



HAL
open science

Modélisation, analyse et simulation de modèles en géomorphologie

Julie Binard

► **To cite this version:**

Julie Binard. Modélisation, analyse et simulation de modèles en géomorphologie. Analyse numérique [math.NA]. Université de Toulouse, 2024. Français. NNT : 2024TLSEI001 . tel-04660219

HAL Id: tel-04660219

<https://theses.hal.science/tel-04660219>

Submitted on 23 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Doctorat de l'Université de Toulouse

préparé à l'INSA Toulouse

Modélisation, analyse et simulation de modèles en
géomorphologie

Thèse présentée et soutenue, le 26 avril 2024 par
Julie BINARD

École doctorale

EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse

Spécialité

Mathématiques et Applications

Unité de recherche

IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par

Pascal NOBLE

Composition du jury

M. Enrique FERNANDEZ NIETO, Rapporteur, Universidad de Sevilla

Mme Carine LUCAS, Rapporteur, Université d'Orléans

M. Francis FILBET, Examineur, Université Toulouse III - Paul Sabatier

Mme Astrid DECOENE, Examinatrice, Université de Bordeaux

M. Pascal NOBLE, Directeur de thèse, INSA Toulouse

Membres invités

M. Pierre DEGOND, CNRS Occitanie Ouest

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement de plusieurs années de travail, qui ont été rendues possibles grâce au soutien de nombreuses personnes.

Tout d'abord, merci beaucoup Carine et Enrique d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, merci pour vos relectures et retours. Merci également Astrid et Francis d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens ensuite à remercier Pascal et Pierre, pour m'avoir encadrée pendant cette thèse. J'ai beaucoup appris pendant ces quatre années grâce à vos explications et vos conseils, et vous m'avez dirigé dans des pistes de recherche très intéressantes, Merci beaucoup Pascal de m'avoir accordé suffisamment de temps pendant cette thèse et d'avoir toujours été très réactif, malgré toutes tes obligations, en particulier ton rôle de directeur du département dans lequel tu es très investi. Merci Pierre pour tes connaissances dans beaucoup de domaines qui ont permis de faire progresser cette thèse et de choisir de nouvelles pistes de recherche. Merci beaucoup pour tes patientes relectures de mes écrits, en particulier d'avoir relevé beaucoup de mes 's' manquants ou en trop, ainsi que les nombreuses fautes que je faisais.

Je remercie ensuite toutes les personnes que j'ai croisé au GMM et à l'IMT. Le GMM est un lieu très accueillant, merci à tout le monde de contribuer à cette ambiance. Merci Sandrine d'être la meilleure gestionnaire possible, toujours souriante et de bonne humeur, et très efficace. Grâce à toi les formalités administratives sont beaucoup plus simples. Merci Cathy pour tout ce que tu fais pour le département, c'est grâce à ton investissement que le département se porte bien. Merci Florent pour l'organisation des afterwork, Loic, Maxime et Laure pour les parties de tarots (un jour, je repasserai en positif!). Olivier, merci pour tes réponses à mes diverses questions, et pour ta bonne gestion de l'attribution des enseignements. Merci Lorick pour tes anecdotes et conseils. Merci Fred (C) de m'avoir aidé avec des problèmes informatiques au début de ma thèse. Mouhamad, merci pour les discussions intéressantes. Pierre, merci pour ta bonne humeur et ton enthousiasme, et pour l'organisation de ces sessions d'ultimate du vendredi midi! Fred, grâce à toi il y a toujours de l'animation au GMM! Et merci pour ces TP d'analyse numérique, grâce auxquels j'ai beaucoup appris. Romain, merci beaucoup pour tes conseils, et pour la co-organisation des goûters crêpes au GMM!

