\ell}) \mathbf{a}^*(\theta_{2,\ell})$$

avec $\mathbf{a}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{M}}(1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(M-1)\theta})^T$. La description de ce modèle pour les matrices $\mathbf{\Gamma}_\ell$ permet d'envisager les deux types de scénarios suivants.

- *Changement de valeurs propres :*

TABLE 3.9 – Scénario de changement de valeurs propres

$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	$\theta_{1,3}$	$\theta_{2,3}$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{1,3}$	$\gamma_{2,3}$
Sous \mathcal{H}_0											
0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	2	1.5	2	1.5	2	1.5
Sous \mathcal{H}_1											
0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	2	1.5	5	4	5	4

On considère également, sous les deux hypothèses, $N_1 = 4M \neq N_2 = N_3 = 2M$, donc $c_1 \neq c_2 = c_3$.

- *Changement de sous-espace :*

TABLE 3.10 – Scénario de changement de sous-espace

$\theta_{1,1}$	$\theta_{2,1}$	$\theta_{1,2}$	$\theta_{2,2}$	$\theta_{1,3}$	$\theta_{2,3}$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{1,3}$	$\gamma_{2,3}$
Sous \mathcal{H}_0											
0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	2	1	2	1	2	1
Sous \mathcal{H}_1											
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	2	1	2	1	2	1

On considère également, sous les deux hypothèses, $N_1 = 4M \neq N_2 = N_3 = 2M$, donc $c_1 \neq c_2 = c_3$.

3.2.4.4 Changement de valeurs propres

On considère dans cette partie le scénario de changement de valeurs propres décrit dans le Tableau 3.9. On présente en Figure 3.10 les courbes *ROC* des statistiques de test pour différentes valeurs de M .

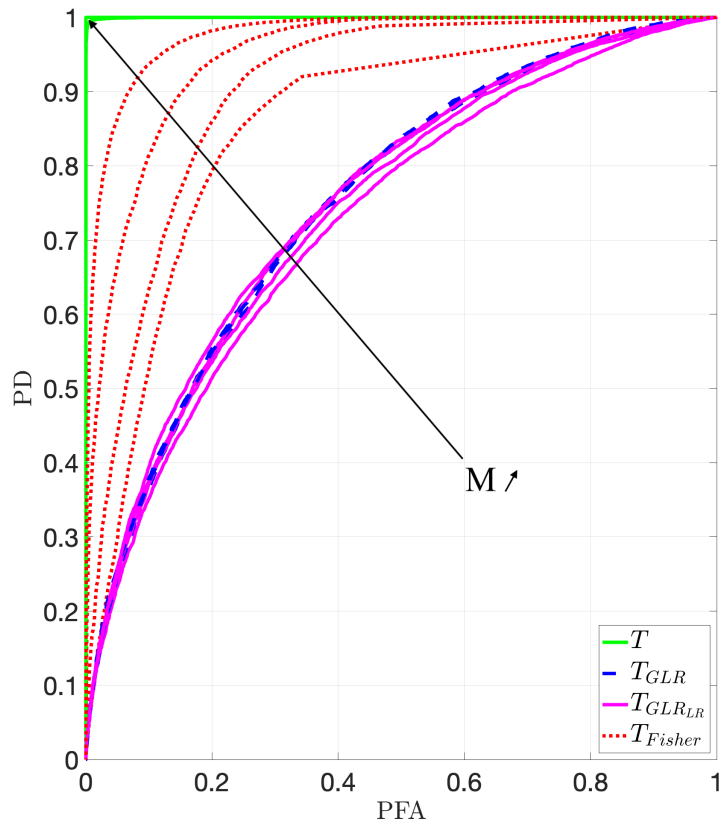


FIGURE 3.10 – Comparaison des courbes ROC pour différentes valeurs de M pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

On retrouve dans le tableau qui suit les valeurs associées à la Figure 3.10.

α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
Statistiques					
$M = 10$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.051	0.089	0.134	0.23	0.365
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.052	0.087	0.132	0.227	0.342
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.064	0.114	0.185	0.314	0.448
$T(\epsilon)$	0.992	1	1	1	1
$M = 20$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.051	0.089	0.136	0.249	0.368
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.058	0.091	0.135	0.231	0.367
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.137	0.187	0.276	0.435	0.598
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$M = 50$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.051	0.089	0.138	0.252	0.370
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.058	0.091	0.145	0.252	0.379
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.300	0.375	0.487	0.635	0.763
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$M = 100$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.051	0.089	0.14	0.254	0.380
$T_{GLR_{LR}}(\epsilon)$	0.058	0.091	0.145	0.252	0.395
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.399	0.542	0.638	0.782	0.874
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1

TABLE 3.11 – Tableau : $L = 3$ avec changement à $L = 2$, $N_1 < N_2, N_3$, $N_1 = 4M$ et $N_2, N_3 = 2M$

On peut observer ici que les résultats sont dans l'ensemble assez similaires au cas où $L = 2$. Néanmoins, on remarque que le test T_{Fisher} est plus performant que le test T_{GLR-LR} . Dans l'ensemble, T reste supérieur aux autres statistiques.

3.2.4.5 Changement de sous espace

On considère dans cette partie le scénario de changement de sous-espace décrit dans le Tableau 3.9. On présente en Figure 3.8 les courbes ROC des statistiques de test pour différentes valeurs de M .

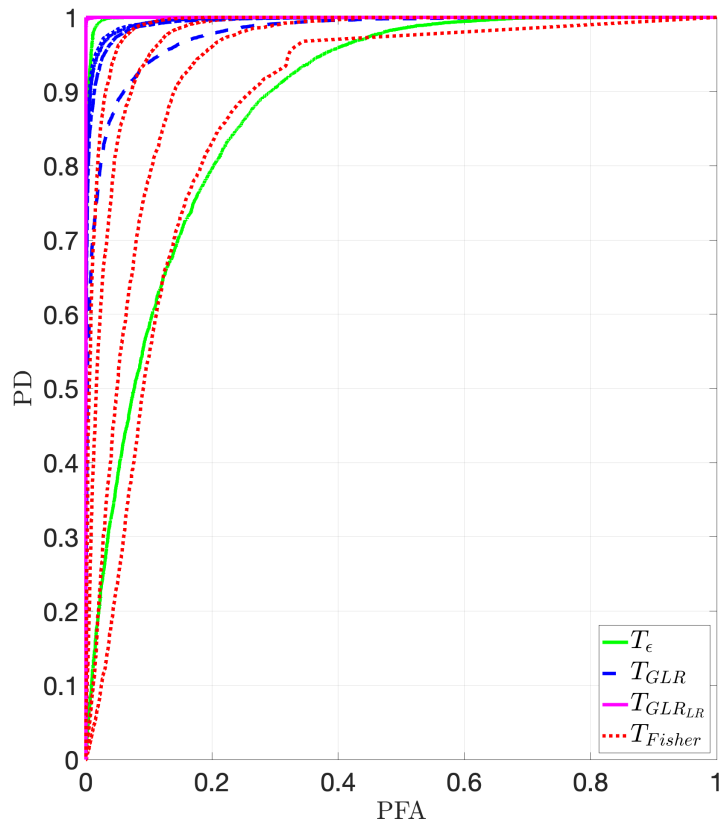


FIGURE 3.11 – Comparaison des courbes *ROC* pour différentes valeurs de M pour 10000 itérations de *Monte-Carlo*

On indique dans le tableau qui suit les valeurs associées à la Figure 3.11.

α	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$M = 10$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.596	0.676	0.792	0.864	0.934
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.018	0.035	0.076	0.237	0.540
$T(\epsilon)$	0.048	0.095	0.174	0.364	0.572
$M = 20$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.827	0.888	0.937	0.972	0.987
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.043	0.087	0.206	0.507	0.781
$T(\epsilon)$	0.931	0.979	0.995	1	1
$M = 50$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.88	0.932	0.960	0.984	0.993
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.198	0.375	0.564	0.831	0.947
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$M = 100$					
$T_{GLR}(\epsilon)$	0.87	0.914	0.951	0.983	0.993
$T_{GLR-LR}(\epsilon)$	1	1	1	1	1
$T_{Fisher}(\epsilon)$	0.495	0.656	0.819	0.958	0.992
$T(\epsilon)$	1	1	1	1	1

TABLE 3.12 – Tableau : $L = 3$ avec changement à $L = 2$, $N_1 < N_2, N_3$, $N_1 = 4M$ et $N_2, N_3 = 2M$

On remarque ici une baisse de performances pour la statistique de test T_{Fisher} . Cependant, les autres statistiques présentent des performances similaires au cas où $L = 2$.

Finalement, dans l'ensemble, la statistique T propose des performances intéressantes. Nous avons pu voir des résultats similaires et ce dans des scénarios pour différentes valeurs de L , σ^2 et M . En comparaison aux autres approches alternatives, la statistique de test semble dans l'ensemble présenter des performances supérieures.

Dans le Chapitre suivant, nous allons appliquer cette méthode pour des données réelles.

Annexes

Annexe 3.A Preuve du Lemme 8

- ((1) \Rightarrow (2)) : Est immédiat.
- ((2) \Rightarrow (1)) : En supposant (2), notons $\xi_1 > \dots > \xi_{K'} > 0$ les différentes valeurs propres parmi $\{\lambda_1(\mathbf{\Gamma}), \dots, \lambda_K(\mathbf{\Gamma})\}$ avec des multiplicités respectives $m_1, \dots, m_{K'}$, et notons $\mathbf{\Pi}_k$ (resp. $\mathbf{\Pi}_k^{(\ell)}$) la matrice de projection orthogonale des valeurs propres de $\mathbf{\Gamma}$ (resp. $\mathbf{\Gamma}_\ell$) associée à ξ_k . Si $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{K'})^T$, on a l'équation $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$ où \mathbf{A} est la matrice substochastique dont l'entrée (i, j) est donnée par

$$A_{i,j} = \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{m_i} \text{tr} \left(\mathbf{\Pi}_i \mathbf{\Pi}_j^{(\ell)} \right)$$

Par contradiction, on suppose que $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$. Alors il existe un i tel que $A_{i,i} < 1$ et on définit $k = \min \{i : A_{i,i} < 1\}$. Ainsi, $\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{\Pi}_i^{(\ell)}$ pour tous les $i < k$, et

$$\xi_k = \sum_{i=k}^{K'} A_{k,i} \xi_i \leq \xi_k \sum_{i=k}^{K'} A_{k,i} \quad (3.29)$$

ce qui implique à son tour que $\sum_{i=k}^{K'} A_{k,i} = 1$. Si $k = K'$, la contradiction est immédiate et si $k < K'$, on peut trouver $p > k$ tel que $A_{k,p} > 0$ et l'égalité dans (3.29) conduit à $\xi_k < \xi_k \sum_{i=k}^{K'} A_{k,i} = \xi_k$ une contradiction. Par conséquent, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ce qui implique que $\mathbf{\Pi}_k = \mathbf{\Pi}_k^{(\ell)}$ pour tous les k, ℓ , et, à son tour, $\mathbf{\Gamma}_\ell = \mathbf{\Gamma}$.

Annexe 3.B Preuve du Corollaire 2

Désignons c_0 comme c , et pour tout $\ell = 0, \dots, L$, définissons :

$$\hat{\phi}_\ell(w) = w \left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2 c_\ell}{\hat{\sigma}^2 - w} \right). \quad (3.30)$$

Désignons également $\hat{\mathbf{R}}_0$ comme $\hat{\mathbf{R}}$ et $\hat{\gamma}_{k,0}$ comme $\hat{\gamma}_k$ pour faciliter la lecture. Sous l'Hypothèse 5, nous observons tout d'abord d'après le Théorème 9 que :

$$\lambda_k \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell \right) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \phi_\ell(\gamma_k + \sigma^2) = \frac{(\gamma_k + \sigma^2)(\gamma_k + \sigma^2 c_\ell)}{\gamma_k},$$

de telle sorte que $\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) > \hat{\sigma}^2(1 + \sqrt{c_\ell})^2$ avec probabilité 1 pour M grand, et par conséquent, $\hat{\gamma}_{k,\ell} + \hat{\sigma}^2$ coïncide avec la plus grande solution de l'équation $\hat{\phi}_\ell(w) = \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)$. En utilisant le Lemme 3, nous déduisons que $\hat{\gamma}_{k,\ell} = \hat{w}_\ell \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) - \hat{\sigma}^2$ avec probabilité 1 pour M grand, où $\hat{w}_\ell(z) = z(1 + \hat{\sigma}^2 c_\ell \hat{m}_\ell(z))$ avec \hat{m}_ℓ la transformée de *Stieltjes* de la distribution de *Marcenko-Pastur* avec les paramètres $(\hat{\sigma}^2, c_\ell)$. On a ainsi :

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \mathcal{O}_\mathbb{P} \left(\frac{1}{M} \right)$$

et

$$\hat{m}_\ell \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) = m_\ell \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{M} \right).$$

On en déduit alors que :

$$\hat{\gamma}_{k,\ell} = w_\ell \left(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) - \sigma^2 + \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{M} \right).$$

Comme $w_\ell(\phi_\ell(\gamma_k + \sigma^2)) = \gamma_k + \sigma^2$ et que w_ℓ est différentiable en $\gamma_k + \sigma^2$, une utilisation de la méthode du delta donne :

$$\sqrt{M} \left(\hat{\gamma}_{k,\ell} - \gamma_k \right)_{\substack{\ell=0,\dots,L \\ k=1,\dots,K}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{K(L+1)}}(\mathbf{0}, \mathbf{G}\Theta\mathbf{G}),$$

où $\mathbf{G} = \text{diag} \left((w'_\ell(\phi_\ell(\gamma_k + \sigma^2)))_{\substack{\ell=0,\dots,L \\ k=1,\dots,K}} \right)$. Remarquant que $w'_\ell(\phi_\ell(\gamma_k + \sigma^2)) = \frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2 - \sigma^2 c_\ell}$ d'après le Lemme 4, nous obtenons $\mathbf{G}\Theta\mathbf{G} = \mathbf{\Omega}$, où $\mathbf{\Omega}$ est donné dans le Corollaire 2. Une autre utilisation de la méthode du delta permet de transférer le *TCL* de $(\hat{\gamma}_{k,\ell})_{\substack{\ell=0,\dots,L \\ k=1,\dots,K}}$ à $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$.

Annexe 3.C Développement autour du GLR_{LR}

On considère ici le modèle rang réduit (2.35) ainsi que le test (3.2) associé. Afin de récupérer l'expression présentée dans l'équation (3.27), dérivée du ratio de vraisemblance, nous explicitons le calcul des vraisemblances sous les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

Vraisemblance sous \mathcal{H}_0 . Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , il est possible de simplifier les écritures puisque :

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \dots = \mathbf{\Gamma}_L = \mathbf{\Gamma},$$

ce qui permet de remarquer que :

$$\mathbf{R}_1 = \dots = \mathbf{R}_L = \mathbf{R} = \mathbf{\Gamma} + \sigma^2 \mathbf{I}.$$

En notant $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_{1,1}, \dots, \mathbf{y}_{N_1,1}, \dots, \mathbf{y}_{1,L}, \dots, \mathbf{y}_{N_L,L})$ on a ([27]) :

$$f_0(\mathbf{y}; \mathbf{R}) = \left(\frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{R})} \right)^N \exp \left(-N \text{tr}(\mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{R}}) \right) \quad (3.31)$$

avec pour rappel $N = N_1 + \dots + N_L$ et $\hat{\mathbf{R}}$ est défini en (2.13). On définit ensuite l'ensemble $\mathcal{C}_0 = \{\mathbf{V}(\mathbf{D} - \sigma^2 \mathbf{I})\mathbf{V}^* + \sigma^2 \mathbf{I}\}$ avec $\sigma^2 > 0$, $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_K)$ où $d_1, \dots, d_K > \sigma^2$ et \mathbf{V} une matrice isométrique de taille $(M \times K)$.

Comme on considère le cas du GLR on cherche $\sup_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}_0} \log(f_0(\mathbf{y}; \mathbf{R}))$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{V}, \mathbf{D}, \sigma^2) &= \log(f_0(\mathbf{y}; \mathbf{R})) \\ &= -N(M - K) \log(\sigma^2) - N \sum_{k=1}^K \log(d_k) - N \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}})}{\sigma^2} \\ &\quad - N \text{tr} \left(\hat{\mathbf{R}} \mathbf{V} (\mathbf{D}^{-1} - \frac{\mathbf{I}}{\sigma^2}) \mathbf{V}^* \right) + C \end{aligned}$$

avec C une constante. De plus, on peut noter que dans \mathcal{C}_0 on a $\frac{1}{\sigma^2} > \mathbf{D}^{-1}$. On peut donc alors montrer en utilisant une inégalité de trace standard que :

$$g(\mathbf{V}, \mathbf{D}, \sigma^2) \leq g(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{D}, \sigma^2)$$

avec $\hat{\mathbf{V}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_K]$ ou les vecteurs $\hat{\mathbf{u}}_i$ sont donné par la décomposition en valeur propres $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{U}}^*$ avec $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_M]$ et $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}(\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}), \dots, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}))$. On a donc alors :

$$\begin{aligned} g(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{D}, \sigma^2) &= -N(M - K)\log(\sigma^2) - N \sum_{k=1}^K \log(d_k) - N \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}})}{\sigma^2} \\ &\quad - N \sum_{k=1}^K \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{\sigma^2} \right) + C \end{aligned}$$

Les maximums uniques de \mathbf{D} et σ^2 sont :

$$\hat{\mathbf{D}} = \text{diag} \left(\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}), \dots, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}) \right), \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{M - K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}})$$

Ainsi on peut en déduire :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}_0} \log(f_0(\mathbf{y}; \mathbf{R})) &= \log \left(f_0(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{D}} - \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{I})\hat{\mathbf{V}}^* + \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{I}) \right) \\ &= -N(M - K)\log(\hat{\sigma}_0^2) - N \sum_{k=1}^K \log(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})) - N \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}})}{\hat{\sigma}_0^2} \\ &\quad - N \sum_{k=1}^K \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) \left(\frac{1}{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} - \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \right) + C \\ &= -N \sum_{k=1}^K \log(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})) - N(M - K)\log \left(\frac{1}{M - K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}) \right) + C \end{aligned}$$

Vraisemblance sous \mathcal{H}_1 . Sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 , en notant $\mathbf{y} = ()$ on a ([?]) :

$$f_1(\mathbf{y}; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L) = \left(\frac{1}{\pi} \right)^{MN} \left(\frac{1}{\det(\mathbf{R}_\ell)} \right)^{N_\ell} \exp \left(-N_\ell \text{tr}(\mathbf{R}_\ell^{-1} \hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) \quad (3.32)$$

avec pour rappel $\mathbf{R}_\ell = \mathbf{\Gamma}_\ell + \sigma^2 \mathbf{I}$ et $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ défini en (2.12). On définit ensuite l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \{(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L) : \mathbf{R}_\ell = \mathbf{V}_\ell(\mathbf{D}_\ell - \sigma^2 \mathbf{I})\mathbf{V}_\ell^* + \sigma^2 \mathbf{I}\}$ avec $\sigma^2 > 0$, $\mathbf{D}_\ell = \text{diag}(d_{1,\ell}, \dots, d_{K,\ell})$ où $d_{1,\ell}, \dots, d_{K,\ell} > \sigma^2$ et \mathbf{V}_ℓ une matrice isométrique de taille $(M \times K)$.

Comme on considère le cas du GLR on cherche $\sup_{(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L) \in \mathcal{C}_1} \log(f_1(\mathbf{y}; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L))$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_L, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L, \sigma^2) &= \log(f_1(\mathbf{y}; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L)) \\ &= -N(M - K)\log(\sigma^2) - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \log(d_{k,\ell}) - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\sigma^2} \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \text{tr} \left(\hat{\mathbf{R}}_\ell \mathbf{V}_\ell (\mathbf{D}_\ell^{-1} - \frac{\mathbf{I}}{\sigma^2}) \mathbf{V}_\ell^* \right) + C \end{aligned}$$

avec C une constante. On considère ensuite la décomposition en valeur propres $\hat{\mathbf{R}}_\ell = \hat{\mathbf{U}}_\ell \hat{\mathbf{\Lambda}}_\ell \hat{\mathbf{U}}_\ell^*$ avec $\hat{\mathbf{U}}_\ell = [\hat{\mathbf{u}}_{1,\ell}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{M,\ell}]$, $\hat{\mathbf{\Lambda}}_\ell = \text{diag}(\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_\ell), \dots, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_\ell))$, puis on note $\hat{\mathbf{V}}_\ell = [\hat{\mathbf{u}}_{1,\ell}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{K,\ell}]$. De plus, on peut noter que dans \mathcal{C}_1 on a $\frac{\mathbf{1}}{\sigma^2} > \mathbf{D}_\ell^{-1}$. On peut alors montrer en utilisant une inégalité de trace standard que :

$$g(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_L, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L, \sigma^2) \leq g(\hat{\mathbf{V}}_1, \dots, \hat{\mathbf{V}}_L, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L, \sigma^2)$$

On a donc alors :

$$\begin{aligned} g(\hat{\mathbf{V}}_1, \dots, \hat{\mathbf{V}}_L, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L, \sigma^2) &= -N(M-K)\log(\sigma^2) - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \log(d_{k,\ell}) - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\sigma^2} \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \left(\frac{1}{d_{k,\ell}} - \frac{1}{\sigma^2} \right) + C \end{aligned}$$

La maximisation sur $(\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_L, \sigma^2)$ donne :

$$\hat{\mathbf{D}}_\ell = \text{diag}(\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_\ell), \dots, \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_\ell)), \quad \hat{\sigma}_1^2 = \sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M-K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \sup_{(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L) \in \mathcal{C}_1} \log(f_1(\mathbf{y}; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L)) &= -N(M-K)\log(\hat{\sigma}_1^2) - N \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \log(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)) \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\hat{\sigma}_1^2} \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \left(\frac{1}{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)} - \frac{1}{\hat{\sigma}_1^2} \right) + C \\ &= - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \log(\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)) \\ &\quad - N(M-K)\log \left(\sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \frac{1}{M-K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell) \right) \\ &\quad + C \end{aligned}$$

Ratio de vraisemblances. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\sup_{(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L) \in \mathcal{C}_1} \log(f_1(\mathbf{y}; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_L))}{\sup_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}_0} \log(f_0(\mathbf{y}; \mathbf{R}))} &= - \sum_{\ell=1}^L N_\ell \sum_{k=1}^K \log \left(\frac{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right) \\ &\quad - N(M-K) \log \left(\frac{\sum_{\ell=1}^L \frac{N_\ell}{N} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_\ell)}{\sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right) \end{aligned}$$

Application à la détection de changements dans les images *SAR*

Sommaire

4.1	Statistiques de test considérées	97
4.2	Simulations sur données synthétiques	98
4.2.1	Modèle de simulation	98
4.2.2	Variations de ρ_ℓ	99
4.2.3	Variations du <i>SNR</i>	99
4.2.4	Variations de l'estimation du rang K	100
4.2.5	Variations de M	101
4.3	Tests sur données réelles <i>SAR</i>	102
4.3.1	Introduction aux données	102
4.3.2	Modèle Statistique	104
4.3.3	Simulations sur données <i>SAR</i>	106
4.3.3.1	Vérité terrain	106
4.3.3.2	Proposition d'une nouvelle vérité terrain	108
4.3.4	Courbes <i>ROC</i>	112
4.3.4.1	Introduction	112
4.3.4.2	Scène 1	113
4.3.4.3	Scène 2	116
4.3.5	Cartes de détections	118
4.3.5.1	Scène 1	118
4.3.5.2	Scène 2	120
4.3.6	Statistique de test $T(\epsilon)$	122
Annexes	126
4.A	Loi de probabilité estimées	126

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit une nouvelle statistique de test, notée $T(\epsilon)$, dont nous avons étudié le comportement au premier et au second ordre, dans le contexte du régime asymptotique des grandes dimensions. Cela nous a permis de contrôler son taux de fausse alarme et de déterminer un seuil ϵ pour atteindre un taux de fausse alarme α souhaité. De plus, les simulations ont révélé des performances prometteuses par rapport à d'autres statistiques de test pertinentes. Notre prochaine étape dans ce chapitre est d'évaluer ses performances sur des données réelles. À cette fin, nous commencerons

par présenter les données et vérifier la pertinence du modèle gaussien. Ensuite, nous procéderons à une évaluation des performances des statistiques de test considérées sur les données réelles.