J'ai passé de très bon moments au GMM, grâce à mes collègues doctorants. Je commence par le début, merci beaucoup à Clément, Alban, Jessica de nous avoir si bien accueillis avec Iain, malgré les difficultés liées à la période du covid. Vous avez pu répondre à beaucoup des questions que je me posais au début de ma thèse, et vous m'avez rassuré quand j'en avais besoin. Merci pour ces raclettes, et ces après-midi crêpes! Merci Jessica pour ta gentillesse, j'espère que tu t'éclate dans ce que tu fais maintenant! Merci Clément d'avoir joué un rôle très important dans la vie du GMM, grâce à toi on ne s'ennuyait pas! Alban, merci pour ton enthousiasme dans tous tes projets! Merci Thibault, Franck et Mahmoud. Iain, je suis très contente

d'avoir passé ces trois ans de thèse avec toi dans ce bureau 121. Merci pour les discussions mathématiques, et pour nos échanges sur les difficultés et les avancées que l'on a rencontré tout au long de la thèse. Nathanaël, tu as apporté un vent de fraîcheur dans le bureau avant de t'exiler chez les biologistes, merci pour ta bonne humeur! Evgeniia, grâce à toi j'ai découvert des recettes étonnantes, et tu fais de très bons gâteaux! Et merci pour ta surveillance active de l'escalier qui m'a sauvée plusieurs fois quand j'étais coincée dehors. Merci Hippolyte d'avoir importé tout droit d'Italie cette tradition du curvytron. Bravo Hugo pour tes performances à ce jeu! Amandine j'ai beaucoup apprécié d'avoir fait ces TP avec toi, ainsi que les discussions sur les enseignements, la thèse et le reste. Merci aux petits nouveaux grâce à qui les pauses du midi sont toujours plus longues avec vos jeux : Jules avec ta passion pour le uno, Perla qui a importé le tarot, et David pour tous les nouveaux jeux. Yuri thank you for this year, it was very interesting to talk about Brazil and other things with you.

Je vous souhaite tout le meilleur pour la suite!

Je souhaite maintenant remercier toutes les personnes que j'ai côtoyées en dehors de ma thèse. Je commence par le début, merci beaucoup à tous mes professeurs et en particulier à mes profs de math au lycée qui m'ont donné le goût de cette matière. Je remercie aussi tous mes camarades et amis que j'ai rencontré pendant ma scolarité. Petite dédicace à Marine, j'espère que tu t'éclate bien en Australie!

En dehors de ma thèse j'ai découvert l'ultimate à Lyon, et ce sport est devenu très important pour moi. Je remercie les respos et les coach de l'ENS qui m'ont appris à jouer et qui ont contribué à la très bonne ambiance de la section ultimate : Xavier, Clément tout d'abord, puis Julien, Charles, Célia, Amel, Tristan, Benjamin, et les suivants. Merci aux anciens, c'était super de vous avec vous : Bertrand, Tim, Grimaud, Félix, Enguerrand, Vincent, Alice, Vicky. Et merci aux plus jeunes pour tous ces bons moments passés ensemble, en particuliers les WEC et WEC2, et les soirées raclettes : Robin, Quentin, Blanche, Jules, Zoé, Isaac, Max, Joffrey, et tous les autres. Sous la pression de Xavier, j'ai rapidement accepté d'aller tester l'ultimate au club des MTX, et j'en suis très contente. Merci à toutes les personnes avec qui j'ai joué pendant ces quatre années à Lyon!

Parmi les autres personnes que j'ai croisées à l'ENS, merci Valentine pour les soirées jeux, et surtout les zombicides interminables (ou parfois très rapides : c'est très dangereux d'ouvrir des portes...), et ces discussions jusqu'au bout de la nuit. Merci à toutes les autres personnes du club jeu pour ces très bon moments, en particulier les débats interminables pendant les parties de loup garou pour une nuit. Quentin, merci pour tout, et bien sûr pour tout ce fromage! Merci Jui-Ting pour ces années, j'espère que tout se passe bien pour toi maintenant! Merci Alice pour ces bons moments en cours et en dehors, et les jeux pendant les cours d'infos. Merci aux camarades d'Agreg pour le soutien, la bonne humeur, et les heures passées sur la passerelle ou en salle Agreg. Enfin, merci aux 3 irréductibles du M2 EDP!

À Toulouse, je remercie toutes les personnes des BTR avec qui j'ai eu le plaisir

de jouer. En particulier, merci beaucoup à la team des Nuts de m'avoir si bien accueillie, en commençant par cette super semaine à la campagne. Je remercie donc Simon, Lisa, Florestan, Célia, Aymeric, Elie (le beau), Alex, Solenn, Yohan, Marc (je me souviendrai très longtemps de ton arrivée en fanfare à Sonac!), Roger, Benoit. Merci pour toutes les journées piscines à Balma beach, les soirées film, jeux, et autres activités. Petite dédicace aux anciens thésards Florence et Polo qui m'ont demandé des dizaines de fois quand est ce que je finissais enfin ma thèse, voilà ça y est! Samuel, bon courage pour la suite de ta thèse! Merci à toutes les joueuses de Sour catch, le meilleur des pick-up. J'ai hâte d'être au CBC 2025! Je ne remercie pas la team des bad coach, qui ont essayé de me faire rater ma thèse en envoyant (au moins) 40 messages par jours. Mais ze vous zaime bien quand même, zizé et liza. Merci Lisa pour ton enthousiasme, tes idées folles, et pour tous ces tournois à travers l'Europe! Simon, le plus Toulousain des Belges, merci de m'avoir fait découvrir les véritables frites et gaufres belges! Merci Flo pour ton soutien, et pour ton enthousiasme dès qu'il s'agit de sortir en ville, faire un jeu, partir 4 jours sur un bateau, ou manger des glaces (entre autres)!

Pour finir, je remercie toute ma famille. Merci à mes parents de m'avoir soutenue dans tous mes choix, et merci également de l'aide pour le pot!

Table des matières

1	Introduction	1
1	Contexte de l'étude des modèles d'évolution du paysage	1
1.1	Les enjeux	1
1.2	Historique et contexte	3
1.3	Description des lois constitutives	5
1.4	Description du modèle	11
1.5	Méthodes de résolution numérique	18
2	Principaux résultats et contributions	26
2.1	Chapitre 2 : Caractère bien posé et analyse de stabilité d'un modèle d'évolution du paysage	26
2.2	Chapitre 3 : Une méthode particulière pour des équations de transport stationnaires	30
2	Well-posedness and stability analysis of a landscape evolution model	37
1	Introduction	39
2	The landscape evolution model	45
3	Well-posedness of the landscape evolution model	46
3.1	Hypothesis on the system of equations	47
3.2	Sobolev injections	47
3.3	An a priori estimate	48
3.4	The approximate system	52
3.5	Convergence of the sequences	54
3.6	Uniqueness	57
4	Spectral stability of constant states	58
4.1	Non-dimensionalization and linearization of the system	58
4.2	Numerical exploration of stability	60
4.3	Stability analysis	61
4.4	Discussion on the low frequencies stability analysis: form of the spectrum	65
5	Direct numerical simulations	67
5.1	Simulations without source term for water	69
5.2	Simulations including a source term for water	72
6	Conclusion and perspectives	74
A	Proof of the stability theorem	75
B	Proof of the stability results at low frequencies	79
B.1	The first case	79
B.2	The second case	80
C	Proof of the stability results at high frequencies	83

C.1	The case $K > 0$	83
C.2	The case $K = 0$	84
D	Numerical scheme	86
3	A stationary particle method for a class of hyperbolic equations	89
1	Introduction	90
2	A representation formula for the solution using characteristics	92
3	The discretization method	96
3.1	The smoothed particle formalism	96
3.2	Quadrature formula and semi discretization	99
3.3	Discretization of the particle trajectories and the fully discrete scheme	101
3.4	The main theorem	105
3.5	Discussions about the method	112
4	Numerical tests	113
4.1	Practical implementation of the scheme	113
4.2	Numerical simulations	116
4.3	Application to the landscape evolution model	122
5	Conclusion and perspectives	127
4	Conclusion et perspectives	129
1	Étude théorique du système	129
1.1	Caractère bien posé.	129
1.2	Étude de stabilité.	129
2	Méthode particulière stationnaire	130
3	Un modèle microscopique	131
4	Conclusion générale	135