4.1 Statistiques de test considérées

Pour mettre en évidence l'intérêt de $T(\epsilon)$, nous souhaitons nous comparer à des statistiques de test bien établies dans la littérature.

Tout d'abord, nous allons considérer une statistique de test majeure dans l'étude d'égalité de matrices de covariance qui est le rapport de vraisemblance généralisé (GLR). Celui-ci a été établi dans un cadre général et n'est donc pas adapté pour un modèle précis de rang réduit. Il vérifie :

$$S_{|\varphi=\log} = \frac{1}{ML} \sum_{\ell=1}^L \log \left(\det \left(\hat{\mathbf{R}}_{\ell}^{-1} \hat{\mathbf{R}} \right) \right) \quad (4.1)$$

où S est définie en (2.14), ce qui conduit à la statistique de test suivante :

$$T_{\text{GLR}}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty]}(S_{|\varphi=\log}). \quad (4.2)$$

Ensuite, nous allons examiner des statistiques de test qui sont spécifiquement définies pour le test d'hypothèse issu du modèle rang réduit (2.35). Nous considérons ainsi le GLR – LR défini en 3.2.3.2 dont on rappelle l'expression ci-après :

$$G = - \sum_{\ell=1}^L N_{\ell} \sum_{k=1}^K \log \left(\frac{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_{\ell})}{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right) - N(M - K) \log \left(\frac{\frac{1}{M-K} \sum_{\ell=1}^L \frac{N_{\ell}}{N} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_{\ell})}{\frac{1}{M-K} \sum_{k=K+1}^M \lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right), \quad (4.3)$$

ce qui donne comme statistique de test :

$$T_{\text{GLR-LR}}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty]}(G) \quad (4.4)$$

Nous nous intéresserons également à une autre statistique S_{σ^2} de test mentionnée dans [99] et [100], qui découle du GLR – LR en intégrant des informations a priori et qui elle aussi est adaptée au modèle rang réduit. Dans le cadre de cette troisième statistique, nous nous appuyons sur les hypothèses formulées dans des travaux antérieurs ([99], [100]), qui supposent une connaissance préalable de la valeur de σ^2 . Ensuite, la structure des matrices de covariances $\hat{\mathbf{R}}_{\ell}$ est ajustée de manière à ce que les $(M - K)$ plus petites valeurs propres soient fixées à σ^2 . Cet ajustement se fera dans l'algorithme de construction des matrices $\hat{\mathbf{R}}_{\ell}$ et $\hat{\mathbf{R}}$ ([101]). Nous obtenons ainsi en repartant de (4.3) l'expression de S_{σ^2} :

$$S_{\sigma^2} = - \sum_{\ell=1}^L N_{\ell} \sum_{k=1}^K \log \left(\frac{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}}_{\ell})}{\lambda_k(\hat{\mathbf{R}})} \right) \quad (4.5)$$

Elle donne lieu à la statistique de test suivante :

$$T_{S_{\sigma^2}}(\epsilon) = \mathbb{1}_{[\epsilon, +\infty]}(S_{\sigma^2}) \quad (4.6)$$

A noter que pour chacune des statistiques, le seuil ϵ est ajusté individuellement afin d'atteindre un certain taux d'erreur de type I noté α .

Dans les sections à venir, nous allons évaluer les performances de ces statistiques dans des scénarios spécifiques, en commençant par une analyse théorique, puis en les appliquant à des données réelles provenant de l'imagerie *SAR*.

4.2 Simulations sur données synthétiques

4.2.1 Modèle de simulation

Dans cette section, l'objectif est de développer un modèle de simulation utilisant des données synthétiques, visant à se rapprocher du format des données réelles *SAR* que l'on détient. Cette approche nous permettra d'obtenir une première évaluation des performances de la statistique de test proposée $T(\epsilon)$ avant de l'appliquer à des données réelles. On considère une dimension M est de l'ordre de la dizaine, contrairement aux simulations du chapitre précédent qui se focalisaient davantage sur des hypothèses de matrices aléatoires avec $M \rightarrow \infty$. Ensuite, on souhaite tester la robustesse de la statistique de test $T(\epsilon)$ par rapport à différents paramètres, tels que le rang K . Pour ce faire, nous considérons le modèle suivant pour les matrices \mathbf{R}_ℓ :

$$\mathbf{R}_\ell = \beta \mathbf{\Gamma}_\ell + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (4.7)$$

avec $\sigma^2 = 1$, β une constante réelle agissant sur le rapport signal sur bruit (SNR), et où $\mathbf{\Gamma}_\ell$ est construite comme suit. On considère, pour chaque série temporelle, une matrice *Toeplitz* symétrique \mathbf{T}_ℓ de taille $(M \times M)$ telle que :

$$\mathbf{T}_{\ell_{i,j}} = \rho_\ell^{|i-j|} \quad (4.8)$$

avec $\rho_\ell \in [0; 1]$. Puisque ses coefficients sont réels, on en prend ensuite sa décomposition en valeurs propres :

$$\mathbf{T}_\ell = \sum_{k=1}^M \gamma_{k,\ell} \mathbf{u}_{k,\ell} \mathbf{u}_{k,\ell}^* \quad (4.9)$$

avec $\gamma_{k,\ell}$ les valeurs propres réelles de \mathbf{T}_ℓ et $\mathbf{u}_{k,\ell}$ des vecteurs unitaires de dimension $(M \times 1)$. On définit alors les matrices de covariance $\mathbf{\Gamma}_\ell$ en tronquant (4.9) comme suit :

$$\forall \ell \in \{1, 2\} \quad \mathbf{\Gamma}_\ell = \sum_{k=1}^K \gamma_{k,\ell} \mathbf{u}_{k,\ell} \mathbf{u}_{k,\ell}^*$$

Pour se placer dans le même cadre que les données réelles *SAR* traitées par la suite, nous fixons également les valeurs suivantes : $L = 2$, $M = 12$, $K = 5$, et pour chaque $\ell \in \{1, 2\}$, $N_\ell = 49$.

Les simulations réalisées sont regroupées en quatre catégories. La première se penche principalement sur l'impact de ρ_ℓ et la proximité de ses valeurs sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 . La deuxième se concentre sur l'effet du bruit sur les performances des tests. Pour la troisième, nous étudions la robustesse des statistiques de test face à une mauvaise estimation du rang K . Enfin, la quatrième met en évidence la sensibilité au choix de M .

4.2.2 Variations de ρ_ℓ

Pour les premières simulations, nous allons nous pencher sur les limites de performance des statistiques, en faisant varier l'écart entre ρ_1 et ρ_2 sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 . Dans le cadre de \mathcal{H}_0 , nous fixons $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, tandis que pour \mathcal{H}_1 , nous choisissons $\rho_1 = 0.1$ et $\rho_2 = x$ avec x prenant des valeurs parmi $\{0.2, 0.3, 0.4\}$. En outre, compte-tenu des niveaux de SNR observés dans les données réelles dont nous disposons, nous définissons β de manière à ce que $SNR_{dB} = 10$. On évalue ainsi les performances via des courbes ROC en Figure 4.1.

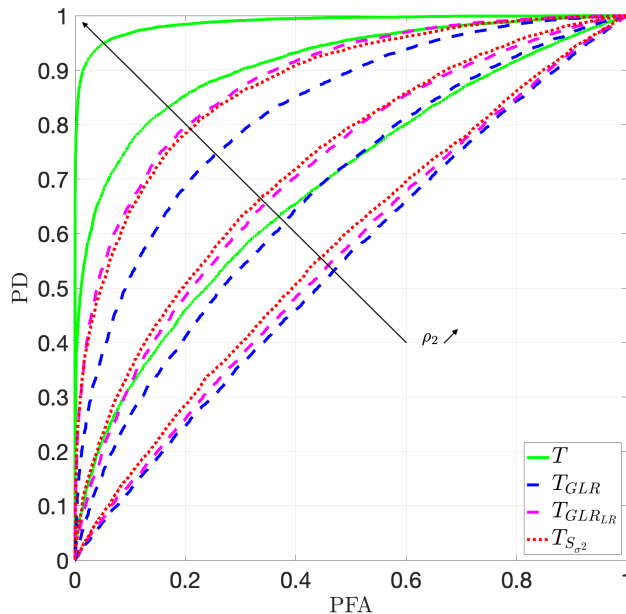
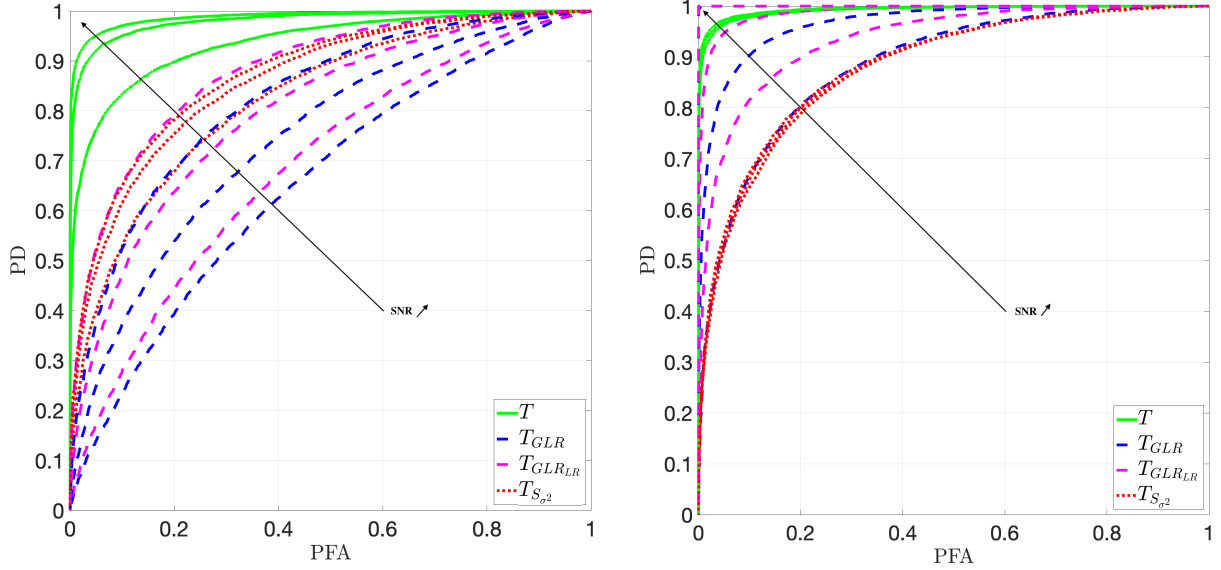


FIGURE 4.1 – Courbes ROC pour $\rho_2 \in \{0.2, 0.3, 0.4\}$ et $SNR_{dB} = 10$

Comme on peut le constater grâce à la Figure 4.1, les performances de $T(\epsilon)$ sont supérieures dans ce scénario, avec notamment une précision accrue dans la détection de changement pour des écarts de ρ_ℓ plus faibles. En ce qui concerne les autres statistiques, on observe des performances assez similaires, avec un avantage notable pour les statistiques adaptées au modèle de rang réduit (2.35).

4.2.3 Variations du SNR

Pour les simulations à venir, nous examinons l'impact du SNR sur les performances. Sous \mathcal{H}_0 , nous maintenons $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, tandis que sous \mathcal{H}_1 , nous optons pour $\rho_1 = 0.1$ et $\rho_2 = 0.4$. Les performances seront évaluées au moyen de courbes ROC , illustrées en Figure 4.2.



Courbes ROC pour $\rho_2 = 0.4$ et $SNR_{dB} = \{3, 7, 10\}$ Courbes ROC pour $\rho_2 = 0.4$ et $SNR_{dB} = \{12, 15, 20\}$

FIGURE 4.2 – Comparaison des courbes ROC pour différentes valeurs de SNR

Pour une large plage de SNR , nous observons de meilleures performances, ainsi qu'une résistance accrue au bruit de la part de $T(\epsilon)$. Cependant, il est intéressant de noter qu'à partir d'un certain seuil de SNR_{dB} élevé, en l'occurrence à partir de $SNR_{dB} = 15$ ($SNR = 32$), les performances de $T(\epsilon)$ semblent se stabiliser, contrairement aux statistiques de test $T_{GLR_{LR}}$ et T_{GLR} . Cela peut s'expliquer par le fait que les conditions de simulation ne sont pas vraiment représentatives du régime des grandes dimensions dans lequel nous avons établi nos résultats. Comme nous le verrons en détail dans la section 4.2.5, lorsque la dimension M augmente, ce comportement n'est plus observé.

4.2.4 Variations de l'estimation du rang K

Lorsque nous travaillons avec des données réelles, il est souvent possible de connaître ou d'estimer un rang pour les données à notre disposition. Cependant, cette estimation peut être erronée, ce qui peut entraîner des variations de performances significatives pour les statistiques de test. C'est pourquoi dans cette étude, nous allons évaluer la robustesse des statistiques face à une mauvaise estimation du rang K . Nous considérons ici un SNR_{dB} de 10, et sous \mathcal{H}_0 , nous fixons $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, tandis que sous \mathcal{H}_1 , nous choisissons $\rho_1 = 0.1$ et $\rho_2 = 0.4$. Puisque le rang réel est $K = 5$, nous utiliserons une estimation \hat{K} dans l'expression des statistiques de test, avec des valeurs dans l'intervalle suivant : $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Ceci nous permettra de tester à la fois une sous-estimation et une surestimation du rang. Les résultats de ces tests sont présentés en Figure 4.3.

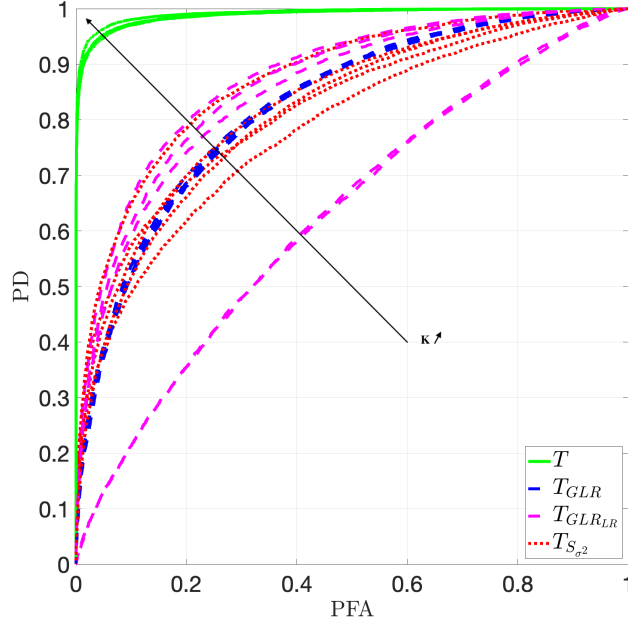


FIGURE 4.3 – Courbes *ROC* pour $\hat{K} \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Dans cette figure, nous observons un impact très limité d’une mauvaise estimation du rang en ce qui concerne $T(\epsilon)$. Cela suggère que si l’énergie du signal est principalement concentrée sur les premières valeurs propres, $T(\epsilon)$ peut maintenir de bonnes performances même avec une connaissance limitée des propriétés du signal. Les performances de T_{GLR} sont fournies à titre de référence mais cette statistique reste inchangée avec le rang car elle ne repose pas sur l’hypothèse de rang réduit. Nous notons qu’une surestimation du rang entraîne, pour les deux autres statistiques de test, une légère amélioration des performances, tandis qu’une sous-estimation du rang les diminue de manière significative.

4.2.5 Variations de M

L’objectif de cette simulation est de rappeler l’importance des hypothèses établies dans nos recherches, en particulier l’hypothèse du régime des grandes dimensions. Il est crucial de souligner que des résultats plutôt convaincants peuvent être obtenus avec des simulations où les valeurs de M et N_ℓ sont modérées ou faibles. Cependant, il est tout aussi important de noter que les performances ne peuvent que s’améliorer à mesure que les valeurs de M et N_ℓ augmentent. Pour illustrer cette notion, nous reprenons la simulation présentée en Figure 4.2, qui met en évidence les limitations associées à de faibles valeurs de M et à une augmentation du SNR par rapport aux autres statistiques de test. Cette fois-ci, sous \mathcal{H}_0 , nous conservons $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, tandis que sous \mathcal{H}_1 , nous optons pour $\rho_1 = 0.1$, $\rho_2 = 0.4$, et un $SNR_{dB} = 20$ pour différentes valeurs de M : $M \in \{12, 27, 48\}$.

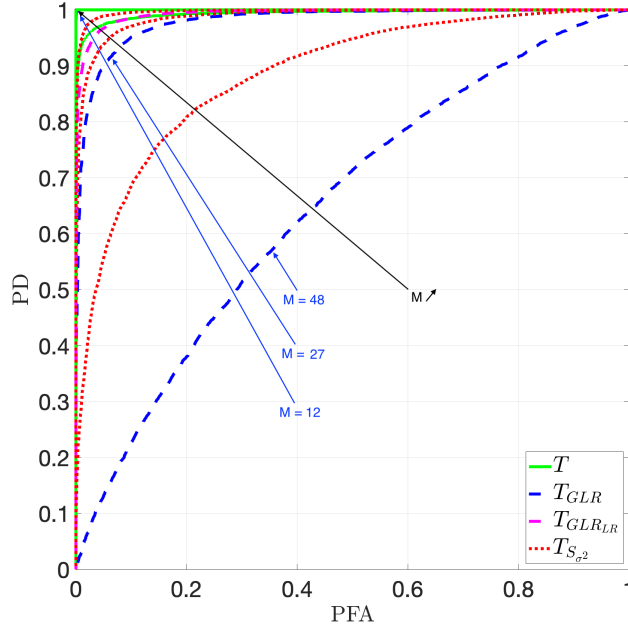


FIGURE 4.4 – Courbes ROC pour $M \in \{12, 27, 48\}$ et $SNR_{dB} = 20$

Il est ainsi remarquable, comme le montre la Figure 4.4, que les performances de toutes les statistiques de test ont augmenté avec M , à l'exception de T_{GLR} qui a vu ses performances diminuer avec M qui augmente. Cette diminution de performance pour T_{GLR} est attendue, puisque plus M augmente plus le problème de détection est difficile sans prendre en compte le rang réduit, comme indiqué dans le résultat (2.38). De plus, même si les performances s'améliorent pour toutes les autres statistiques, $T(\epsilon)$ redevient la plus performante.

4.3 Tests sur données réelles SAR

4.3.1 Introduction aux données

Dans cette étude, nous examinons l'évolution des caractéristiques urbaines de *Los Angeles* en utilisant des données SAR capturées par le système $UAVSAR$ de la *NASA/JPL-Caltech*. Deux jeux d'images acquises à différents moments, le 23 avril 2009 et le 15 mai 2011, offrent une occasion de suivre les changements qui ont transformé la métropole au fil du temps avec pour chacune de ces scènes une résolution en azimuth de 0.6m et en distance de 1.67m. L'image datant du 23 avril 2009 constitue un instantané initial de la région, tandis que l'image prise le 15 mai 2011 nous offre une fenêtre sur les développements survenus au cours de ces deux années. De plus, les données SAR issues du système $UAVSAR$ ne se limitent pas à une simple image en deux dimensions. Elles fournissent en réalité une vision en trois dimensions de la surface terrestre en enregistrant les réflexions dans trois canaux de polarisation : HH (Horizontale-Horizontale), HV (Horizontale-Verticale) et VV (Verticale-Verticale). Cette richesse d'informations polarimétriques permet une exploration approfondie des propriétés des objets et des matériaux présents dans la scène observée. Pour analyser ces données complexes, diverses techniques de décomposition et de visualisation ([102], [103]) peuvent être employées. Parmi elles, la représentation RGB *Pauli* se révèle particulièrement utile pour la représentation en couleur des images SAR ([104], [105]). En utilisant les amplitudes des canaux de polarisation HH , HV et VV , la méthode RGB *Pauli* permet de créer une image composite colorée qui met en évidence

les contrastes entre les différentes polarisations.

La décomposition de *Pauli* est une approche qui s'appuie sur des concepts essentiels issus des matrices de *Pauli* et des matrices de cohérence polarimétrique ([104], [105]). Les matrices de *Pauli*, également connues sous le nom de matrices de *spin* de *Pauli*, constituent une base mathématique qui facilite la représentation des différentes polarisations des rétro-diffusions. Elles sont utilisées pour décrire les états de polarisation des ondes radar et sont à la base de la décomposition de *Pauli*. La décomposition de *Pauli* repose sur le concept de matrices de cohérence polarimétrique, qui sont construites en utilisant les matrices de *Pauli* pour représenter les différentes polarisations des ondes radar rétro-diffusées par une cible. Ces matrices contiennent des informations importantes sur les propriétés de polarisation de la cible. Pour ce faire, on pose \mathbf{S} la matrice de diffusion ([106], [107], [108]), également appelée matrice de rétro-diffusion ou *scattering matrix* en anglais, qui est une représentation matricielle des propriétés de rétro-diffusion d'une cible observée par un radar :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix},$$

où S_{ij} représente le coefficient de diffusion associé à la polarisation du champ incident i et à la polarisation du champ rétro-diffusé j . En utilisant la décomposition de *Pauli* dans le cas mono-statique où $S_{HV} = S_{VH}$, nous pouvons exprimer la matrice \mathbf{S} dans la base de *Pauli* ([104], [109], [105]) :

$$\mathbf{S} = \frac{S_{HH} + S_{VV}}{\sqrt{2}} \mathbf{S}_a + \frac{S_{HH} - S_{VV}}{\sqrt{2}} \mathbf{S}_b + \sqrt{2} S_{HV} \mathbf{S}_c,$$

où

$$\mathbf{S}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

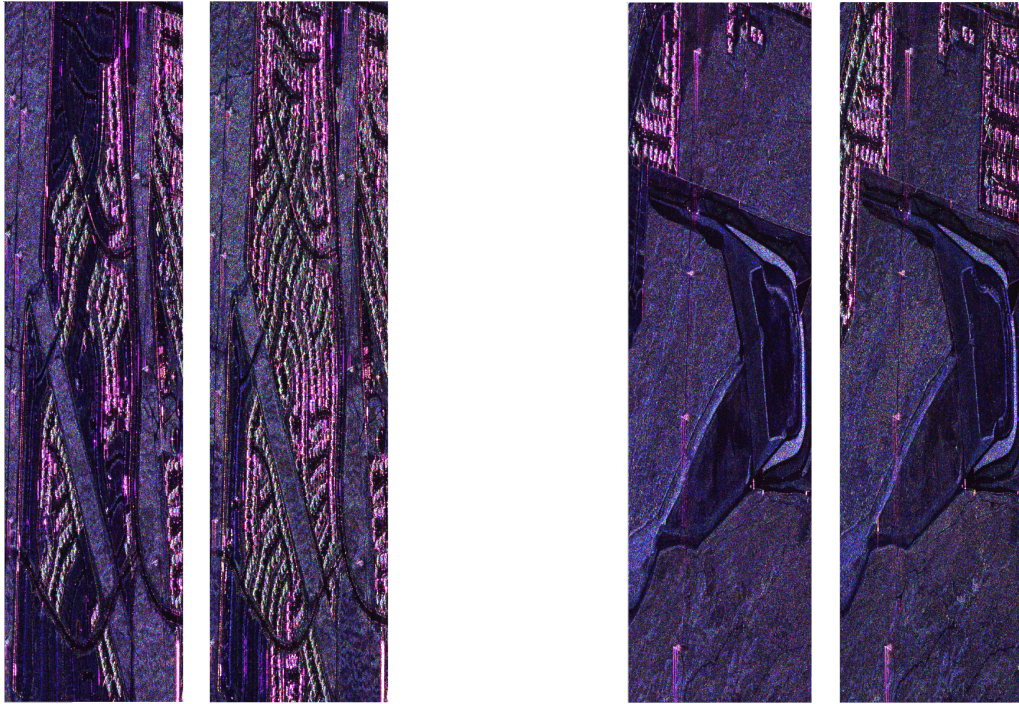
On obtient par la suite l'écriture du vecteur cible de la décomposition de *Pauli*, également appelé vecteur de *Pauli*, qui est une représentation mathématique des propriétés de polarisation des rétro-diffusions d'une cible observée par le radar :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [S_{HH} + S_{VV} \quad S_{HH} - S_{VV} \quad 2S_{HV}]^T.$$

Ce vecteur contient les informations sur les composantes de polarisation des rétro-diffusions dans différentes configurations d'émission et de réception du radar. Avec ces informations une représentation de *Pauli* en RGB connue et utilisée comme référence est la suivante ([105]) :

$$(R) : S_{HH} - S_{VV}, (G) : 2S_{HV}, (B) : S_{HH} + S_{VV}.$$

On obtient ainsi via le canal (R) une information sur les rebonds simples ou impairs, sur le canal (B) les rebonds doubles ou pairs et sur le canal (G) les rebonds donnant une polarisation orthogonale à l'onde incidente ([110], [111]). Ce type de visualisation permet de mettre en évidence différents aspects de la rétro-diffusion radar polarimétrique et de faciliter l'interprétation des caractéristiques des objets sur la surface observée. Nous étudions deux ensembles d'images saisies par le système *UAVSAR* de la *NASA/JPL-Caltech* pour examiner l'évolution des traits urbains de *Los Angeles* au fil du temps, désignés respectivement comme "Scène 1" et "Scène 2" pour faciliter notre analyse ultérieure. On introduit donc en Figure 4.5 la représentation en RGB *Pauli* des deux scènes.



Scène 1 : 23 Avril 2009 (gauche), 15 Mai 2011 (droite), (550 × 2360) pixels. Scène 2 : 23 Avril 2009 (gauche), 15 Mai 2011 (droite), (600 × 2300) pixels.

FIGURE 4.5 – Représentation RGB des deux scènes considérées.

4.3.2 Modèle Statistique

Dans le cadre de cette étude, nous approfondissons notre analyse en explorant le modèle statistique des vecteurs issus de chaque pixel des images de la scène 1 et 2. Il est important de rappeler que les images de la scène 1 et 2 ont été soumises à une transformation en ondelette, comme mentionné précédemment dans notre introduction (1.3). Cette transformation a permis d'étendre la représentation de chaque pixel, passant d'une dimension de $M = 3$ canaux de polarisation à une dimension plus élevée de $M = C_\theta \times C_f \times 3 = 2 \times 2 \times 3 = 12$ (cf. Chapitre 1, 1.3.3). Cela signifie que chaque pixel est maintenant caractérisé par un vecteur de plus grande dimension. Cette approche offre une perspective plus complète pour capturer les nuances des structures urbaines et des propriétés radar dans l'évolution de la métropole. Nous entreprenons ensuite une étude approfondie des distributions par dimensions. Cette étape nous permet d'évaluer à quel point la distribution des données est proche d'un modèle gaussien.

Pour mener à bien cette étude, nous procédons tout d'abord à une analyse de la distribution des composantes réelles, notées \mathcal{R} , et imaginaires, notées \mathcal{I} , dans chaque dimension de la Scène 1. Nous les confrontons à une distribution gaussienne empirique afin d'évaluer leur adéquation à ce modèle. Ensuite, nous reproduisons cette approche pour la Scène 2.

Afin de rester en phase avec la définition du modèle (2.7), nous désignons les vecteurs de dimensions $(1 \times M)$ qui incarnent chaque pixel de l'image par le symbole \mathbf{y} . Notre approche consiste à étudier les histogrammes des composantes y_i , où i varie de 1 à M , couvrant ainsi chaque dimension des pixels de l'image. Les histogrammes obtenus pour chaque dimension sont exposés dans les Figures 4.6, 4.A.1, 4.A.2, 4.A.3, 4.7, 4.A.4, 4.A.5 et 4.A.6. Dans ces figures nous prenons en compte deux distributions gaussiennes distinctes pour les

parties réelles et imaginaires de y_i . Ainsi, nous considérons que les parties réelles suivent une distribution gaussienne $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, tandis que les parties imaginaires suivent une distribution gaussienne $\mathcal{N}(m'_i, \sigma_i'^2)$. Ces caractéristiques spécifiques à chaque dimension couvrent l'ensemble des dimensions $i = 1$ à M . De plus, pour faciliter une meilleure évaluation visuelle, nous traçons en vert les bornes empiriques à $\pm 3\sigma$ ainsi que la moyenne empirique en rouge dans les graphiques. On présente une figure pour la scène 1 ainsi qu'une autre pour la scène 2, tandis que les autres figures sont incluses en annexe (4.A).

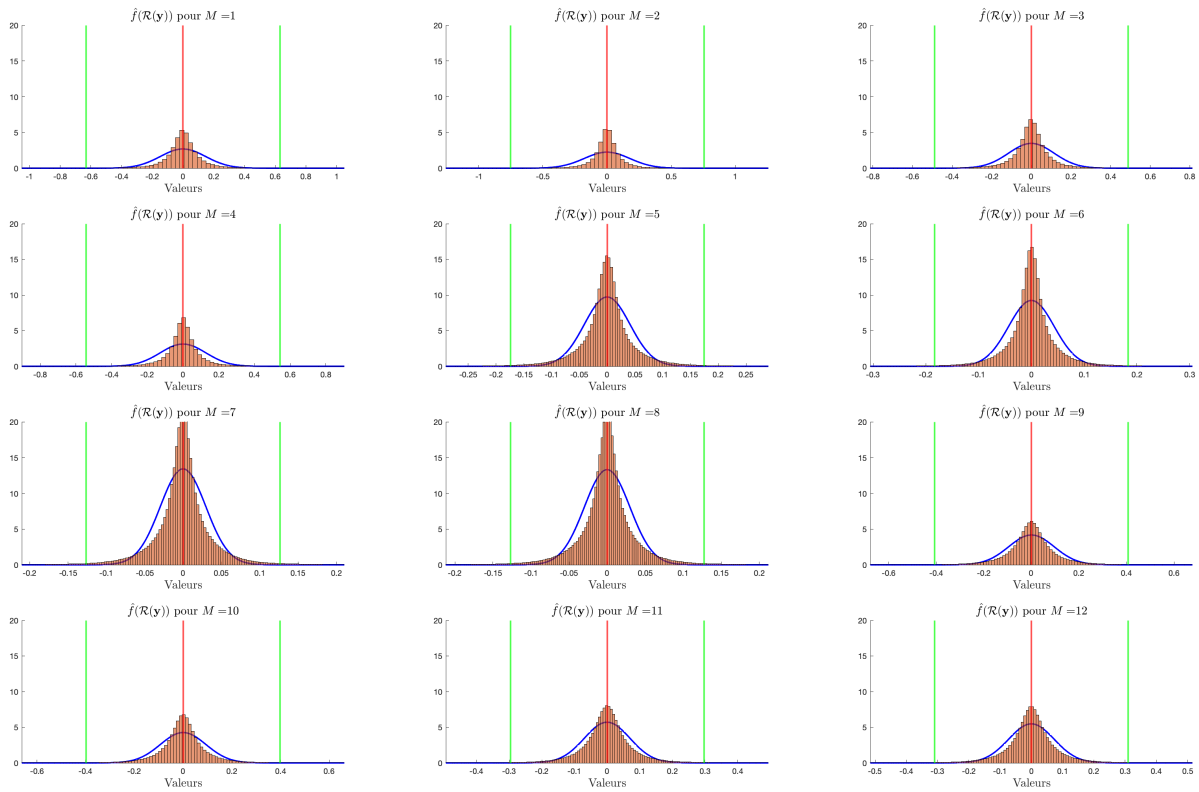


FIGURE 4.6 – Scène 1 : Lois de probabilité estimées pour la composante réelle de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 1$ et distribution empirique associée

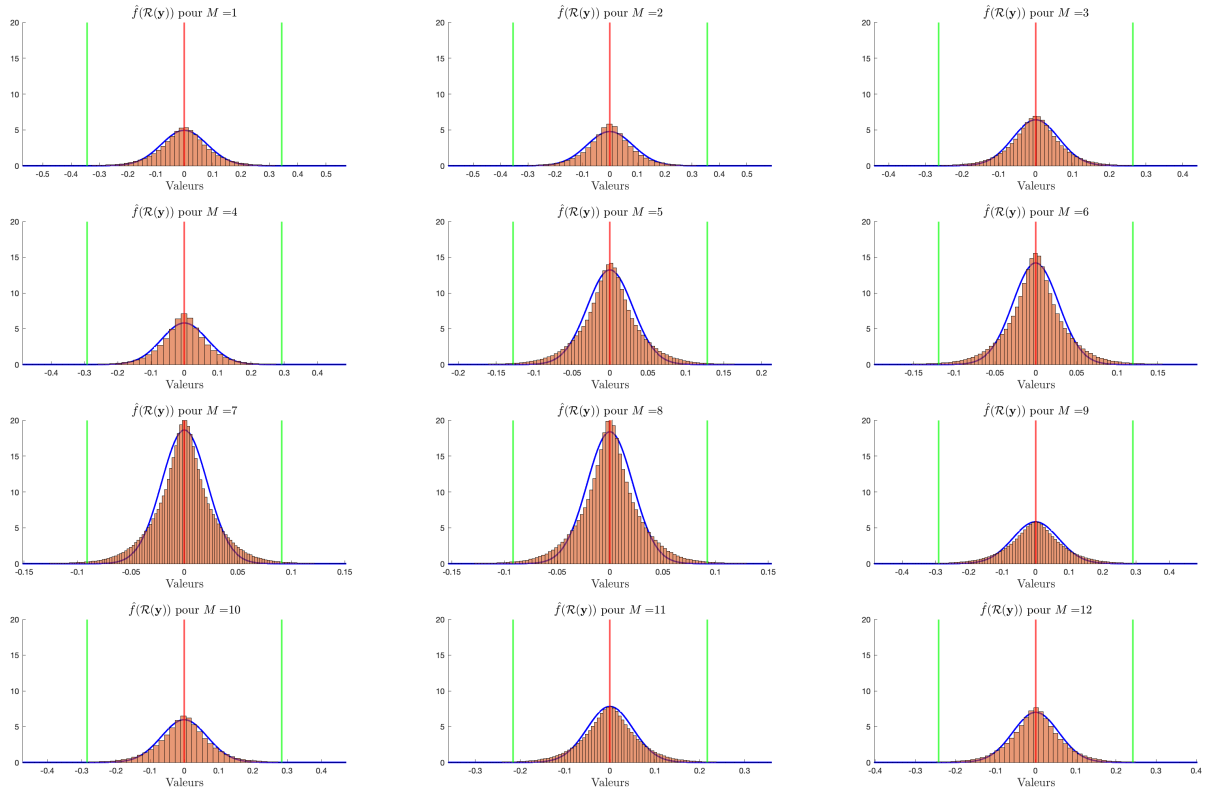


FIGURE 4.7 – Scène 2 : Lois de probabilité estimées pour la composante réelle de chaque dimension de tous les pixels de l’image à $\ell = 1$ et distribution empirique associée

Au vu des résultats obtenus par simulation, il est essentiel de discerner les différences entre les deux scènes. Pour la scène 1, les Figures 4.6, 4.A.1, 4.A.2, 4.A.3 révèlent un écart par rapport au modèle gaussien, à travers la forme de la distribution ainsi que sa variance. En effet, bien que les moyennes soient toutes égales ou proches de 0, l’allure de la distribution gaussienne n’est pas complètement vérifiée. Il est pertinent de noter que des travaux antérieurs ([112], [113], [114], [31]) ont souligné cette caractéristique et ont établi un lien entre la distribution et une gaussienne elliptique dans certaines images *SAR*. En revanche, en ce qui concerne la scène 2 (Figures 4.7, 4.A.4, 4.A.5 et 4.A.6), la distribution, pour une majorité des dimensions, s’aligne davantage avec le modèle choisi, renforçant ainsi l’hypothèse initiale. Cette diversité nous offre donc l’opportunité d’évaluer la robustesse de notre statistique de test $T(\epsilon)$ par rapport au modèle.

4.3.3 Simulations sur données *SAR*

4.3.3.1 Vérité terrain

Pour évaluer la performance des statistiques de test appliquées aux données *SAR*, notre étude repose sur une approche basée sur des vérités terrain. En comparant les sorties des statistiques de test avec ces dernières, nous sommes en mesure d’évaluer la fiabilité et l’exactitude des méthodes pour la détection des changements urbains. Cette démarche vise à fournir des éléments essentiels pour orienter l’application future de notre statistique de test dans le domaine de l’analyse des images *SAR* et à contribuer à une meilleure compréhension des caractéristiques évolutives des environnements urbains. Cependant, il est important de noter que les vérités terrain fournies par [115], que nous représentons dans la Figure 4.8, présentent des imprécisions.

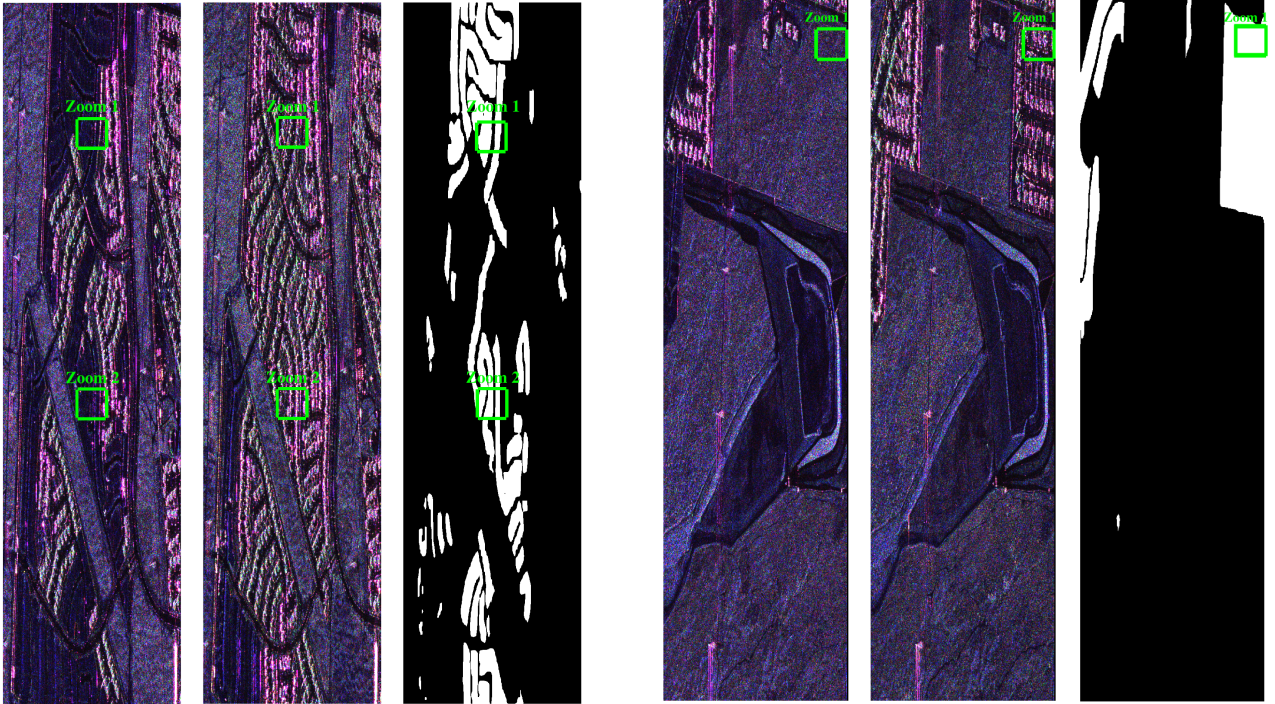


FIGURE 4.8 – Gauche : scène 1, (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$ et (droite) vérité terrain ; Droite : scène 2, (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$ et (droite) vérité terrain

Ces vérités terrain, où le changement apparaît en blanc (1), ont été élaborées manuellement à partir de données issues de *Google Earth* ([115]). Bien que ces sources fournissent des informations précieuses, elles peuvent également comporter des erreurs ou des limitations inhérentes à la nature des données de télédétection optique. Il est important de les prendre en compte lors de l'évaluation de nos résultats par rapport à ces références au sol, et d'envisager d'autres méthodes de validation pour garantir la justesse de nos conclusions. En analysant de plus près les vérités terrain, on peut souligner que l'évaluation des changements est sujette à des approximations significatives. Ce constat se vérifie plus facilement dans les Figures 4.9 et 4.10, où l'on peut observer ces approximations à travers des zooms sur la vérité terrain de la scène 1.

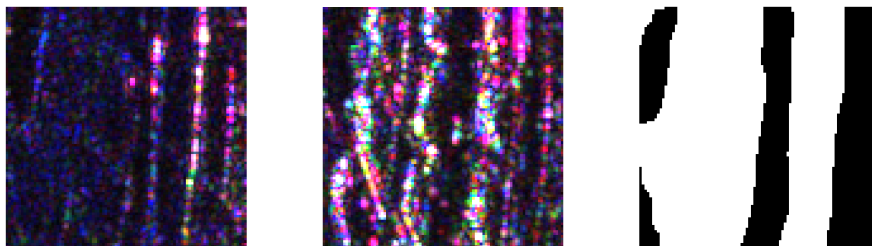


FIGURE 4.9 – Zoom 1 sur la vérité terrain de la scène 1 : (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$, (droite) vérité terrain

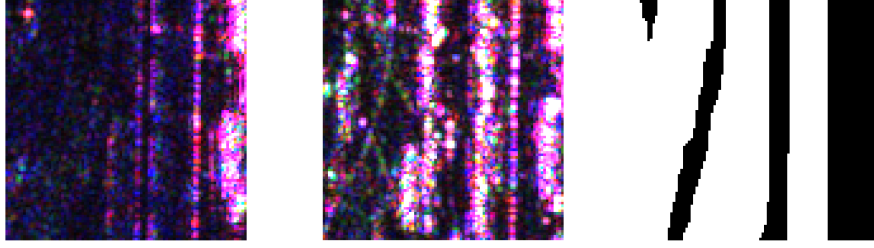


FIGURE 4.10 – Zoom 2 sur la vérité terrain de la scène 1 : (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$, (droite) vérité terrain

De manière similaire, lorsqu'on considère la scène 2, il apparaît que les régions de changement sont déterminées trop grossièrement.

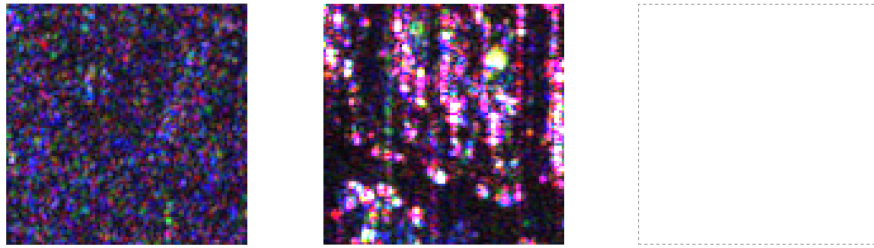


FIGURE 4.11 – Zoom 1 sur la vérité terrain de la scène 2 : (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$, (droite) vérité terrain

Ces erreurs dans la vérité terrain peuvent avoir un impact significatif sur les performances des statistiques de test. Pour pallier ces limitations et améliorer la fiabilité de nos conclusions, nous proposons de créer une nouvelle vérité terrain plus précise.

4.3.3.2 Proposition d'une nouvelle vérité terrain

Nous proposons de nous appuyer sur la décomposition de *Pauli* et d'exploiter les informations qu'elle peut nous fournir. Dans le paragraphe qui suit nous présentons une approche basique ayant pour objectif d'améliorer la vérité terrain.

Méthode : *SPAN*. Cette méthode repose sur une valeur bien connue, le "Span", qui représente une puissance totale de diffusion ([105], [116]) :

$$Span = \mathbf{k}\mathbf{k}^* = |S_{HH}|^2 + |S_{VV}|^2 + 2|S_{HV}|^2.$$

En utilisant cette définition du *Span*, on peut obtenir une nouvelle représentation du *RGB* Pauli comme suit :

$$(R) : |S_{HH}|^2, (G) : 2|S_{HV}|^2, (B) : |S_{VV}|^2.$$

On obtient ainsi une nouvelle et meilleure visualisation de la puissance des rétro-diffuseurs. Nous affichons en Figure 4.12 les scènes 1 et 2 avec le *Span*.