Introduction

Cette thèse porte sur l'étude d'un modèle d'évolution du paysage, qui évolue sous l'effet de l'érosion dû à l'écoulement d'eau. Les phénomènes d'érosion, mais aussi de sédimentation et de fluage font évoluer la surface du sol au cours du temps. Cette introduction présente d'abord le contexte et les enjeux liés à l'étude de l'évolution du relief, et aux phénomènes d'érosion des sols. Ensuite, un aperçu de l'historique de l'étude et de la mise en équations de problèmes d'évolution du paysage est faite, suivie d'une liste de lois empiriques et physiques modélisant de tels phénomènes. Puis les choix effectués pour le modèle étudié dans cette thèse sont décrits et expliqués, et sont suivis de l'obtention du modèle. La dernière partie est une introduction aux méthodes numériques généralement utilisées pour la résolution de ce type de modèles.

La seconde section de cette introduction est dédiée à la présentation des principaux résultats obtenus dans cette thèse, qui se décomposent en deux chapitres. Le premier porte sur des résultats théoriques liés au modèle : le caractère bien posé du système d'équations, ainsi que l'étude de la stabilité de certaines solutions. Il se termine par la simulation numérique de solutions du système, quand la hauteur d'eau est non nulle. Le second chapitre introduit une nouvelle méthode numérique, permettant de résoudre certains types d'équations hyperboliques stationnaires. Cette méthode permet de s'affranchir de la condition CFL liée à la résolution de l'équation non-stationnaire, quand l'échelle de temps est grande. C'est le cas dans le problème d'érosion étudié, pour lequel la vitesse du fluide est beaucoup plus grande que la vitesse d'érosion de la surface du sol. La méthode permet également de faire des simulations numériques sur un domaine comportant des zones sèches, ce qui est le cas pour de nombreux paysages.

1 Contexte de l'étude des modèles d'évolution du paysage

1.1 Les enjeux

L'étude de l'évolution du paysage au cours du temps est un défi majeur en géosciences, en particulier en géomorphologie et en hydrologie. Comprendre cette évolution permet d'expliquer comment les reliefs actuels se sont développés, et comment ils évolueront dans le futur. De nombreux phénomènes influent sur cette évolution, et peuvent être d'origine naturelle, ou causés par l'homme. Un processus central modelant les paysages est l'érosion, qui est le processus de transformation du relief

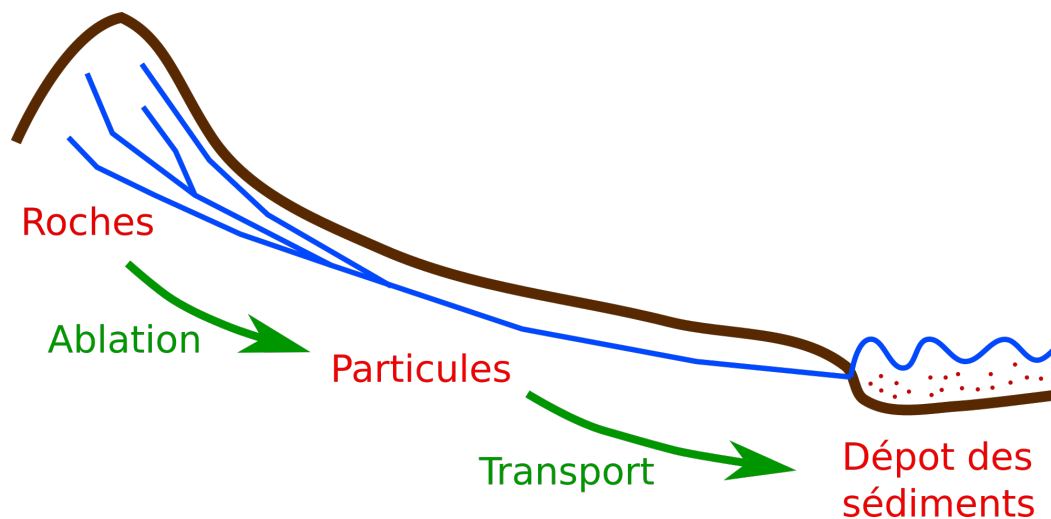


FIGURE 1.1 – Schéma représentant l'érosion d'un relief.

causé par tout agent externe. Les mécanismes agissant sur l'érosion se répartissent en trois phases (comme illustré dans la Figure 1.1), liées les unes aux autres :

1. L'ablation ou l'altération du matériel (roche, sol, berge...),
2. Le transport de ces matériaux, des débris de roche ou des sédiments,
3. Le dépôt ou l'accumulation de ces débris.