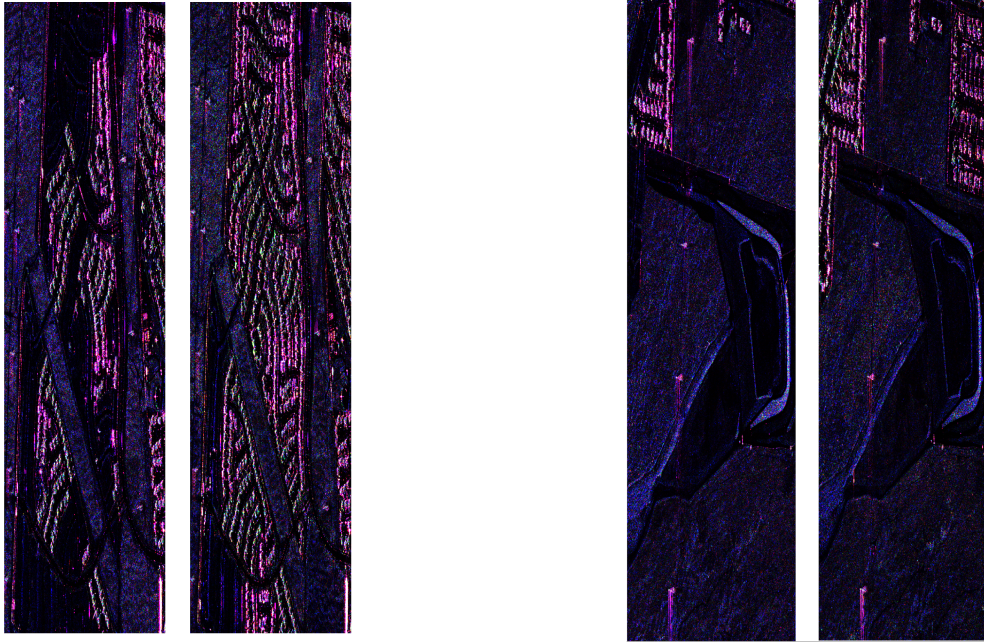


FIGURE 4.12 – Gauche : scène 1, 23 Avril 2009 (gauche), 15 Mai 2011 (droite), (600×2360) pixels ; Droite : scène 2 : 23 Avril 2009 (gauche), 15 Mai 2011 (droite), (600 × 2300) pixels

Nous allons ensuite procéder au traitement comme présenté en Figure 4.13.

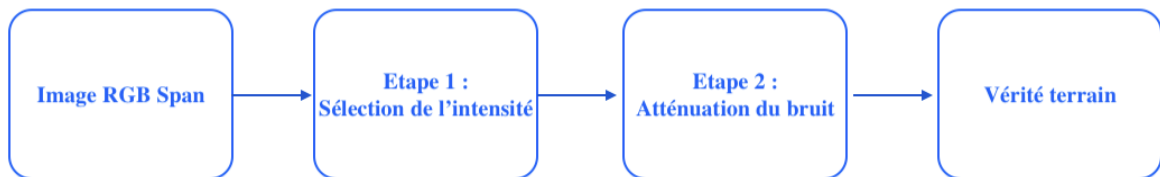


FIGURE 4.13 – Détails de l'approche choisie

Étape 1. En utilisant les canaux RGB , les composantes des images sont comparées entre le temps $\ell = 1$ et le temps $\ell = 2$ selon l'équation suivante :

$$abs \left(\underbrace{\frac{(R_2 + G_2 + B_2)}{\max((R_2 + G_2 + B_2))}}_{I_2} - \underbrace{\frac{(R_1 + G_1 + B_1)}{\max((R_1 + G_1 + B_1))}}_{I_1} \right) > \beta$$

où R_i , G_i , B_i représentent respectivement la couleur rouge, verte, bleue pour l'image i . La division par le maximum vise à obtenir une représentation en nuances de gris, comme illustré dans la Figure 4.14.

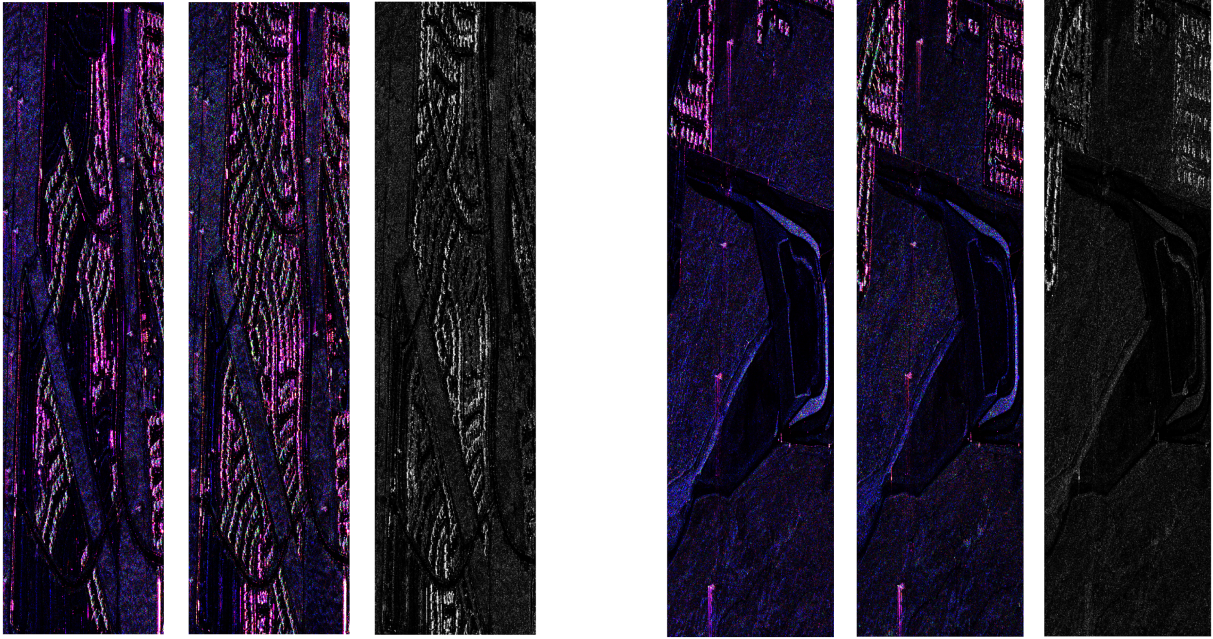


FIGURE 4.14 – Gauche : images résultantes de l'étape 1 pour la scène 1, (gauche) I_1 , (milieu) I_2 et (droite) $I_2 - I_1$; Droite : images résultantes de l'étape 1 pour la scène 2, (gauche) I_1 , (milieu) I_2 et (droite) $I_2 - I_1$

On définit ensuite un seuil, ici $\beta = 0.2$ ce qui correspond à un changement avec un écart à 20% entre l'image $\ell = 1$ et $\ell = 2$. Figures 4.15.

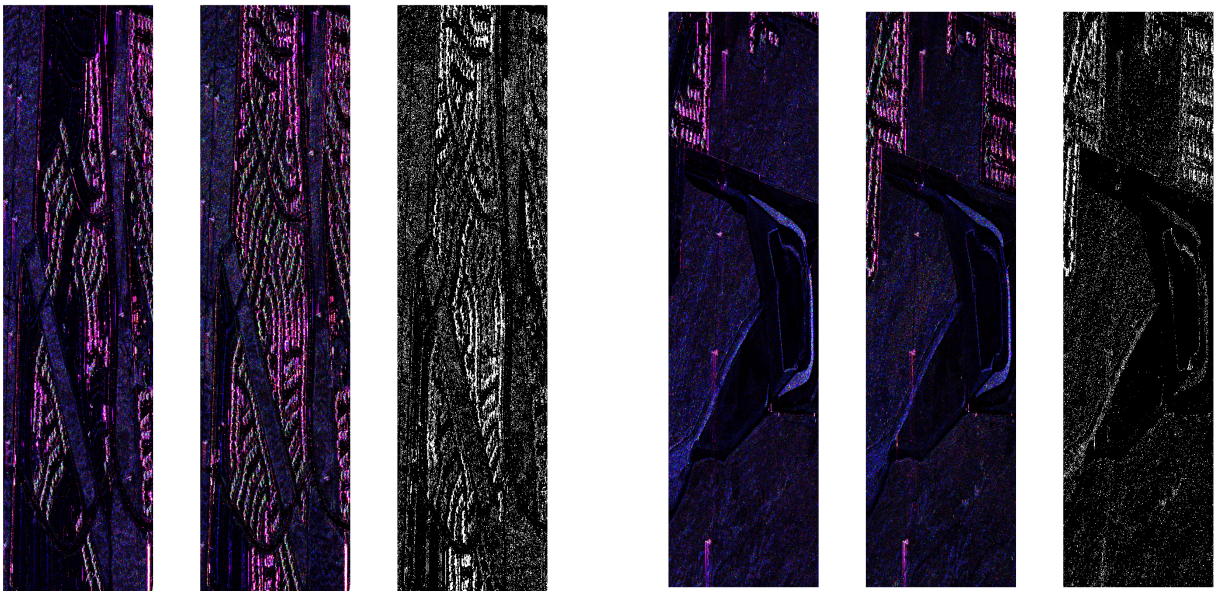


FIGURE 4.15 – Gauche : images résultantes de l'étape 2 pour la scène 1, (gauche) I_1 , (milieu) I_2 et (droite) $I_2 - I_1$; Droite : images résultantes de l'étape 2 pour la scène 2, (gauche) I_1 , (milieu) I_2 et (droite) $I_2 - I_1$

Étape 2. Il est important de constater que parmi les résultats obtenus à partir de cette méthode, la vérité terrain présente des imperfections, notamment au niveau des zones sans changements. Pour remédier à ces défauts, nous appliquons tout d'abord un filtre moyenneur de taille (3×3) afin d'éliminer le bruit poivre et sel mais également dans

la partie signal, cela permet d'affiner les zones de changements et de ne pas avoir de pixels isolés. Puis une fois le filtrage appliqué nous mettons en place un masque pour ne sélectionner que les zones de changements avérées. On obtient ainsi, par le biais de cette méthode empirique, les vérités terrain présentées en Figure 4.16 :

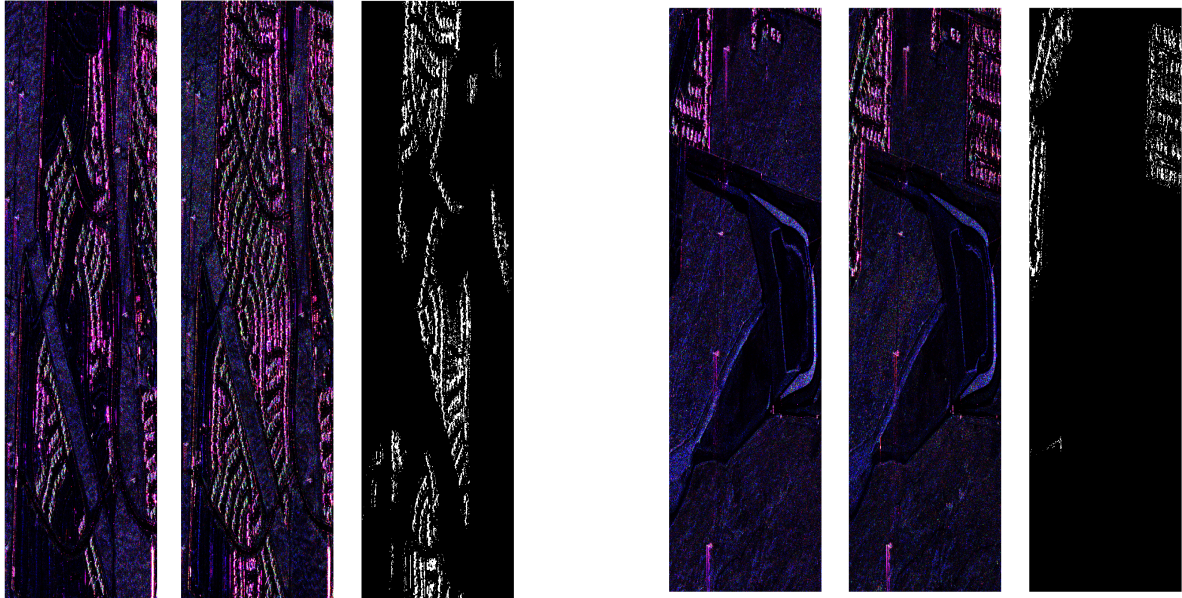


FIGURE 4.16 – Gauche : scène 1, (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$ et (droite) vérité terrain ; Droite : scène 2, (gauche) $\ell = 1$, (milieu) $\ell = 2$ et (droite) vérité terrain

Pour mettre en évidence les différences avec l'ancienne vérité terrain, nous examinons à nouveau les zones de test qui sont illustrées dans les Figures 4.17, 4.18 et 4.19.

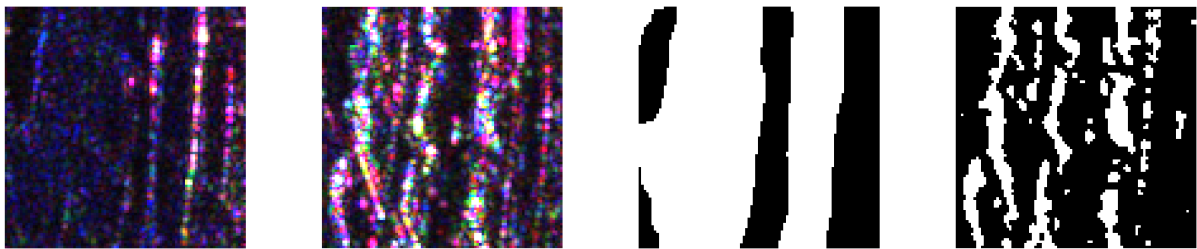


FIGURE 4.17 – Zoom 1 sur la vérité terrain de la scène 1 : (gauche) $\ell = 1$, (milieu gauche) $\ell = 2$, (milieu droite) ancienne vérité terrain (droite) Méthode Span

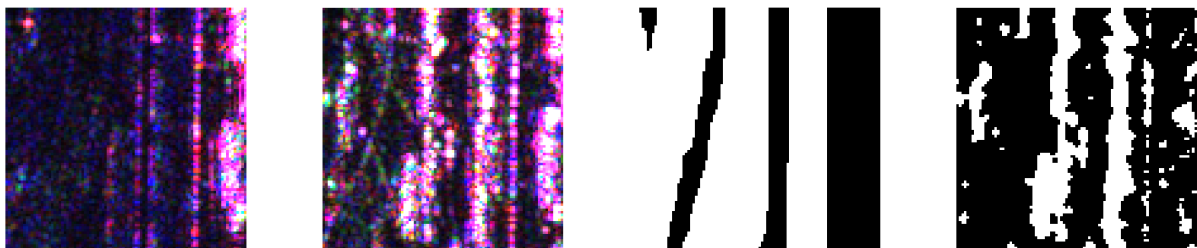


FIGURE 4.18 – Zoom 2 sur la vérité terrain de la scène 1 : (gauche) $\ell = 1$, (milieu gauche) $\ell = 2$, (milieu droite) ancienne vérité terrain (droite) Méthode Span

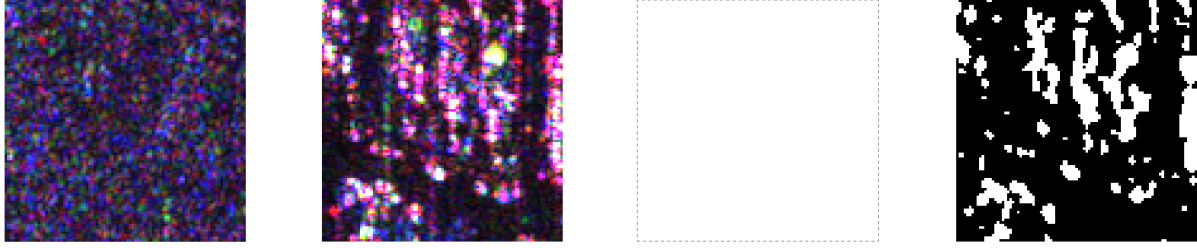


FIGURE 4.19 – Zoom 1 sur la vérité terrain de la scène 2 : (gauche) $\ell = 1$, (milieu gauche) $\ell = 2$, (milieu droite) ancienne vérité terrain (droite) Méthode Span

En observant attentivement les Figures 4.17, 4.18 et 4.18, on peut discerner une nette amélioration de la résolution de la vérité terrain. Cependant, il convient de souligner que certaines imperfections persistent. Pour une meilleure visualisation de la comparaison avec l’ancienne vérité terrain, le tableau 4.1 expose les pourcentages de pixels identifiés comme positifs (donc changements) pour chacune des versions de vérité terrain.

Scène 1		Scène 2	
Vérité terrain	Pixels positifs	Vérité terrain	Pixels positifs
Ancienne	15.9 %	Ancienne	9.9 %
Méthode Span	6.1 %	Méthode Span	2.4 %

TABLE 4.1 – Pourcentages de pixels positifs pour les différentes versions de vérité terrain

Il est intéressant de voir ici que la différence dans le nombre de pixels identifiés comme des changements est d’environ un ratio de 1 pour 3 entre la nouvelle vérité terrain et l’ancienne. Cet impact est non négligeable en vue d’évaluer le plus précisément possible les performances des statistiques.

Il convient de noter en dernier lieu que l’approche que nous avons adoptée ne repose pas sur une formalisation mathématique. Cependant, en utilisant les informations a priori fournies par les zones préalablement identifiées comme ayant subi des changements, elle a joué un rôle essentiel dans l’amélioration de la vérité terrain. Par conséquent, elle a renforcé notre confiance dans la fiabilité des étapes ultérieures de nos expérimentations.

4.3.4 Courbes *ROC*

4.3.4.1 Introduction

Algorithme. A l’instar de l’analyse menée sur des données simulées, nous allons évaluer les performances des statistiques de test pour la détection de changements en utilisant des courbes *ROC*. La démarche appliquée est détaillée ci-après.

- Première étape : construction des matrices de covariances $\hat{\mathbf{R}}_\ell$ et $\hat{\mathbf{R}}$ à partir des vecteurs de données récupérés dans une fenêtre glissante qui parcourt les pixels de l’image comme illustré en Figure 4.20.

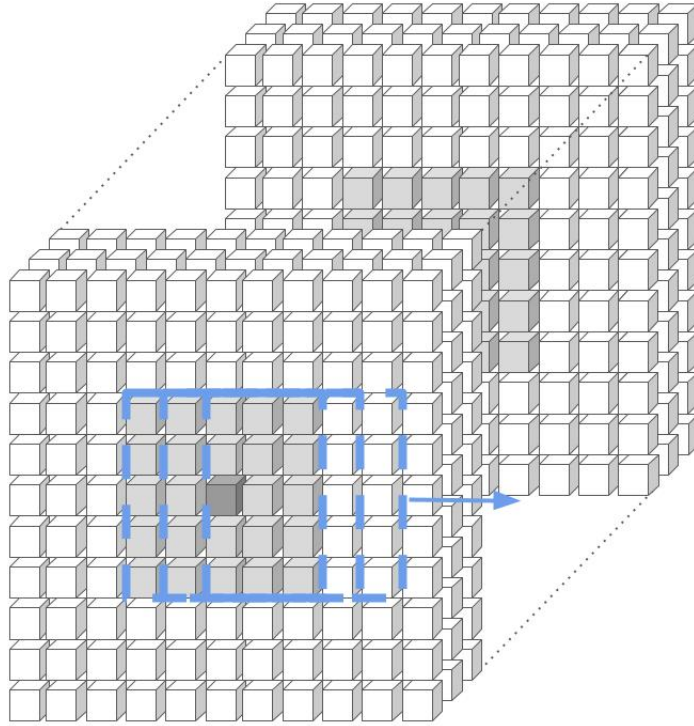


FIGURE 4.20 – Illustration de la fenêtre coulissante utilisée dans l’algorithme

Ainsi, pour chaque pixel, nous construisons une matrice de covariance basée sur une fenêtre de taille N_ℓ pixels centrée sur le pixel d’intérêt. Il est important de noter que N_ℓ doit être choisi comme un carré impair, et les pixels situés sur les bords de l’image, dans une région de largeur $\left(\frac{\sqrt{N_\ell-1}}{2}\right)$, ne peuvent pas être utilisés pour la construction des matrices de covariance en raison de l’impossibilité de former des fenêtres complètes.

- Deuxième étape : une fois ces matrices de covariances obtenues pour chaque pixel et chacune des images, on effectue le calcul des statistiques de test.
- Troisième étape : une fois les valeurs des statistiques de test calculées, on peut les comparer à la vérité terrain et décider s’il y a eu détection de changement ou non, ou s’il y a une fausse alarme. Pour ce faire, on considère tout d’abord la distribution des statistiques et les plages de valeurs prises par celles-ci. Une fois celle-ci obtenue (une pour chaque statistique), nous créons une variable, ici ϵ , qui va parcourir ce vecteur, et cette variable fera office de seuil.
- Quatrième étape : enfin, nous pouvons tracer la courbe *ROC* en traçant $PD(\epsilon)$ vs $PFA(\epsilon)$.

Dans les sections suivantes, nous présentons les résultats et procédons à une comparaison des performances statistiques.

4.3.4.2 Scène 1

Choix du rang. Pour calculer les statistiques de test, la première étape consiste à évaluer le rang des données. Une fois que toutes les matrices de covariances ont été calculées, nous extrayons les $M = 12$ valeurs propres de chacune d’elles et les rangeons par ordre croissant $\lambda_1(\hat{\mathbf{R}}_1) \geq \lambda_2(\hat{\mathbf{R}}_1) \geq \dots \geq \lambda_M(\hat{\mathbf{R}}_1)$. Cela nous permet d’obtenir les histogrammes représentés dans la Figure 4.21 pour toutes les k -èmes valeurs propres des matrices $\hat{\mathbf{R}}_1$.

Ensuite, nous répétons le même processus pour les valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_2$, comme illustré dans la Figure 4.22.

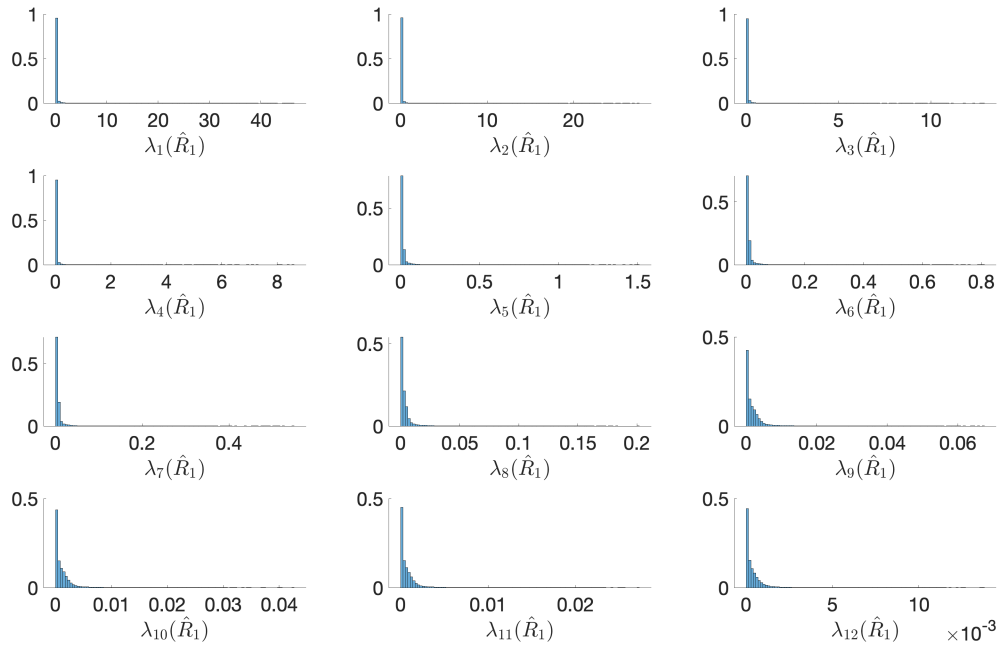


FIGURE 4.21 – Histogramme des valeurs propres des $\hat{\mathbf{R}}_1$ pour la scène 1

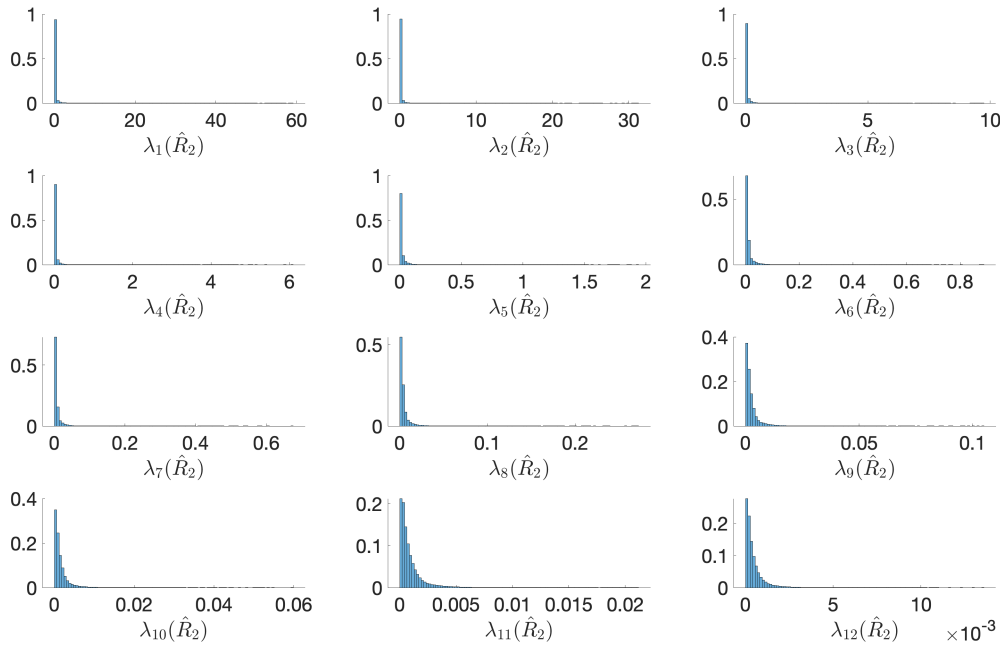


FIGURE 4.22 – Histogramme des valeurs propres des $\hat{\mathbf{R}}_2$ pour la scène 1

Grâce à ces figures, il est possible de constater une différence d'ordre de grandeur entre les valeurs propres. On propose dans les figures qui suivent de représenter la somme cumulative normalisée :

$$r_\ell(k) = \frac{\mathbb{E}[\sum_{i=1}^k \lambda_i(\hat{\mathbf{R}}_\ell)]}{\mathbb{E}[\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_\ell)]}.$$

où les espérances sont estimées par une moyenne sur tout les patches de l'image.

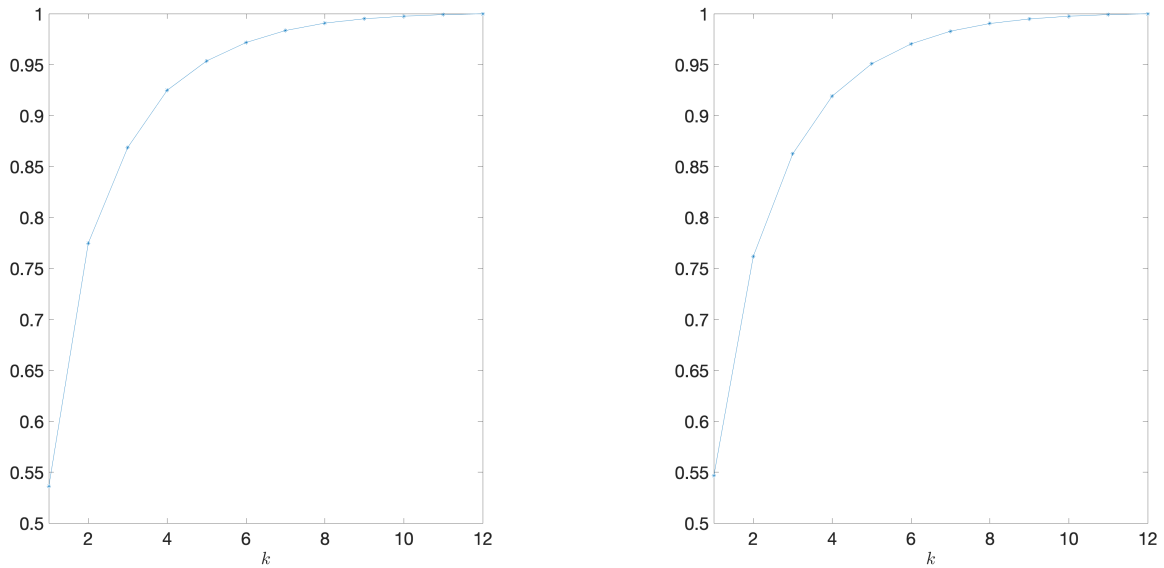


FIGURE 4.23 – Gauche : évolution du ratio $r_1(k)$; Droite : évolution du ratio $r_2(k)$

En s'appuyant sur ces figures, nous suggérons de choisir un rang $K = 5$ qui permet d'avoir un ratio $r_\ell(k)$ de 95%.

Simulations. En Figure 4.24 sont présentés les résultats obtenus pour la scène 1 pour $N_\ell = 49$, $K = 5$, $M = 12$ et $L = 2$.

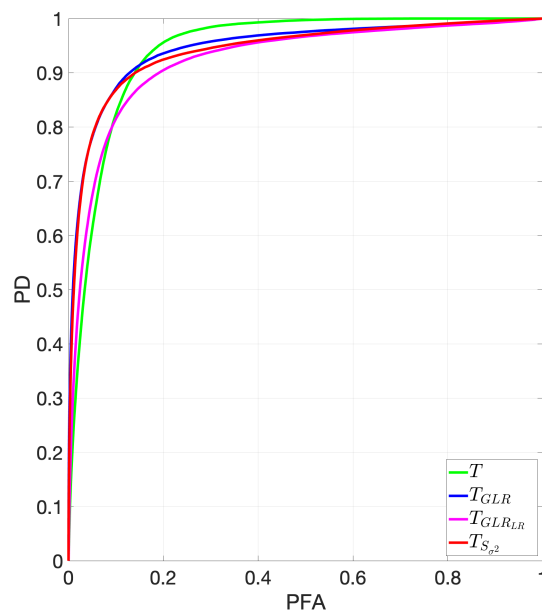


FIGURE 4.24 – Courbes *ROC* pour la scène 1 avec $N_\ell = 49$, $K = 5$, $M = 12$ et $L = 2$

Dans ces conditions, les performances des statistiques de test sont globalement comparables. Il est à noter un léger désavantage de la statistique $T(\epsilon)$ pour de faibles valeurs de *PFA* et au contraire une meilleure performance quand la *PFA* augmente.

4.3.4.3 Scène 2

Choix du rang. On souhaite de nouveau évaluer le rang des données de la scène 2 de la même manière que pour la scène 1. Nous obtenons ainsi les Figures 4.25 et 4.26.

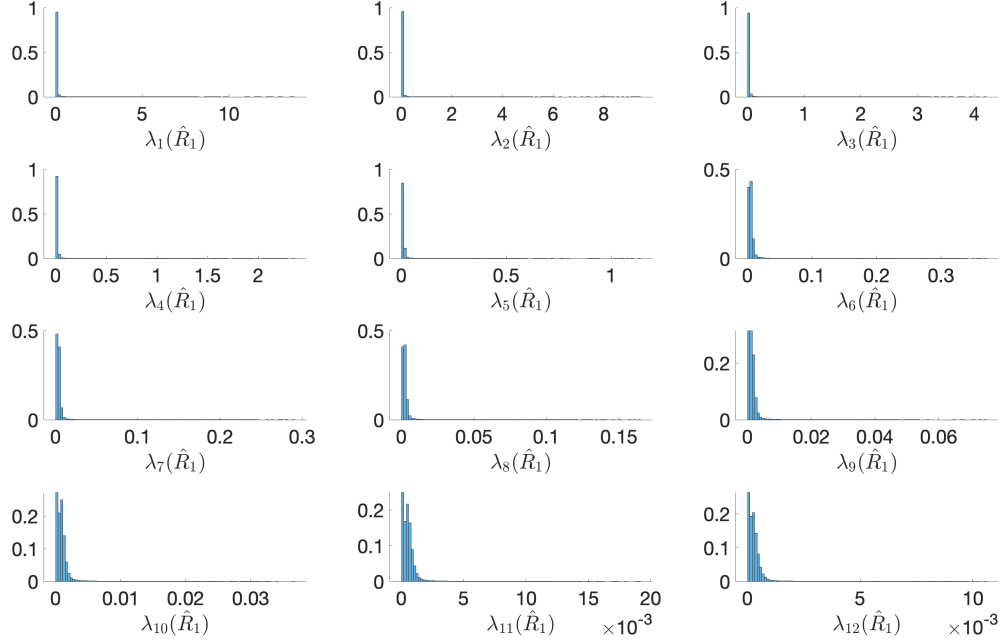


FIGURE 4.25 – Valeurs propres des $\hat{\mathbf{R}}_1$

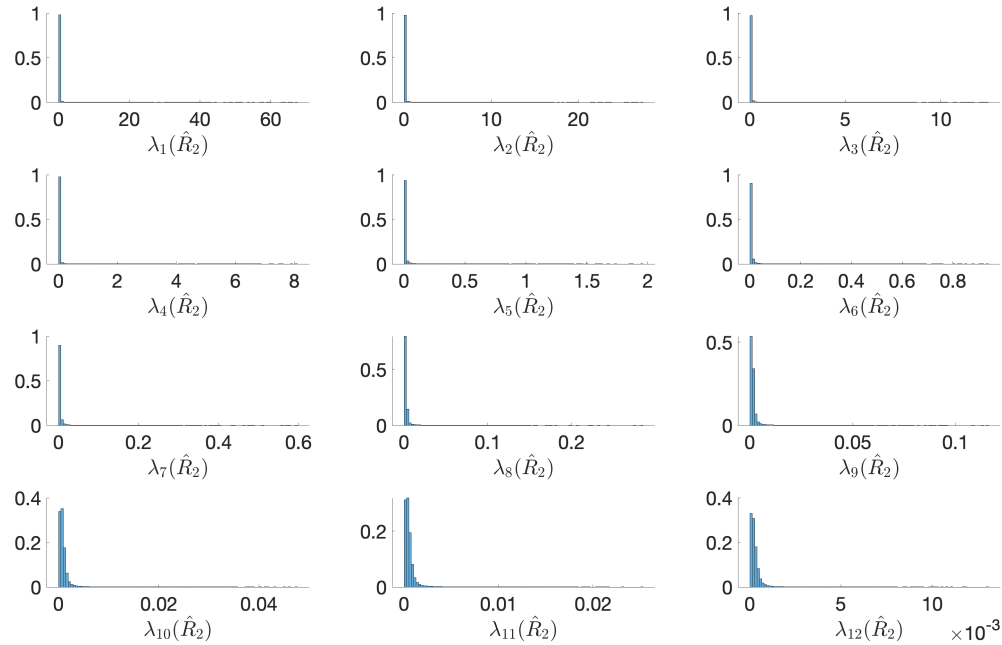


FIGURE 4.26 – Valeurs propres des $\hat{\mathbf{R}}_2$

Ici également, il est possible de constater une différence d'ordre de grandeur entre les valeurs propres. On propose dans les figures qui suivent de représenter la somme cumulative normalisée :

$$r_\ell(k) = \frac{\mathbb{E}[\sum_{i=1}^k \lambda_i(\hat{\mathbf{R}}_\ell)]}{\mathbb{E}[\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_\ell)]}.$$

où les espérances sont à nouveau estimées par une moyenne sur tout les patches de l'image.

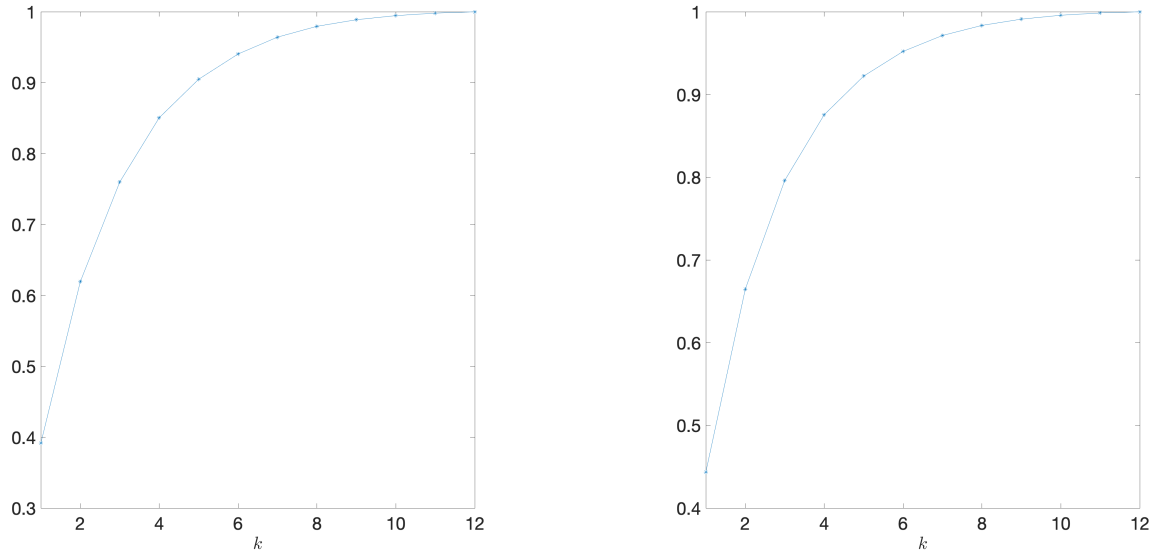


FIGURE 4.27 – Gauche : évolution du ratio $r_1(k)$; Droite : évolution du ratio $r_2(k)$

En s'appuyant sur ces figures, nous suggérons de également choisir un rang $K = 5$ qui permet d'avoir un ratio $r_\ell(k)$ d'environ 95%.

Simulations. On réitère les simulations de courbes *ROC* pour la scène 2 avec les mêmes paramètres $N_\ell = 49$, $K = 5$, $M = 12$ et $L = 2$.

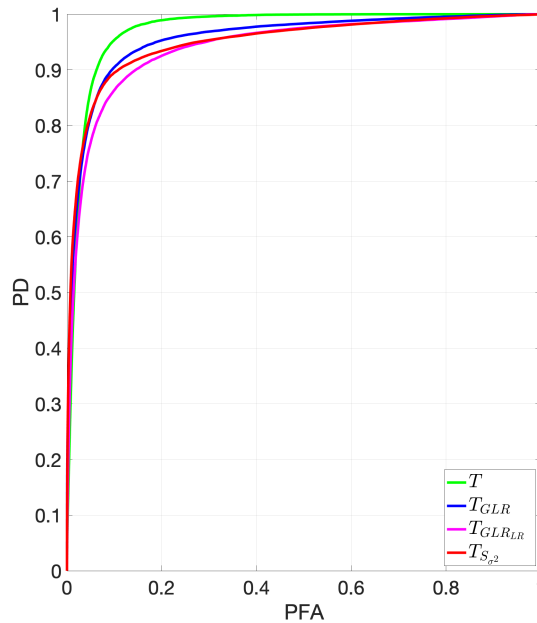


FIGURE 4.28 – Courbes *ROC* pour la scène 2 avec $N_\ell = 49$, $K = 5$, $M = 12$ et $L = 2$

On observe cette fois-ci de meilleures performances pour $T(\epsilon)$ avec une meilleur *PD* pour des valeurs *PFA* plus faibles.

Afin d'étudier sous un autre angle le comportement des statistiques, il est possible d'analyser ce que l'on appelle des "cartes de détections".

4.3.5 Cartes de détections

4.3.5.1 Scène 1

Cette section est dédiée à l'analyse de la scène 1. Pour évaluer la détection de changement, on présente ce que l'on appelle des "cartes de détection". Ces représentations sont essentiellement des mises en évidence des valeurs prises par une statistique de test pour chaque pixel de l'image. Cette visualisation constitue un outil intéressant pour examiner en détail les performances de détection, ainsi que pour mettre en évidence les avantages, les limites et les différences entre les différentes méthodes. Pour chaque statistique, on représente à gauche la carte de détection du log de la statistique et à droite l'histogramme associé où chaque pixel $p_{i,j}$ est re-normalisé tel que $\frac{\log(S_{i,j})}{\max(\log(S))}$, où S désigne la statistique. Le choix d'utiliser la fonction logarithmique vise à améliorer la séparation des valeurs des statistiques, ce qui facilite la comparaison. Enfin, la décision de normalisation des valeurs est destinée à rendre la figure de droite plus lisible.

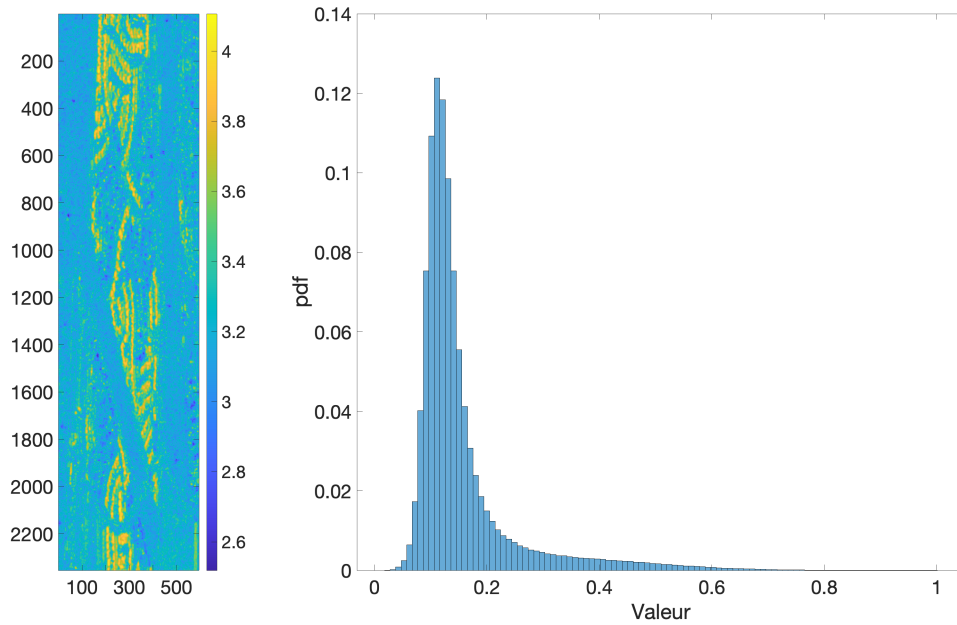


FIGURE 4.29 – Carte de détection issue du *GLR* et histogramme des valeurs prises par le *GLR*

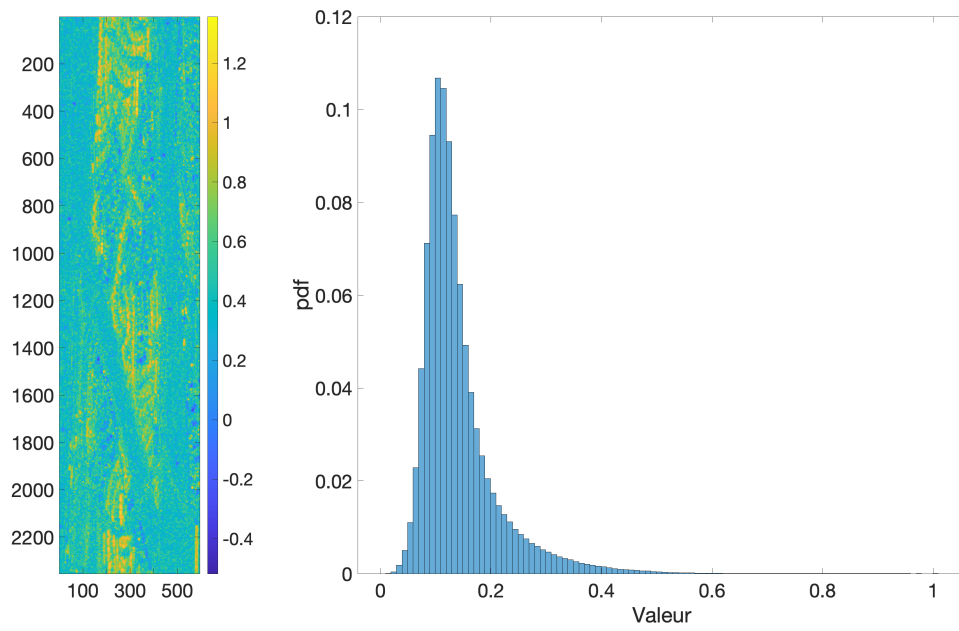


FIGURE 4.30 – Carte de détection issue du GLR_{LR} et histogramme des valeurs prises par le GLR_{LR}

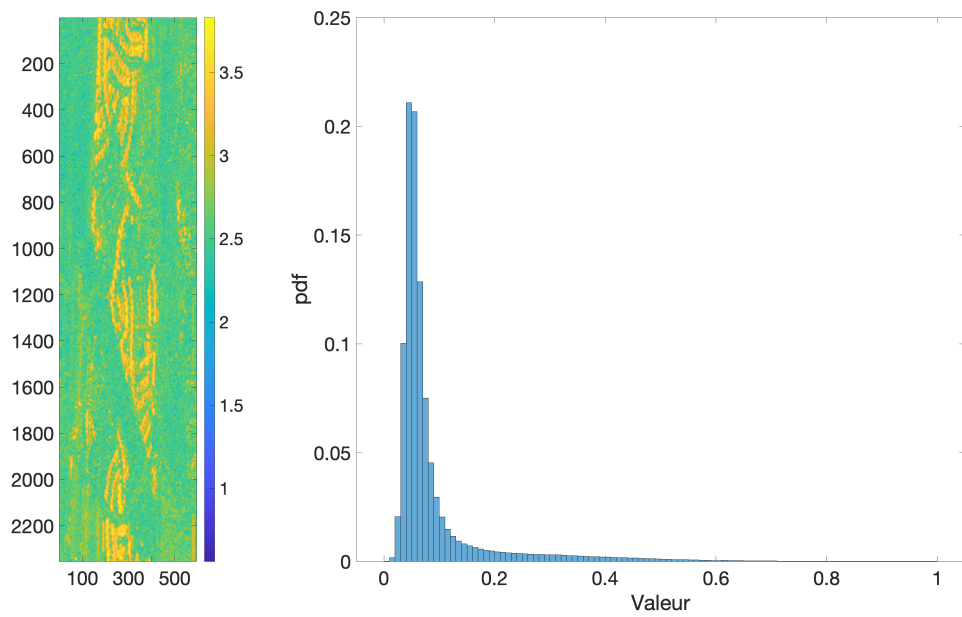


FIGURE 4.31 – Carte de détection issue du S_{σ^2} et histogramme des valeurs prises par S_{σ^2}

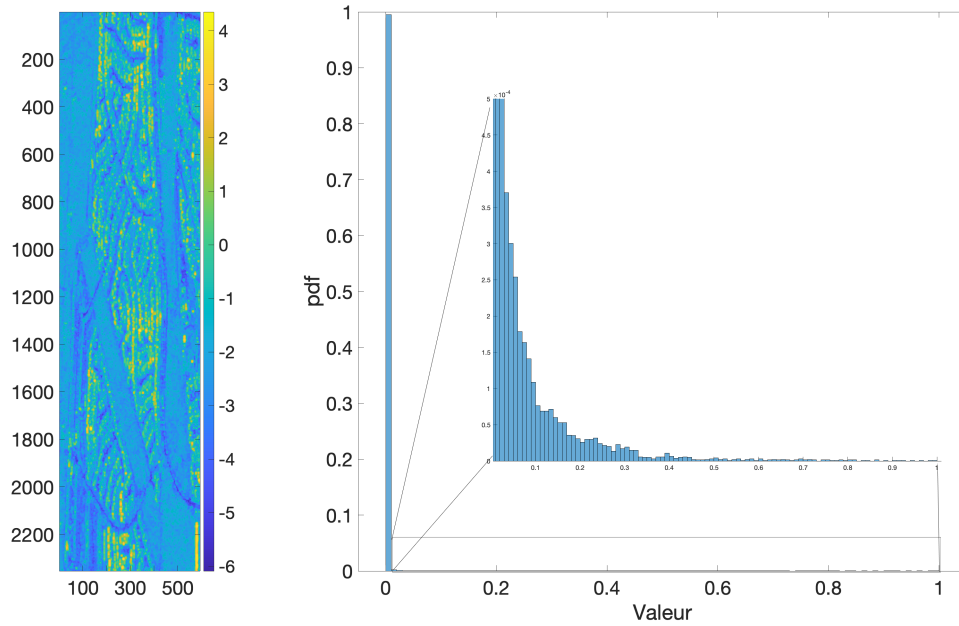


FIGURE 4.32 – Carte de détection issue du T_ϵ et histogramme des valeurs prises par T_ϵ

Ce qui suscite un intérêt particulier en examinant les Figures 4.29, 4.30, 4.31, et 4.32, c'est la distribution des valeurs qu'elles représentent. En effet, on peut remarquer que, à l'exception de $T(\epsilon)$, les distributions présentent une allure proche d'une loi *gamma* à queue lourde. Cette distribution met en avant un mélange des valeurs, rendant ainsi la distinction entre \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 potentiellement plus complexe. Cependant, il est crucial de souligner que la distribution de $T(\epsilon)$ se distingue notablement des autres. Elle présente une concentration significative autour de zéro, suivie de valeurs plus élevées.