L'érosion peut être causée par une force physique, venant entre autres de l'eau, du vent, de la gravité, des écarts de température, ou de la glace. Elle peut également être causée par un phénomène chimique comme la dissolution, par les êtres vivants, ou par des phénomènes exceptionnels comme les avalanches, les séismes ou les glissements de terrain. Le transport des matériaux issus de l'ablation a lieu sous forme dissoute, ou sous forme solide. Le processus d'érosion peut façonner une grande variété de paysages, comme des vallées, des rivières, des ravines, des calanques, des cavernes. D'autres phénomènes participent à l'évolution des paysages.

- Le fluage ou reptation (creep en anglais) est un mouvement très lent du sol, dans la direction de la pente. Il provient d'une combinaison de petits mouvements des roches et du sol, dirigés par la gravité. Cet effet a tendance sur le long terme à lisser les reliefs.
- Le soulèvement tectonique est un mouvement d'élévation du sol, agissant sur de longues périodes de temps. Sa vitesse moyenne peut varier entre 100 mètres et 10 kilomètres par million d'années. Ce processus peut conduire à la formation de reliefs et de chaînes de montagnes, comme par exemple les chaînes des Alpes et de l'Himalaya, issues de la collision de deux plaques tectoniques. Le soulèvement peut aussi être isostatique, un phénomène de soulèvement du sol causé par l'allègement de sa masse. Ce mouvement s'observe par exemple en Scandinavie, où le sol subit un soulèvement hydrostatique dû à la fonte des glaces depuis la dernière glaciation.

- La subsidence est un affaissement de la surface de la croûte terrestre sous l'effet d'une charge, son effet est de l'ordre de 10m - 1km par million d'années. La charge peut provenir du dessus de la croûte terrestre (eau, volcan, calotte glaciaire, chaîne de montagnes, plaque tectonique...), de l'intérieur de celle-ci, ou du manteau terrestre.
- Les éruptions volcaniques et les coulées de laves peuvent modifier profondément les paysages. Ces phénomènes recouvrent la surface de lave et de roches, et peuvent modifier le lit des cours d'eau.

Dans un contexte de transformation des milieux par l'homme et de changement climatique, les enjeux sont importants. Tout d'abord, l'érosion peut être accentuée par l'activité humaine. Les sols sont dégradés par les pratiques agricoles, les industries, l'urbanisation, le tourisme. Ces activités déséquilibrent l'évolution naturelle des sols, les rendent plus exposés au vent et à la pluie à cause de la baisse de végétation, ce qui amplifie l'érosion. Les zones humides, définies par la Convention de Ramsar (1971) comme : «des étendues de marais, de fagnes, de tourbières ou d'eaux naturelles ou artificielles, permanentes ou temporaires, où l'eau est stagnante ou courante, douce, saumâtre ou salée, y compris des étendues d'eau marine dont la profondeur à marée basse n'excède pas six mètres. », sont aussi en danger. Ces zones ralentissent le ruissellement des eaux et l'érosion des sols, permettent de réguler naturellement les cours d'eau (ce qui diminue les crues et les inondations), alimentent les nappes phréatiques, et protègent les côtes des forces érosives provenant des marées. La superficie des zones humides diminue à cause des activités humaines, comme l'assèchement, le drainage agricole, l'industrialisation, l'urbanisation ou le remblaiement. De plus, les aménagements de cours d'eau, comme la bétonisation des berges, peuvent favoriser l'érosion dans une autre section du cours d'eau.