4.3.5.2 Scène 2

Dans cette partie les mêmes simulations sont présentées mais cette fois-ci pour la scène 2.

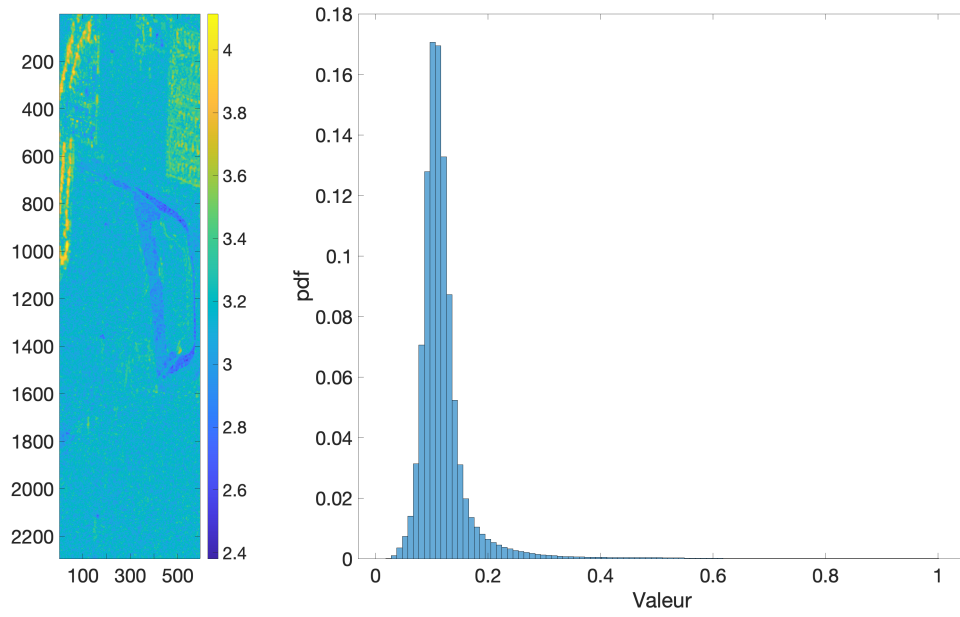


FIGURE 4.33 – Carte de détection issue du GLR et histogramme des valeurs prises par le GLR

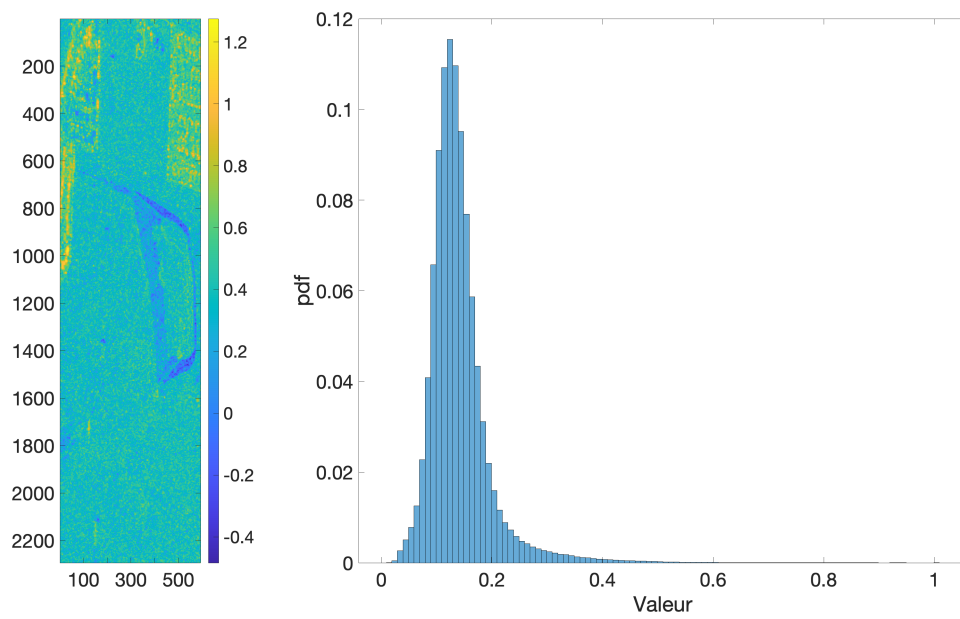


FIGURE 4.34 – Carte de détection issue du GLR_{LR} et histogramme des valeurs prises par le GLR_{LR}

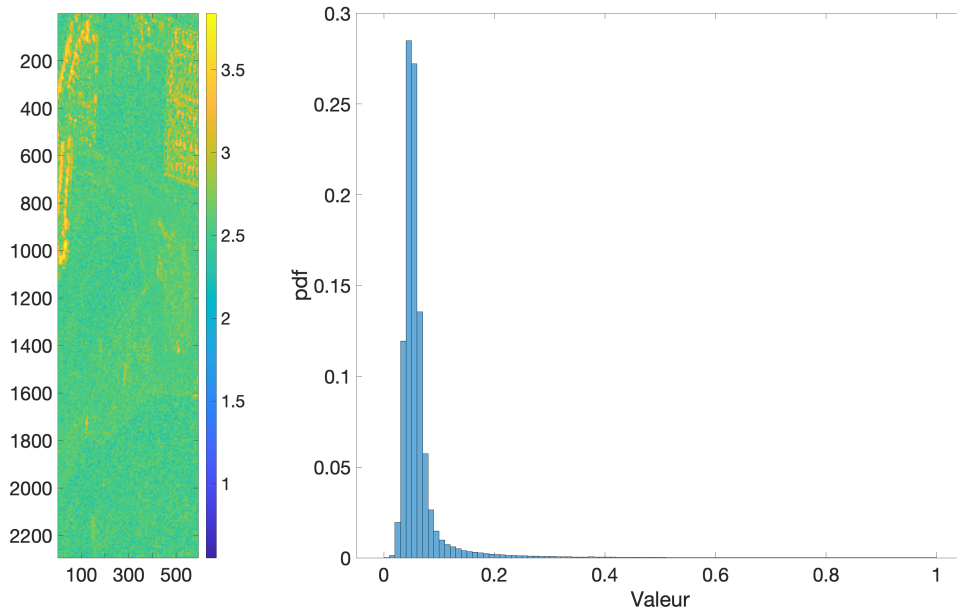


FIGURE 4.35 – Carte de détection issue du S_{σ^2} et histogramme des valeurs prises par S_{σ^2}

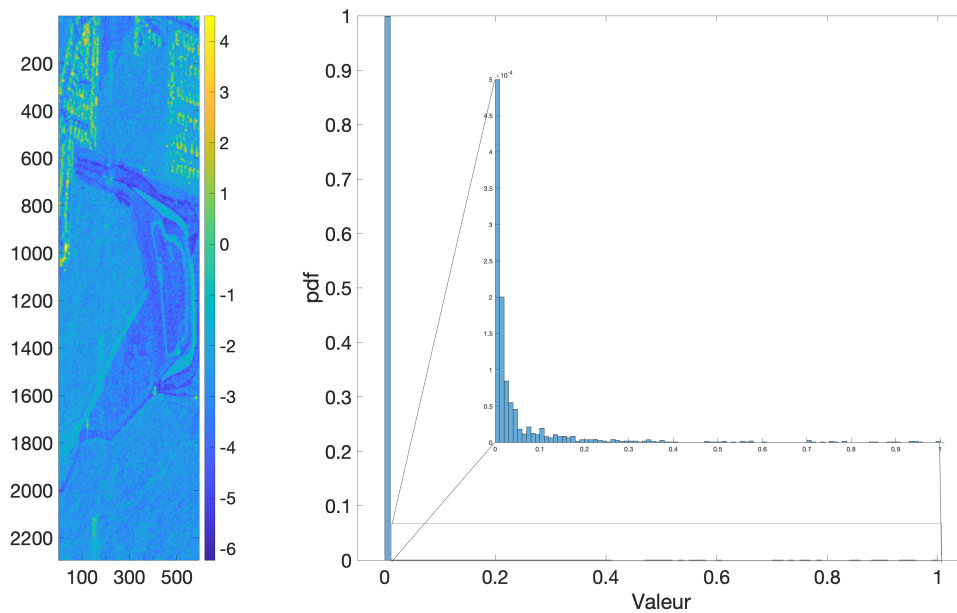


FIGURE 4.36 – Carte de détection issue du T_{ϵ} et histogramme des valeurs prises par T_{ϵ}

Le même schéma se reproduit avec une statistique de test $T(\epsilon)$ qui possède une des valeurs moins concentrées entre les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

4.3.6 Statistique de test $T(\epsilon)$

Dans cette section, nous mettons en évidence l'atout majeur de la statistique de test $T(\epsilon)$, qui repose sur notre connaissance de sa distribution sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 . Grâce à notre étude, nous sommes en mesure de calculer une estimation de cette distribution en utilisant les estimateurs de nos valeurs propres, comme cela a été détaillé dans le Chapitre 3. Dans un premier temps, nous évaluons cette estimation de la loi sous \mathcal{H}_0 en utilisant

les valeurs empiriques. Ensuite, nous appliquerons ces résultats pour générer une carte de détection basée exclusivement sur le calcul de la loi sous \mathcal{H}_0 .

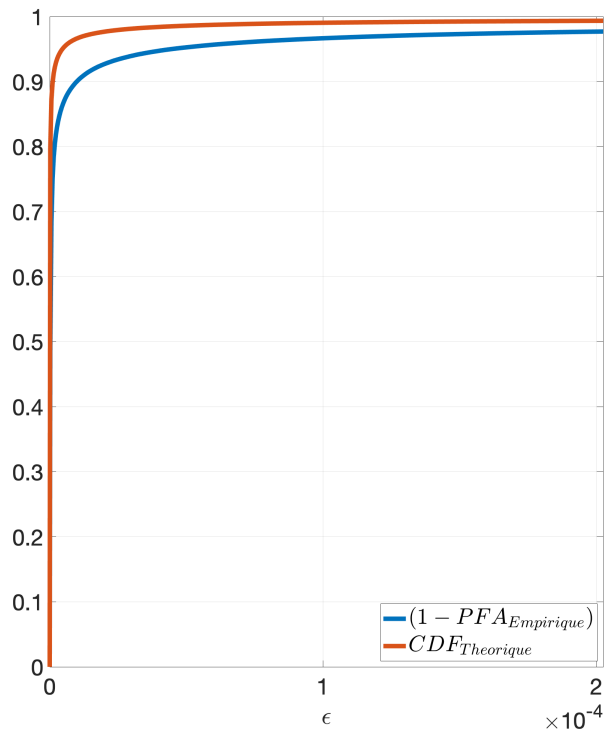


FIGURE 4.37 – Fonction de répartition sous \mathcal{H}_0 estimée à partir des résultats théoriques (rouge) et empirique (bleue) pour la scène 1, zoom sur $\epsilon \in [0; 10^{-4}]$

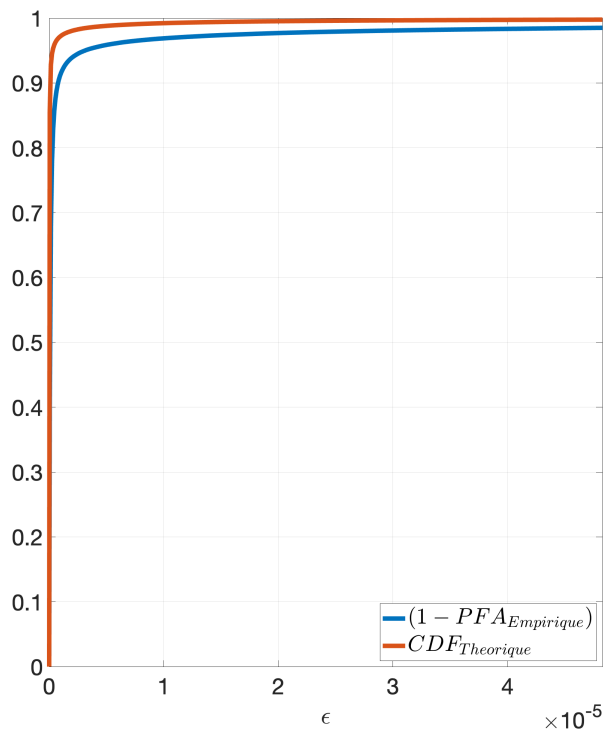


FIGURE 4.38 – Fonction de répartition sous \mathcal{H}_0 estimée à partir des résultats théoriques (rouge) et empirique (bleue) pour la scène 2, zoom sur $\epsilon \in [0; 10^{-5}]$

Nous pouvons observer ici, dans les Figures 4.37 et 4.38, que la CDF varie considérablement pour de faibles valeurs de seuil. Par exemple, pour atteindre une PFA de 5%, il faudrait, pour la scène 1, le seuil empirique $\epsilon = 3.8 \times 10^{-5}$ par rapport à un seuil théorique de $\epsilon = 4.7 \times 10^{-6}$, et pour la scène 2, le seuil empirique deviendrait $\epsilon = 3 \times 10^{-6}$ par rapport à un seuil théorique de $\epsilon = 2.8 \times 10^{-7}$. Il convient de souligner que les valeurs de la PFA empirique dépendent de la qualité de la vérité terrain utilisée. Par conséquent, toute imperfection dans la vérité terrain se répercute sur les résultats présentés ici. Enfin, dans les Figures 4.39 et 4.40, nous présentons les cartes de détection de $T(\epsilon)$ pour différentes valeurs de PFA, le tout contrôlé par l'estimation de la loi sous \mathcal{H}_0 .

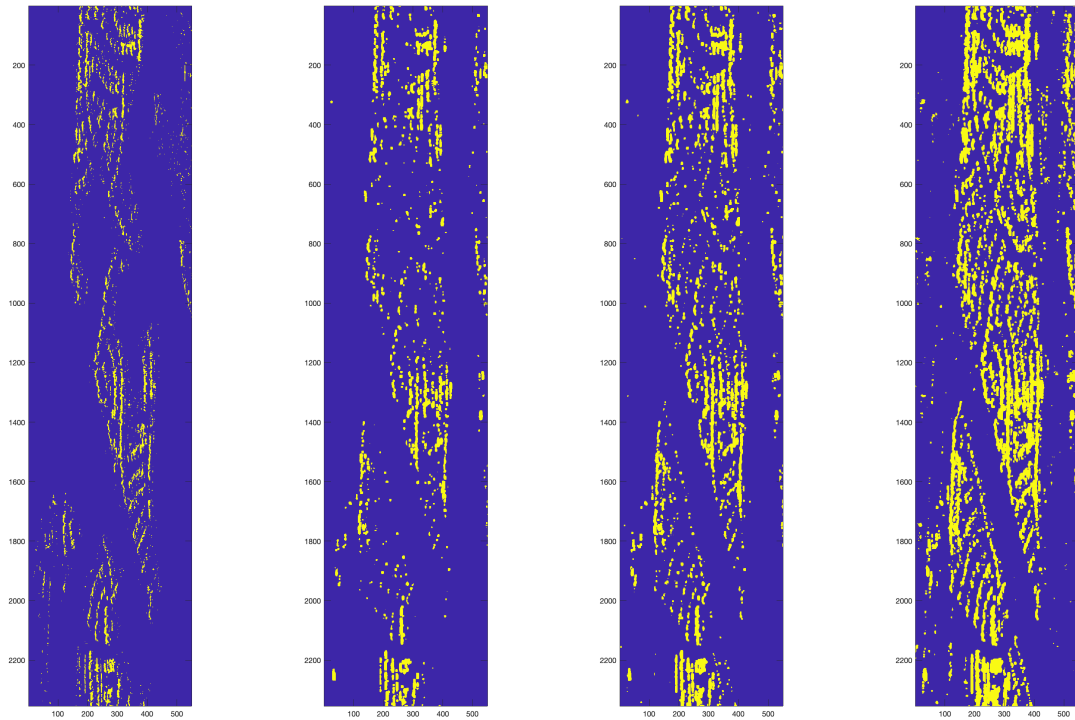


FIGURE 4.39 – Carte de détection pour la scène 1 pour $T(\epsilon)$ pour différente PFA, à gauche la vérité terrain puis dans l'ordre les carte de détection pour 1%, 2% et 5% de fausse alarme

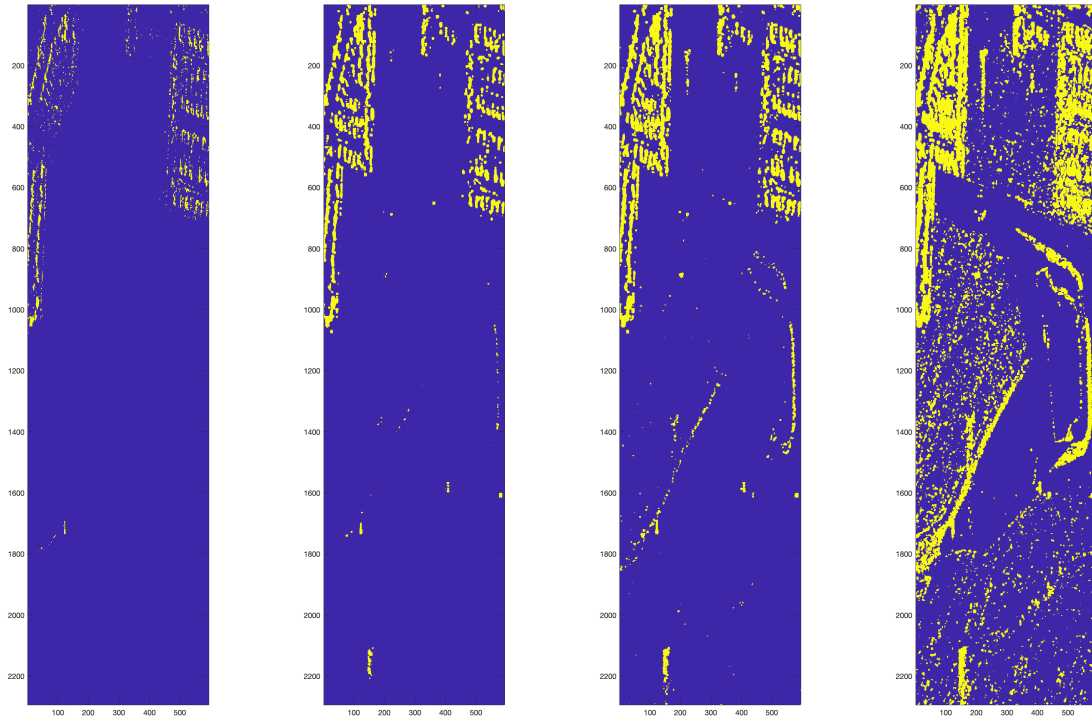


FIGURE 4.40 – Carte de détection pour la scène 2 pour $T(\epsilon)$ pour différente PFA, à gauche la vérité terrain puis dans l'ordre les carte de détection pour 1%, 2% et 5% de fausse alarme

Au vu des résultats fournis on peut noter que pour un taux de fausse alarme à 5% la statistique de test $T(\epsilon)$ semble fournir les changements dans leur globalité pour la scène 1 alors que pour la scène 2 la plupart des changements semble être obtenues pour un taux de fausse alarme à 1%.

Dans ce chapitre, nous avons confronté la statistique de test développée à des données réelles et l'avons comparée à d'autres tests. Il est apparu que malgré des données réelles qui ne vérifient pas le modèle gaussien et des dimensions modérées voire faibles, la statistique de test $T(\epsilon)$ présente des performances intéressantes par rapport à d'autres statistiques de tests utilisées dans la littérature. De plus, il est intéressant de noter que $T(\epsilon)$ possède une méthode de contrôle de PFA qui permet son utilisation sur des données réelles avec un support théorique assez fiable, même pour des dimensions faibles.

Annexes

Annexe 4.A Loi de probabilité estimées

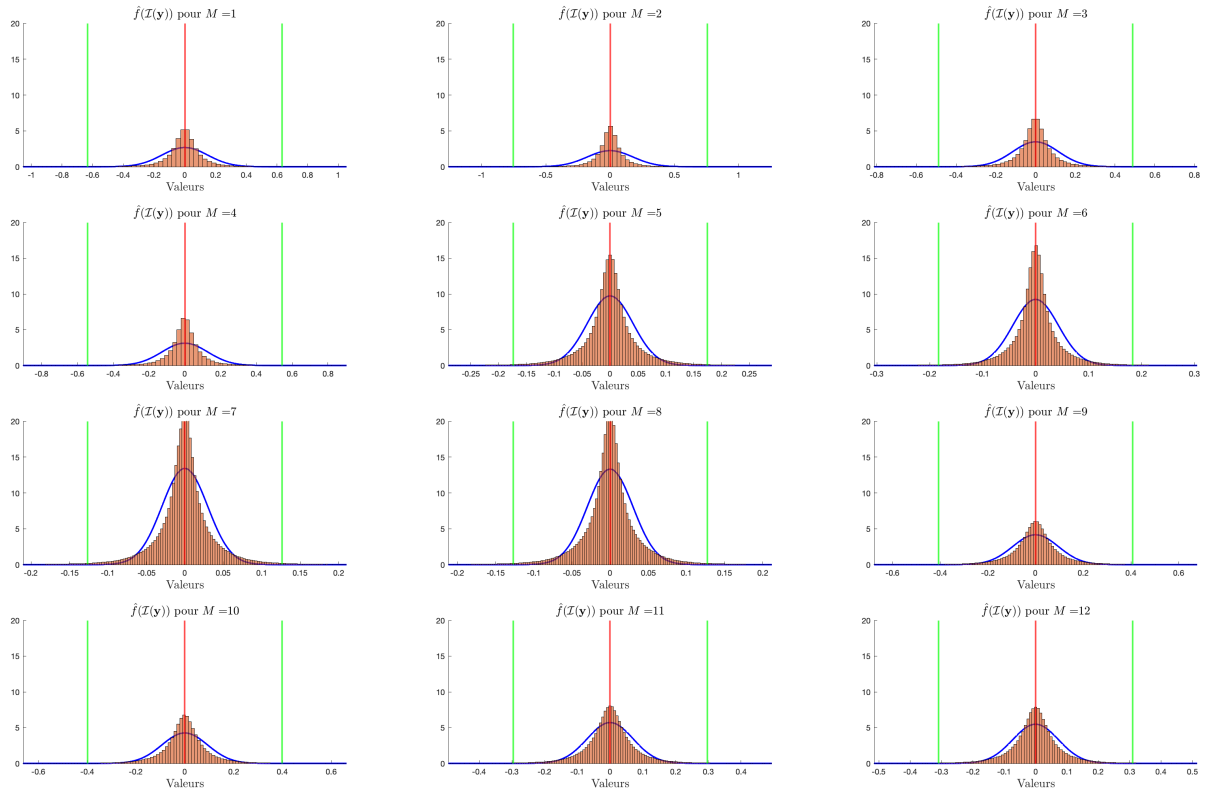


FIGURE 4.A.1 – Scène 1 : Lois de probabilité estimées pour la composante imaginaire de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 1$ et distribution empirique associée

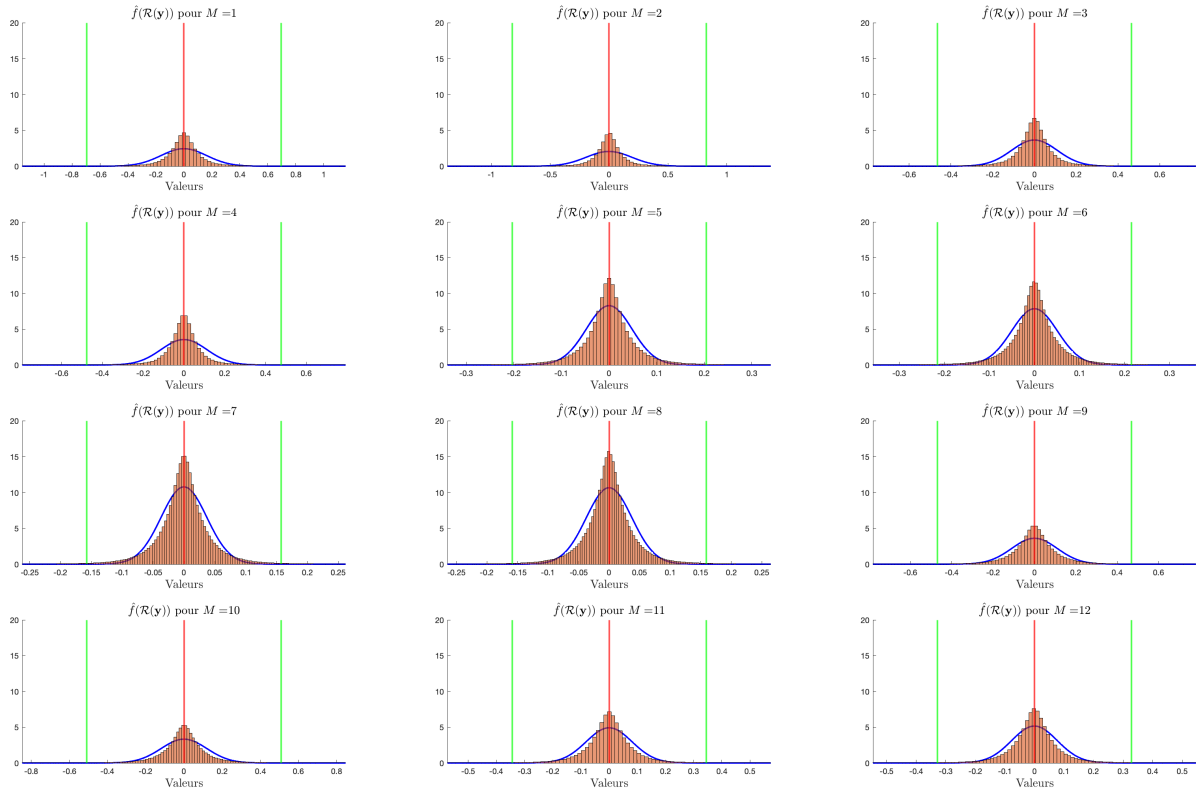


FIGURE 4.A.2 – Scène 1 : Lois de probabilité estimées pour la composante réelle de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 1$ et distribution empirique associée

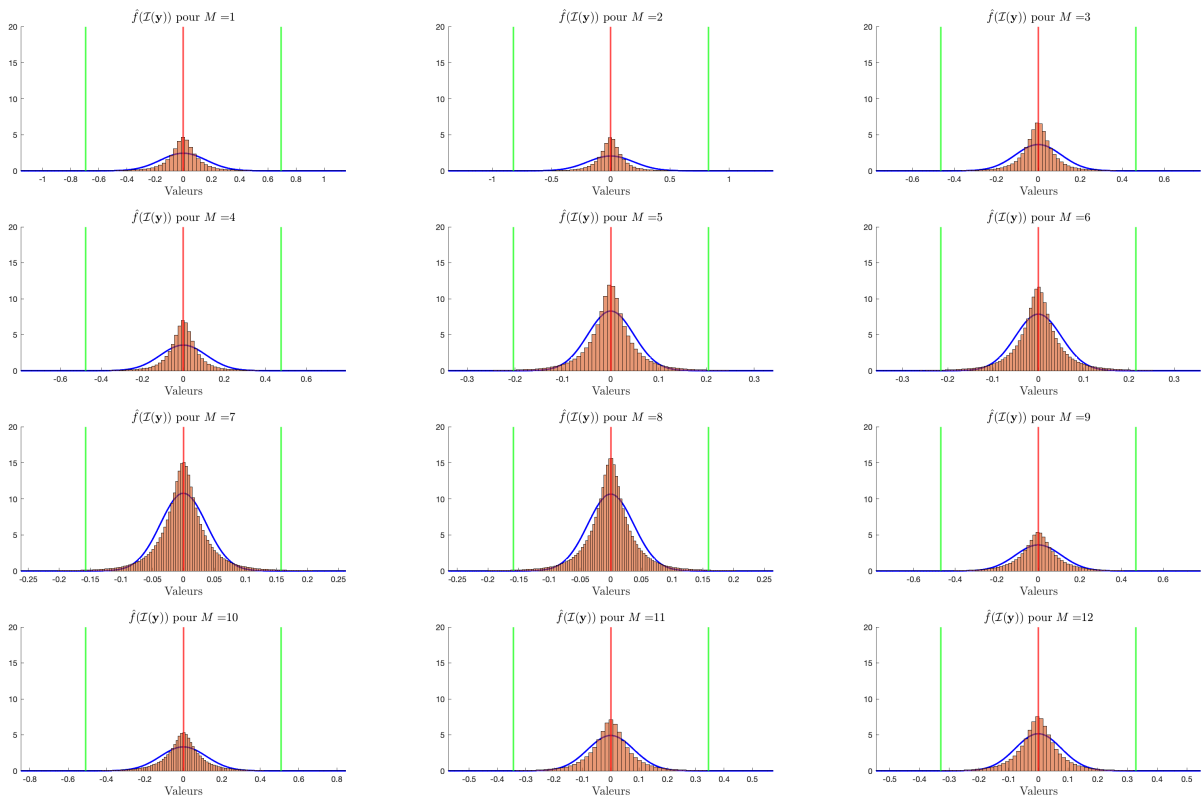


FIGURE 4.A.3 – Scène 1 : Lois de probabilité estimées pour la composante imaginaire de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 1$ et distribution empirique associée

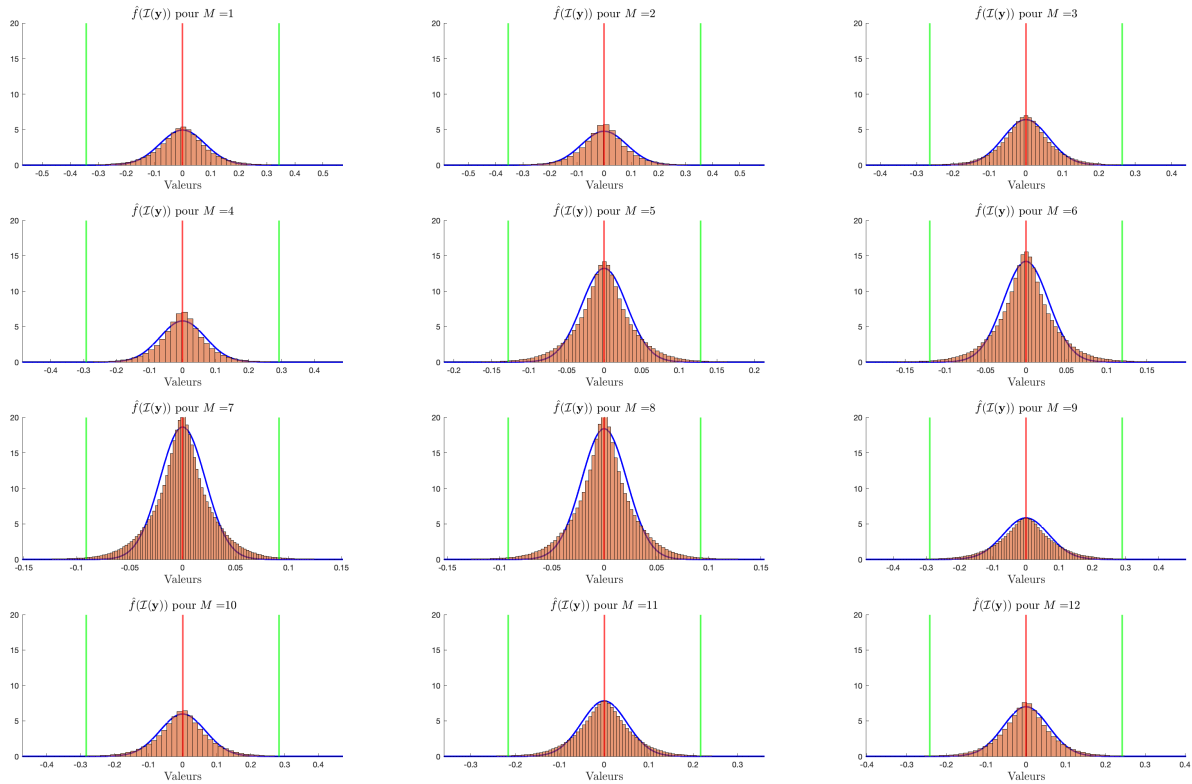


FIGURE 4.A.4 – Scène 2 : Lois de probabilité estimées pour la composante imaginaire de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 1$ et distribution empirique associée

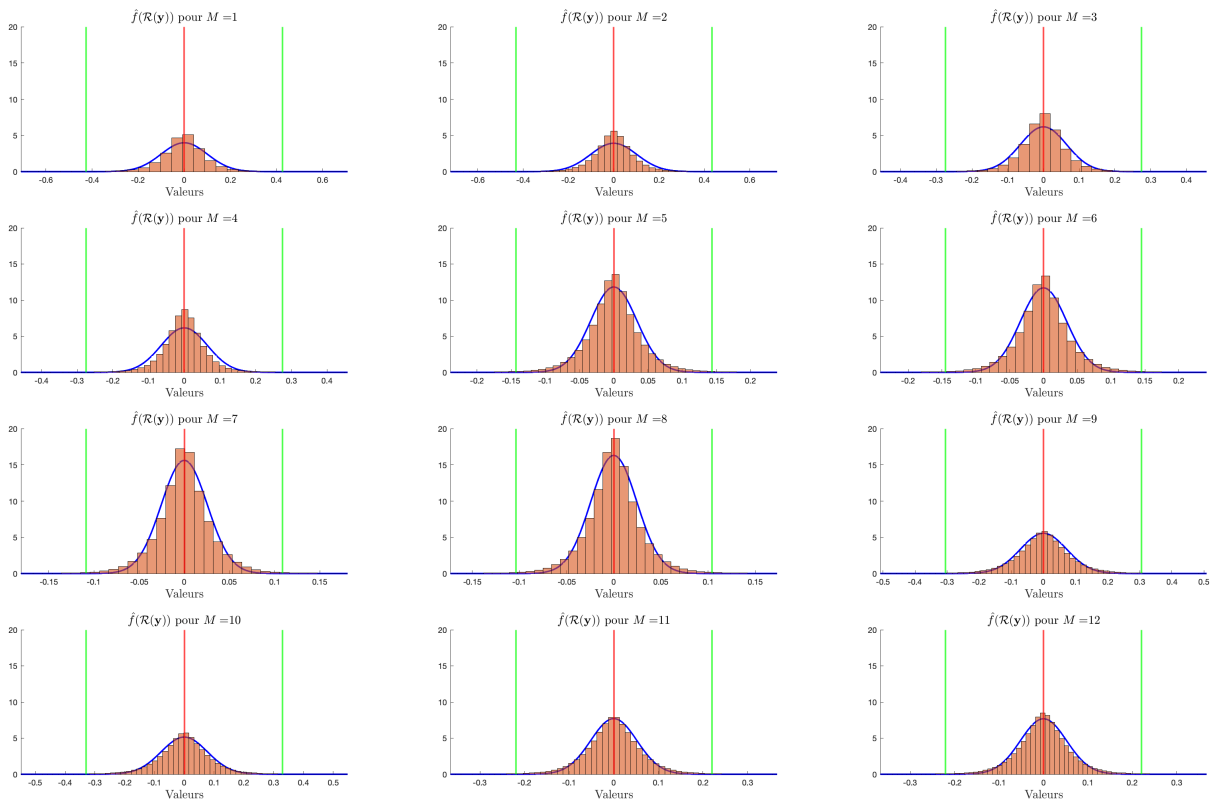


FIGURE 4.A.5 – Scène 2 : Lois de probabilité estimées pour la composante réelle de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 2$ et distribution empirique associée

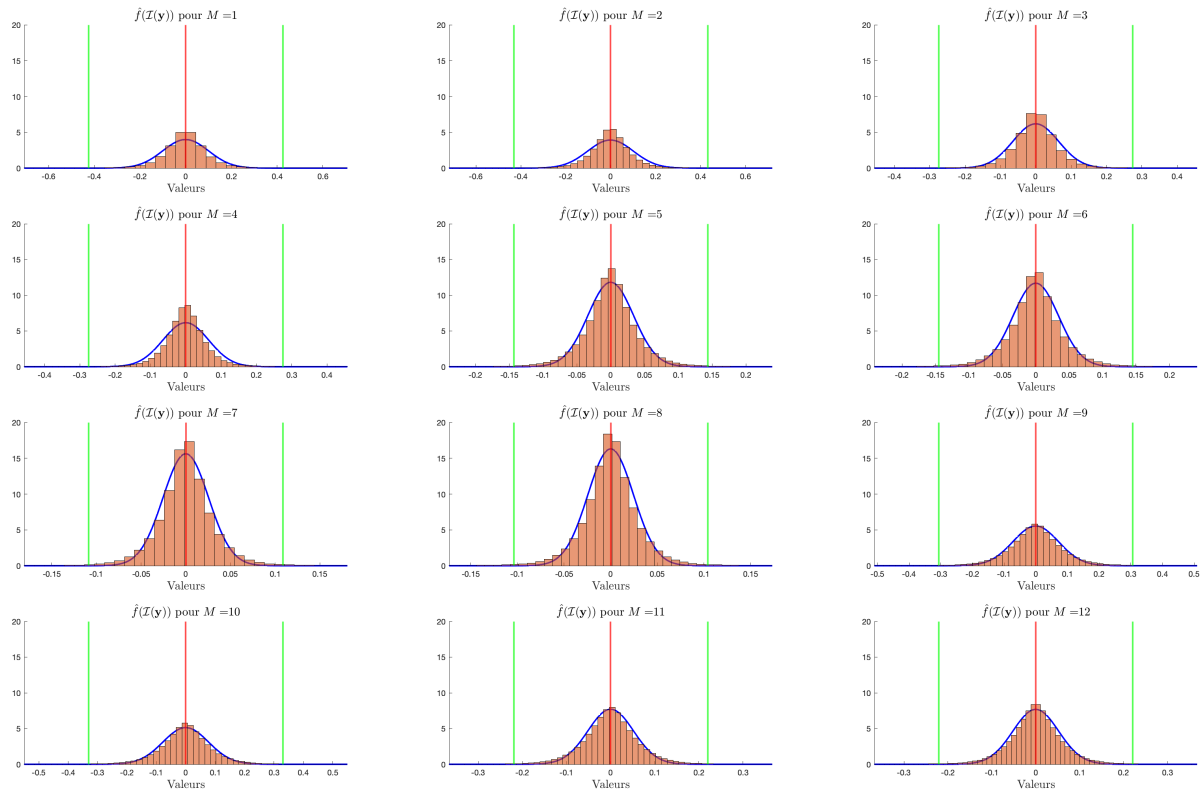


FIGURE 4.A.6 – Scène 2 : Lois de probabilité estimées pour la composante imaginaire de chaque dimension de tous les pixels de l'image à $\ell = 2$ et distribution empirique associée

Conclusion

Cette thèse porte sur la surveillance de changements à partir de séries temporelles d'images *SAR*. Nous nous sommes plus précisément intéressés à l'évolution de la matrice de covariance des données dans le cas où elles sont de grande dimension et où l'hypothèse de rang réduit peut être formulée.

Dans les deux premiers chapitres, après avoir examiné le format des données *SAR*, nous avons introduit la notion de détection de changement. Nous nous sommes particulièrement penchés sur les tests d'égalité de covariance et les statistiques génériques de test associées. Après avoir proposé un modèle de rang réduit pour les matrices de covariance, pertinent pour les données *SAR*, nous avons démontré que les performances de ces statistiques de test pouvaient être impactées dans ce cadre. Par conséquent, nous avons entrepris une étude des matrices de covariances *Wishart* complexe suivant pour un modèle rang réduit dans le régime asymptotique des grandes dimensions.

Après avoir caractérisé le comportement des valeurs propres de ces matrices au premier et au second ordre, le Chapitre 3 a présenté une nouvelle statistique de test adaptée au modèle de rang réduit, $T(\epsilon)$. Nous avons démontré notre capacité à contrôler son taux de fausse alarme, contrairement à d'autres statistiques de test pertinentes pour le modèle de rang réduit, telles que T_{Fisher} ou T_{GLRLR} . De plus, à travers de nombreuses simulations sur des données empiriques, nous avons constaté que la statistique de test présentée affiche des performances supérieures à celles des autres statistiques de test. Nous avons également souligné la pertinence des résultats obtenus, même pour des dimensions M faibles ou modérées, alors que l'étude théorique a été menée dans le régime asymptotique des grandes dimensions où $M \rightarrow \infty$.

Enfin, dans le Chapitre 4, nous avons entrepris une comparaison entre la statistique de test proposée, $T(\epsilon)$, et d'autres statistiques de test de référence telles que T_{GLRLR} et $T_{S_{\sigma^2}}$ adaptées au modèle de rang réduit, ainsi que T_{GLR} . Une première section a été consacrée à une évaluation des performances sur des données simulées, avec un modèle de données se rapprochant de ce que l'on peut trouver dans des données réelles. Les résultats ont confirmé une fois de plus les performances supérieures de la statistique de test $T(\epsilon)$, comme souligné précédemment dans le Chapitre 3. Par la suite, nous avons testé ces statistiques sur des données réelles divisées en deux scènes distinctes. Nous avons évalué la pertinence du modèle gaussien pour chacune, constatant une adéquation contestable dans la scène 1 et une certaine pertinence dans la scène 2. Dans un premier temps, nous avons proposé une amélioration de la vérité terrain afin de tester de manière plus précise les performances des statistiques de test. Dans un second temps, nous avons observé des performances intéressantes de $T(\epsilon)$ dans ces scénarios particuliers. Enfin, dans une dernière partie, nous avons mis en avant l'avantage majeur de la statistique de test $T(\epsilon)$, qui conformément aux résultats théoriques présentés dans le Chapitre 3, est la seule statistique dont nous pouvons ajuster théoriquement le seuil ϵ pour obtenir un taux de fausse alarme désiré.

En ce qui concerne les perspectives, il serait pertinent d'explorer la généralisation de la statistique de test $T(\epsilon)$ à un modèle de données non gaussien. Comme souligné dans [23], le modèle elliptique semble particulièrement adapté, notamment dans le contexte des données réelles *SAR*. Après avoir examiné cette généralisation, une autre possibilité serait de se consacrer à l'estimation précise de l'instant de changement ([117], [118]). Cela implique de déterminer l'indice ℓ correspondant à l'occurrence d'une rupture dans la structure de covariance de la série temporelle. La statistique de test $T(\epsilon)$ serait ainsi capable de détecter et repérer le changement dans le temps. Puis, un axe d'investigation intéressant consisterait à se pencher sur la caractérisation des changements, une étape intervenant après la détection et l'estimation de l'instant de changement. Divers types de changements peuvent se manifester au sein d'une série temporelle d'images *SAR* haute définition, tels que l'apparition, la disparition, le mouvement, l'évolution lente, et d'autres encore. L'identification précise du type de changement ([119], [120]) permet d'obtenir une analyse plus approfondie de la série temporelle, voire de fournir des éléments utiles à la prédiction de certains phénomènes sous-jacents.