Ensuite, l'évolution de la forme et des propriétés des sols est liée par plusieurs aspects à des problèmes résultants du changement climatique. D'un côté, les phénomènes violents plus fréquents dégradent les sols : les orages, les inondations, les glissements de terrains, les avalanches, les coulées de boue... D'un autre côté, l'état des sols influence le climat, de par ses échanges d'eau et de dioxyde de carbone avec l'atmosphère.

1.2 Historique et contexte

L'observation et l'étude des reliefs a commencé dans l'antiquité. La première trace d'étude dans ce domaine remonte au 5^{ème} siècle av. J.C., chez les Grecs. Néanmoins, la géomorphologie est une science relativement récente, qui a commencé à prendre de l'importance au milieu du 19^{ème} siècle. Cette discipline est définie comme l'étude de l'évolution des reliefs et des processus qui le façonnent. Le mot géomorphologie a été mentionné dans un texte pour la première fois en 1868.

Un premier modèle important dans ce domaine a été développé par Davis [22] à la fin du 19^{ème} siècle, la théorie du cycle d'érosion. Ce modèle décrit l'évolution des

reliefs par un processus cyclique, l'état initial et l'état final étant une surface plane. Le premier stade est l'état de jeunesse des paysages, caractérisé par une érosion verticale active causée par les rivières, et des versants raides. Ensuite le paysage atteint l'état de maturité, le creusement par les rivières est plus lent et les autres processus d'érosion tendent à diminuer les pentes et les reliefs. Le dernier stade est celui de la vieillesse, l'érosion a considérablement diminué le relief qui devient une pénéplaine : une surface basse avec un faible dénivelé, résultat d'une longue période d'érosion. Pour finir, le soulèvement tectonique agit en surélevant cette pénéplaine, le paysage revient alors dans son état initial. Ce modèle a été critiqué en partie par Penck, qui a développé une théorie alternative [59]. Contrairement à Davis, il soutient que le soulèvement tectonique est un processus qui agit en même temps que l'érosion sur les paysages. Il décrit différents types de paysages qui se sont développés à partir du même état initial, la différence provenant du taux de soulèvement du sol. Dans son modèle, l'inclinaison des pentes dépend du taux de soulèvement, alors que dans celui de Davis cette inclinaison dépend du stade de développement du paysage. En 1877, Gilbert [33] fait l'une des premières études détaillées d'une chaîne de montagne, dans laquelle il analyse la structure des formes créées par l'érosion. Cette étude a contribué au développement de modèles de formation de reliefs et de structures dans les paysages.

L'analyse des reliefs en géomorphologie devient plus quantitative au début du 20^{ème} siècle, à l'aide de modèles mathématiques et des données physiques pour analyser les processus en jeu. En se basant sur des données provenant de mesures sur le terrain ou d'expériences en laboratoire, cette analyse permet de mieux décrire et prédire l'évolution dans le temps des paysages. Des principes provenant de la mécanique des fluides et de celle des solides sont utilisés. La thèse de Hjulström [38] contient une des premières études quantitatives de processus géomorphologiques. Dans la seconde partie du 20^{ème} siècle, des modèles plus complets commencent à être développés, décrivant l'évolution de différentes quantités pour de nombreux types de paysages. Horton [39] développe des lois empiriques décrivant le développement de réseaux de rivières en fonction de paramètres liés à la forme des paysages et à la taille des rivières. Ses travaux ont contribué au développement de modèles de réseaux de rivières discrets, décrits plus tard dans [61]. Dans [47], une étude des processus liés à l'écoulement de l'eau en géomorphologie est menée, qui utilise des données provenant du terrain et d'expériences en laboratoire.

De nombreuses lois sont utilisées dans ces différentes études, qui utilisent parfois plusieurs versions d'une même loi, les choix de modélisation étant multiples. Par exemple, dans leur article [70] Tucker et Bras proposent cinq modèles d'évolution du paysage et en étudient les différences. Plus récemment, une analyse des lois et modèles proposé dans la littérature par Chen, Darbon et Morel [12] synthétise les travaux précédents en proposant trois modèles avec des niveaux de complexité différents.