Bibliographie

- [1] The National Aeronautics and Space Administration. <https://www.earthdata.nasa.gov>.
- [2] European Space Agency. <https://earth.esa.int/eogateway/instruments/sar-ers>.
- [3] The National Aeronautics and Space Administration. <https://www.earthdata.nasa.gov/learn>.
- [4] Richard Bamler. Principles of synthetic aperture radar. *Surveys in Geophysics*, 21(2-3) :147–157, 2000.
- [5] European Space Agency. <https://earth.esa.int/eogateway/documents/20142/37627/Principles%20of%20radar%20imagery>.
- [6] Seyed Alireza Khoshnevis and Seyed Ghorshi. A tutorial on tomographic synthetic aperture radar methods. *SN Applied Sciences*, 2, 09 2020.
- [7] Vincent Poulain, Jordi Inglada, Marc Spigai, Jean-Yves Tourneret, and Philippe Marthon. High-resolution optical and sar image fusion for building database updating. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(8) :2900–2910, 2011.
- [8] Zbigniew Perski. Application of sar imagery and sar interferometry in digital geological cartography. In *The Current Role of Geological Mapping in Geosciences : Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Innovative Applications of GIS in Geological Cartography Kazimierz Dolny, Poland 24–26 November 2003*, pages 225–244. Springer, 2005.
- [9] Robert T Frankot and Rama Chellappa. Estimation of surface topography from sar imagery using shape from shading techniques. *Artificial Intelligence*, 43(3) :271–310, 1990.
- [10] Dale L Schuler, Jong-Sen Lee, and Gianfranco De Grandi. Measurement of topography using polarimetric sar images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 34(5) :1266–1277, 1996.
- [11] Johannes Reiche, Richard Lucas, Anthea L Mitchell, Jan Verbesselt, Dirk H Hoekman, Jörg Haarpaintner, Josef M Kellndorfer, Ake Rosenqvist, Eric A Lehmann, Curtis E Woodcock, et al. Combining satellite data for better tropical forest monitoring. *Nature Climate Change*, 6(2) :120–122, 2016.
- [12] Gordon Staples and Douglas Fraga Rodrigues. Maritime environmental surveillance with radarsat-2. In *Anais XVI Simposio Brasileiro de Sensoriamento Remoto-SBSR*, pages 8445–8452, 2013.
- [13] Iain H Woodhouse. *Introduction to microwave remote sensing*. CRC press, 2005.

- [14] S Saatchi. Mapping tropical forest biomass : synthesis of ground and remote sensing inventory. *Consult. Rep. 2 High Carbon Stock Sci. Study*, 2015.
- [15] David Mera, José M Cotos, José Varela-Pet, and Oscar Garcia-Pineda. Adaptive thresholding algorithm based on sar images and wind data to segment oil spills along the northwest coast of the iberian peninsula. *Marine pollution bulletin*, 64(10) :2090–2096, 2012.
- [16] Motofumi Arii, Masakazu Koiwa, and Yoshifumi Aoki. Applicability of sar to marine debris surveillance after the great east japan earthquake. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(5) :1729–1744, 2014.
- [17] Olivier Ruault du Plessis and Philippe Dreuillet. The onera airborne multi-frequency sar imaging systems. In *2013 International Conference on Radar*, pages 85–90. IEEE, 2013.
- [18] Sherif S Ahmed. Microwave imaging in security—two decades of innovation. *IEEE Journal of Microwaves*, 1(1) :191–201, 2021.
- [19] Hendrik Christoffel Hulst and Hendrik C van de Hulst. *Light scattering by small particles*. Courier Corporation, 1981.
- [20] Yashi Zhou, Pei Wang, Zhen Chen, Qingchao Zhao, Wei Wang, Lei Zhang, Weidong Yu, Yunkai Deng, and Robert Wang. Very high resolution sar imaging with dgps-supported airborne x-band data. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 13 :3605–3617, 2020.
- [21] John C Curlander and Robert N McDonough. *Synthetic aperture radar*, volume 11. Wiley, New York, 1991.
- [22] Yoshio Yamaguchi, Toshifumi Moriyama, Motoi Ishido, and Hiroyoshi Yamada. Four-component scattering model for polarimetric sar image decomposition. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 43(8) :1699–1706, 2005.
- [23] Ammar Mian. *Contributions to SAR Image Time Series Analysis*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2019.
- [24] Mariví Tello, Carlos López-Martínez, and Jordi J Mallorqui. A novel algorithm for ship detection in sar imagery based on the wavelet transform. *IEEE Geoscience and remote sensing letters*, 2(2) :201–205, 2005.
- [25] Ammar Mian, Jean-Philippe Ovarlez, Abdourrahmane Mahamane Atto, and Guillaume Ginolhac. Design of new wavelet packets adapted to high-resolution sar images with an application to target detection. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 57(6) :3919–3932, 2019.
- [26] Knut Conradsen, A Aasbjerg Nielsen, Jesper Schou, and Henning Skriver. Change detection in polarimetric sar data and the complex wishart distribution. In *IGARSS 2001. Scanning the Present and Resolving the Future. Proceedings. IEEE 2001 International Geoscience and Remote Sensing Symposium (Cat. No. 01CH37217)*, volume 6, pages 2628–2630. IEEE, 2001.
- [27] D. Ciuonzo, V. Carotenuto, and A. De Maio. On multiple covariance equality teteting with application to SAR change detection. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 65(19) :5078–5091, 2017.
- [28] H-J Muller. K statistics of terrain clutter in high resolution sar images. In *Proceedings of IGARSS'94-1994 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, volume 4, pages 2146–2148. IEEE, 1994.

- [29] T Bucciarelli, P Lombardo, CJ Oliver, and M Perrotta. A compound weibull model for sar texture analysis. In *1995 International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS'95. Quantitative Remote Sensing for Science and Applications*, volume 1, pages 181–183. IEEE, 1995.
- [30] Corina C Freitas, Alejandro C Frery, and Antonio H Correia. The polarimetric distribution for sar data analysis. *Environmetrics : The official journal of the International Environmetrics Society*, 16(1) :13–31, 2005.
- [31] Esa Ollila, David E Tyler, Visa Koivunen, and H Vincent Poor. Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications. *IEEE Transactions on signal processing*, 60(11) :5597–5625, 2012.
- [32] Koray Kayabol and Josiane Zerubia. Unsupervised amplitude and texture classification of sar images with multinomial latent model. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(2) :561–572, 2012.
- [33] Koray Kayabol, Aurélie Voisin, and Josiane Zerubia. Sar image classification with non-stationary multinomial logistic mixture of amplitude and texture densities. In *2011 18th IEEE International Conference on Image Processing*, pages 169–172. IEEE, 2011.
- [34] Gabriele Moser and Sebastiano B Serpico. Generalized minimum-error thresholding for unsupervised change detection from sar amplitude imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote sensing*, 44(10) :2972–2982, 2006.
- [35] Alessandro C Mondini, Michele Santangelo, Margherita Rocchetti, Enrica Rossetto, Andrea Manconi, and Oriol Monserrat. Sentinel-1 sar amplitude imagery for rapid landslide detection. *Remote sensing*, 11(7) :760, 2019.
- [36] Rémi Michel, Jean-Philippe Avouac, and Jean Taboury. Measuring ground displacements from sar amplitude images : Application to the landers earthquake. *Geophysical Research Letters*, 26(7) :875–878, 1999.
- [37] Teng Wang and Sigurjón Jónsson. Improved sar amplitude image offset measurements for deriving three-dimensional coseismic displacements. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 8(7) :3271–3278, 2015.
- [38] Yakoub Bazi, Lorenzo Bruzzone, and Farid Melgani. Automatic identification of the number and values of decision thresholds in the log-ratio image for change detection in sar images. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 3(3) :349–353, 2006.
- [39] Andrea Garzelli and Claudia Zoppetti. Optimizing sar change detection based on log-ratio features. In *2017 9th International Workshop on the Analysis of Multitemporal Remote Sensing Images (MultiTemp)*, pages 1–4. IEEE, 2017.
- [40] Josef Kittler and John Illingworth. Minimum error thresholding. *Pattern recognition*, 19(1) :41–47, 1986.
- [41] Mark Preiss and Nicholas JS Stacy. Coherent change detection : Theoretical description and experimental results. Technical report, 2006.
- [42] Jarred Barber. A generalized likelihood ratio test for coherent change detection in polarimetric sar. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 12(9) :1873–1877, 2015.
- [43] Jordi Inglada. Change detection on sar images by using a parametric estimation of the kullback-leibler divergence. In *IGARSS 2003. 2003 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Proceedings (IEEE Cat. No. 03CH37477)*, volume 6, pages 4104–4106. IEEE, 2003.

- [44] Wen Yang, Hui Song, Xiaojing Huang, Xin Xu, and Mingsheng Liao. Change detection in high-resolution sar images based on jensen–shannon divergence and hierarchical markov model. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(8) :3318–3327, 2014.
- [45] Norman L Johnson, Samuel Kotz, and Narayanaswamy Balakrishnan. *Continuous univariate distributions, volume 2*, volume 289. John wiley & sons, 1995.
- [46] Karl Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. ii. skew variation in homogeneous material. [abstract]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 57 :257–260, 1894.
- [47] Samuel S Wilks. Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, pages 471–494, 1932.
- [48] Theodore Wilbur Anderson. *An introduction to multivariate statistical analysis*, volume 2. Wiley New York, 1958.
- [49] S.M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection theory*. Fundamentals of Statistical Si. Prentice-Hall PTR, 1998.
- [50] James Durbin. Testing for serial correlation in least-squares regression when some of the regressors are lagged dependent variables. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 410–421, 1970.
- [51] Hisao Nagao. On some test criteria for covariance matrix. *The Annals of Statistics*, pages 700–709, 1973.
- [52] James R Schott. Some tests for the equality of covariance matrices. *Journal of statistical planning and inference*, 94(1) :25–36, 2001.
- [53] George R Terrell. The gradient statistic. *Comput. Sci. Stat.*, 34 :206–215, 2002.
- [54] Artur J Lemonte and Silvia LP Ferrari. The local power of the gradient test. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 64(2) :373–381, 2012.
- [55] Erich Leo Lehmann, Joseph P Romano, and George Casella. *Testing statistical hypotheses*, volume 3. Springer, 1986.
- [56] Knut Conradsen, Allan Aasbjerg Nielsen, Jesper Schou, and Henning Skriver. A test statistic in the complex wishart distribution and its application to change detection in polarimetric sar data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(1) :4–19, 2003.
- [57] Leslie M Novak. Change detection for multi-polarization multi-pass sar. In *Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery XII*, volume 5808, pages 234–246. SPIE, 2005.
- [58] Knut Conradsen, Allan Aasbjerg Nielsen, and Henning Skriver. Change detection in polarimetric sar data over several time points. In *2014 IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 4540–4543. IEEE, 2014.
- [59] Alan T James. Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(2) :475–501, 1964.
- [60] Alan Edelman. Eigenvalues and condition numbers of random matrices. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 9(4) :543–560, 1988.
- [61] PR Krishnaiah and FJ Schuurmann. On the evaluation of some distributions that arise in simultaneous tests for the equality of the latent roots of the covariance matrix. *Journal of multivariate analysis*, 4(3) :265–282, 1974.

- [62] Paruchuri R Krishnaiah. *On the exact distributions of the test statistics based on the eigenvalues of complex random matrices*. Aerospace Research Laboratories, 1973.
- [63] Nathaniel R Goodman. Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution (an introduction). *The Annals of mathematical statistics*, 34(1) :152–177, 1963.
- [64] Romain Couillet and Merouane Debbah. *Random matrix methods for wireless communications*. Cambridge University Press, 2011.
- [65] Robb J Muirhead. *Aspects of multivariate statistical theory*. John Wiley & Sons, 2009.
- [66] Samuel S Wilks. The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *The annals of mathematical statistics*, 9(1) :60–62, 1938.
- [67] Eugene P Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, 67(2) :325–327, 1958.
- [68] Vladimir Alexandrovich Marchenko and Leonid Andreevich Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Matematicheskii Sbornik*, 114(4) :507–536, 1967.
- [69] Iain M Johnstone. High dimensional statistical inference and random matrices. *arXiv preprint math/0611589*, 2006.
- [70] R Brent Dozier and Jack W Silverstein. On the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional information-plus-noise-type matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(4) :678–694, 2007.
- [71] Q. Wang and J. Yao. Extreme eigenvalues of large-dimensional spiked fisher matrices with application. *Ann. Statist.*, 45(1) :415–460, 2017.
- [72] Kenneth W Wachter. The limiting empirical measure of multiple discriminant ratios. *The Annals of Statistics*, pages 937–957, 1980.
- [73] YQ Yin, ZD Bai, and PR Krishnaiah. Limiting behavior of the eigenvalues of a multivariate f matrix. *Journal of multivariate analysis*, 13(4) :508–516, 1983.
- [74] Yong Q Yin. Limiting spectral distribution for a class of random matrices. *Journal of multivariate analysis*, 20(1) :50–68, 1986.
- [75] Jack W Silverstein. The limiting eigenvalue distribution of a multivariate f matrix. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 16(3) :641–646, 1985.
- [76] Zhidong D Bai, Yong Q Yin, and Paruchuri R Krishnaiah. On the limiting empirical distribution function of the eigenvalues of a multivariate f matrix. *Theory of Probability & Its Applications*, 32(3) :490–500, 1988.
- [77] Zhi-Dong Bai and Jack W Silverstein. No eigenvalues outside the support of the limiting spectral distribution of large-dimensional sample covariance matrices. *The Annals of Probability*, 26(1) :316–345, 1998.
- [78] S. Zheng. Central limit theorems for linear spectral statistics of large dimensional F-matrices. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 48(2) :444–476, 2012.
- [79] SHURONG ZHENG, ZHIDONG BAI, and JIANFENG YAO. Clt for eigenvalue statistics of large-dimensional general fisher matrices with applications. *Bernoulli*, 23(2) :1130–1178, 2017.
- [80] Iain M Johnstone. On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis. *The Annals of statistics*, 29(2) :295–327, 2001.

- [81] Alice Combernoux, Frédéric Pascal, and Guillaume Ginolhac. Performance of the low-rank adaptive normalized matched filter test under a large dimension regime. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 55(1) :459–468, 2018.
- [82] Florent Benaych-Georges, Alice Guionnet, and Mylène Maida. Fluctuations of the extreme eigenvalues of finite rank deformations of random matrices. *Electronic Journal of Probability*, 16, 09 2010.
- [83] Prathapasinghe Dharmawansa, Iain M Johnstone, and Alexei Onatski. Local asymptotic normality of the spectrum of high-dimensional spiked f-ratios. *arXiv preprint arXiv :1411.3875*, 2014.
- [84] Jinho Baik, Ben Arous Gérard, and Pêche Sandrine. Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices. *The Annals of Probability*, 33(5) :1643–1697, 2005.
- [85] Jinho Baik and Jack W Silverstein. Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models. *Journal of multivariate analysis*, 97(6) :1382–1408, 2006.
- [86] Florent Benaych-Georges and Raj Rao Nadakuditi. The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. *Advances in Mathematics*, 227(1) :494–521, 2011.
- [87] Vâčeslav Leonidovič Girko. *An introduction to statistical analysis of random arrays*. Vsp, 1998.
- [88] Jack W Silverstein and Sang-Il Choi. Analysis of the limiting spectral distribution of large dimensional random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 54(2) :295–309, 1995.
- [89] Jack W Silverstein. Strong convergence of the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 55(2) :331–339, 1995.
- [90] Zhidong Bai and Jian feng Yao. Central limit theorems for eigenvalues in a spiked population model. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 44(3) :447 – 474, 2008.
- [91] Xavier Mestre. On the asymptotic behavior of the sample estimates of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5353–5368, 2008.
- [92] Stuart Geman. A limit theorem for the norm of random matrices. *The Annals of Probability*, 8(2) :252–261, 1980.
- [93] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [94] Walid Hachem, Philippe Loubaton, Xavier Mestre, Jamal Najim, and Pascal Vallet. Large information plus noise random matrix models and consistent subspace estimation in large sensor networks. *Random Matrices : Theory and Applications*, 1(02) :1150006, 2012.
- [95] Florent Benaych-Georges and Raj Rao Nadakuditi. The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 111 :120–135, 2012.
- [96] Walid Hachem, Oleksiy Khorunzhiy, Philippe Loubaton, Jamal Najim, and Leonid Pastur. A new approach for capacity analysis of large dimensional multi-antenna channels. *arXiv preprint cs/0612076*, 2006.

- [97] Pascal Vallet, Xavier Mestre, and Philippe Loubaton. Performance analysis of an improved music doa estimator. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(23) :6407–6422, 2015.
- [98] Xavier Mestre and Pascal Vallet. Correlation tests and linear spectral statistics of the sample correlation matrix. *IEEE Transactions on Information Theory*, 63(7) :4585–4618, 2017.
- [99] Ammar Mian, Guillaume Ginolhac, Jean-Philippe Ovarlez, and Abdourrahmane Mahamane Atto. New robust statistics for change detection in time series of multivariate sar images. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 67(2) :520–534, 2018.
- [100] Ammar Mian, Antoine Collas, Arnaud Breloy, Guillaume Ginolhac, and Jean-Philippe Ovarlez. Robust low-rank change detection for multivariate sar image time series. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 13 :3545–3556, 2020.
- [101] Michael E Tipping and Christopher M Bishop. Probabilistic principal component analysis. *Journal of the Royal Statistical Society Series B : Statistical Methodology*, 61(3) :611–622, 1999.
- [102] Michal Shimoni, Dirk Borghys, Roel Heremans, Christiaan Perneel, and Marc Achery. Fusion of polsar and polinsar data for land cover classification. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 11(3) :169–180, 2009.
- [103] Rachel Blin, Samia Ainouz, Stéphane Canu, and Fabrice Meriaudeau. A new multimodal rgb and polarimetric image dataset for road scenes analysis. In *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, pages 216–217, 2020.
- [104] Shane R Cloude and Eric Pottier. A review of target decomposition theorems in radar polarimetry. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 34(2) :498–518, 1996.
- [105] Jong-Sen Lee and Eric Pottier. *Polarimetric radar imaging : from basics to applications*. CRC press, 2017.
- [106] Wolfgang-Martin Boerner. Polarimetry in radar remote sensing ; basic and applied concepts. *Principles & applications of imaging radar*, 5, 1978.
- [107] ALEXANDERB Kostinski and WOLFG Boerner. On foundations of radar polarimetry. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(12) :1395–1404, 1986.
- [108] Wolfgang-M Boerner, Hans Brand, Leonard A Cram, Dag T Gjessing, Arthur K Jordan, Wolfgang Keydel, Günther Schwierz, and Martin Vogel. *Inverse Methods in Electromagnetic Imaging : Part 2*, volume 143. Springer Science & Business Media, 2013.
- [109] Shane Rober Cloude. Group theory and polarisation algebra. *Optik (Stuttgart)*, 75(1) :26–36, 1986.
- [110] Sanjit Maitra, Michael G Gartley, and John P Kerekes. Relation between degree of polarization and pauli color coded image to characterize scattering mechanisms. In *Polarization : Measurement, Analysis, and Remote Sensing X*, volume 8364, pages 128–136. SPIE, 2012.
- [111] W-M Boerner, W-L Yan, A-Q Xi, and Yoshio Yamaguchi. On the basic principles of radar polarimetry : the target characteristic polarization state theory of kennaugh,

- huynen’s polarization fork concept, and its extension to the partially polarized case. *Proceedings of the IEEE*, 79(10) :1538–1550, 1991.
- [112] Maria S Greco and Fulvio Gini. Statistical analysis of high-resolution sar ground clutter data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote sensing*, 45(3) :566–575, 2007.
- [113] Gui Gao. Statistical modeling of sar images : A survey. *Sensors*, 10(1) :775–795, 2010.
- [114] Esa Ollila, David E Tyler, Visa Koivunen, and H Vincent Poor. Compound-gaussian clutter modeling with an inverse gaussian texture distribution. *IEEE Signal Processing Letters*, 19(12) :876–879, 2012.
- [115] Debanshu Ratha, Shaunak De, Turgay Celik, and Avik Bhattacharya. Change detection in polarimetric sar images using a geodesic distance between scattering mechanisms. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 14(7) :1066–1070, 2017.
- [116] Irena Hajnsek and Yves-Louis Desnos. *Polarimetric synthetic aperture radar : principles and application*, volume 25. Springer Nature, 2021.
- [117] Valeriy Avanesov and Nazar Buzun. Change-point detection in high-dimensional covariance structure. *Electronic Journal of Statistics*, 12(2) :3254 – 3294, 2018.
- [118] Ansgar Steland. Testing and estimating change-points in the covariance matrix of a high-dimensional time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 177 :104582, 2020.
- [119] Romain Couillet, Malik Tiomoko, Steeve Zozor, and Eric Moisan. Random matrix-improved estimation of covariance matrix distances. *Journal of Multivariate Analysis*, 174 :104531, 2019.
- [120] Malik Tiomoko, Romain Couillet, Florent Bouchard, and Guillaume Ginolhac. Random matrix improved covariance estimation for a large class of metrics. In *International Conference on Machine Learning*, pages 6254–6263. PMLR, 2019.

Détection de changements dans les séries temporelles d'images satellitaires multi-dimensionnelles

Résumé : *Cette thèse se concentre sur la détection de changements dans les séries temporelles d'images satellitaires multidimensionnelles. Plus précisément, nous nous penchons sur le test d'égalité des matrices de covariance dans le contexte des séries temporelles complexes gaussiennes multivariées. Les matrices de covariance de L séries temporelles, chacune de dimension M , sont modélisées comme des perturbations de rang K de la matrice identité, représentant un modèle signal plus bruit. Dans cette recherche, nous proposons une nouvelle statistique de test basée sur les estimations des valeurs propres des matrices de covariance. Cette statistique de test est consistante dans le régime asymptotique des grandes dimensions, où les tailles d'échantillon N_1, \dots, N_L de chaque série temporelle et la dimension M tendent vers l'infini au même rythme, tout en maintenant K et L fixes. De plus, nous proposons un contrôle de l'erreur de type I de la statistique de test proposée dans le régime asymptotique des grandes dimensions. Des simulations sur données simulées puis sur des données réelles ont pu montrer des résultats plutôt satisfaisants comparativement à d'autres méthodes pertinentes, et ce même pour des valeurs de M et N_1, \dots, N_L modérées.*

Mots-clés : [Imagerie SAR](#), [détection de changement](#), [test d'égalité](#), [matrice de covariance](#), [rang réduit](#), [régime asymptotique des grandes dimensions](#), [statistique de test](#), [CFAR](#)

Change detection in multi-dimensional satellite image time series

Abstract : *This thesis focuses on change detection in multidimensional time series of satellite images. Specifically, we address the equality test of covariance matrices in the context of multivariate complex Gaussian time series. The covariance matrices of L time series, each of dimension M , are modeled as rank- K perturbations of the identity matrix, representing a signal-plus-noise model. In this research, we propose a novel test statistic based on estimates of the eigenvalues of covariance matrices. This test statistic is consistent in the asymptotic regime of large dimensions, where the sample sizes N_1, \dots, N_L for each time series and the dimension M approach infinity at the same rate, while keeping K and L fixed. Additionally, we provide a control of the Type I error of the proposed test statistic in the asymptotic regime of large dimensions. Simulations on simulated data and real-world data have demonstrated rather satisfactory results compared to other relevant methods, even for moderate values of M and N_1, \dots, N_L .*

Keywords : [SAR Imaging](#), [Change Detection](#), [Equality Test](#), [Covariance Matrix](#), [Low Rank](#), [Asymptotic High-Dimensional Regime](#), [Test Statistics](#), [CFAR](#)

Unité de recherche
IMS Laboratory, 33400 Talence, France.