Depuis les années 1970, des modèles numériques d'évolution du paysage sont utilisés pour permettre de mieux comprendre l'origine des paysages, et de prédire

leur évolution future. Ces modèles peuvent se servir des données réelles provenant des modèles numériques de terrain (DEM en anglais), qui représentent la topographie d'une zone donnée. Ces données proviennent de mesures sur le terrain ou de satellites d'observations, et peuvent être obtenues par plusieurs techniques : radar, photographies, GPS, triangulation, laser. Les données doivent être traitées pour en extraire les informations pertinentes, comme par exemple la localisation des réseaux de canaux [57] ou la détection des glissements de terrains [52].

Dans la section suivante, nous listons des lois empiriques et physiques en géomorphologie, qui permettent de modéliser l'aspect des reliefs ainsi que leur évolution au cours du temps.

1.3 Description des lois constitutives

Nous nous plaçons dans un cadre bi-dimensionnel, toutes les inconnues dépendent du temps $t \in \mathbb{R}^+$ et de leur position sur le plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Voici une liste des principales variables intervenant dans les modèles d'évolution du paysage.

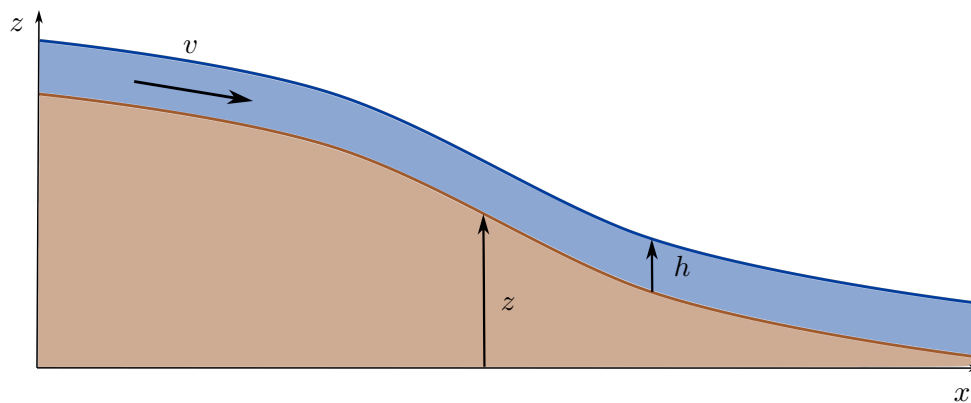


FIGURE 1.2 – Schéma représentant une coupe transversale d'un relief, la hauteur du sol est z . De l'eau se déplace à la surface du sol, son flux est q et sa hauteur est h .

- z représente la hauteur de la surface du sol.
- h est la hauteur de l'eau, et donc $h + z$ correspond à l'élévation de la surface libre.
- c représente la concentration de l'eau en sédiments, supposée ici constante sur la hauteur de l'eau.
- $v \in \mathbb{R}^2$ décrit la vitesse de l'eau.
- $q = hv$ est le débit d'un cours d'eau par unité de largeur, et Q est le débit total traversant une section transversale d'un canal. q_s est le flux de sédiments, qui sont déplacés par le fluide.
- w_c représente la largeur d'un canal, donc $Q = qw_c$.

- A est l'aire de drainage ou le bassin versant d'un canal ou d'un point (voir Figure 1.3), qui représente la superficie totale du territoire dont les eaux se déversent vers ce canal / point.

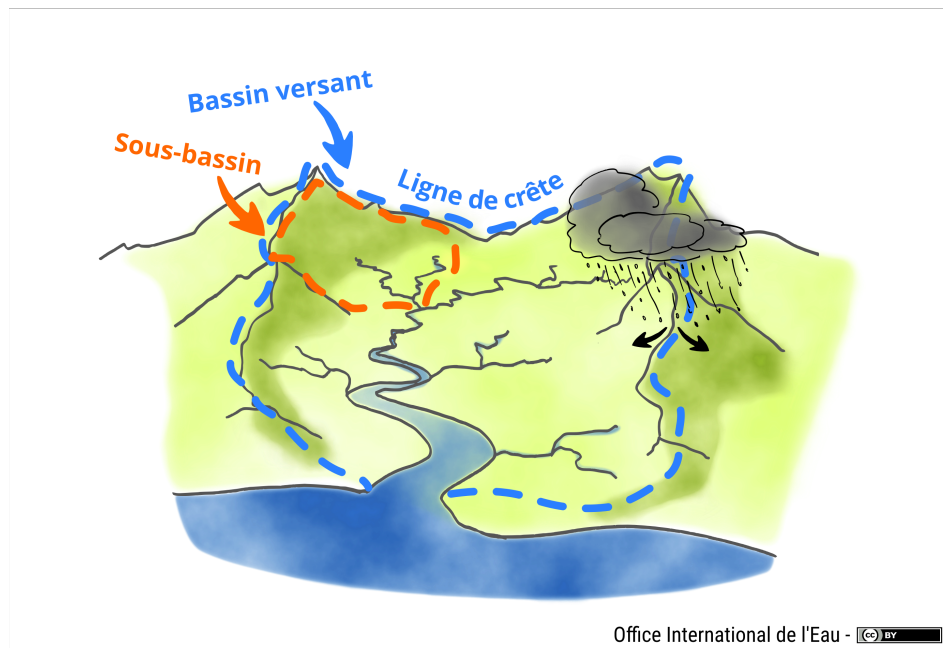


FIGURE 1.3 – Schéma représentant un relief, ainsi que le bassin versant d'une rivière. Ce bassin est délimité par une ligne de crête, l'eau qui circule à l'intérieur s'écoule toujours par le bas de la rivière.

1.3.1 Lois empiriques

Dans le domaine de la géomorphologie et de l'hydrologie, de nombreuses lois de comportement empiriques ont été établies. Une loi empirique est une relation entre plusieurs grandeurs, qui est déterminée en observant des paysages actuels. Dans cette partie, nous listons quelques-unes des lois empiriques les plus utilisées. Ces lois sont valables pour des régimes permanents, c'est-à-dire quand le système est stable, qu'il n'évolue pas ou peu dans le temps.

- Certaines caractéristiques hydrauliques de l'écoulement d'un fluide dans un canal sont reliées par une loi de puissance : sa largeur, sa hauteur d'eau ainsi que la vitesse de l'eau y circulant dépendent du débit total du canal :

$$w_c = \alpha Q^b, \quad h = \beta Q^f, \quad v = \gamma Q^m, \\ b + f + m = 1, \quad \alpha\beta\gamma = 1.$$

Ces relations sont décrites par le terme "géométrie hydraulique", et sont étudiées dans [45]. Elles sont observées pour des canaux dont la forme a atteint un état d'équilibre. Les valeurs des constantes b , f , m , α , β , γ dépendent d'autres caractéristiques du canal (végétation, pente de la surface, type de sol...). Un canal dont le débit augmente de manière permanente s'élargira, et la hauteur ainsi que la vitesse de l'eau y circulant augmenteront. Ces augmentations sont toutefois moins importantes que l'augmentation du débit, car les coefficients b , f et m sont plus petits que 1.

- La relation $Q = CA^m$ (avec $C > 0$ une constante) lie le débit d'un canal à son aire de drainage [46]. En pratique, une partie de l'eau présente dans le bassin versant disparaît par évaporation ou infiltration avant d'atteindre la portion du canal considérée, donc $m < 1$.
- La loi de Gauckler-Manning [16] a été développée par Gauckler en 1867 [32], puis indépendamment par Manning en 1890 [50], et estime la vitesse de l'eau moyenne dans un canal ouvert (écoulement à surface libre) en régime stationnaire. Elle est donnée par

$$v = CR^{1/3}|\nabla z|^{1/2},$$

où R est le rayon hydraulique du canal, $C > 0$ est une constante. Il est défini par $R = A_c/P$ avec A_c l'aire de la coupe transversale du canal, et P est le périmètre de la partie mouillée de la coupe transversale du canal (voir Figure 1.4).

- La loi de Hack [37] relie la longueur d'un cours d'eau L , avec l'aire de drainage :

$$L = CA^k,$$

avec $C > 0$ une constante.

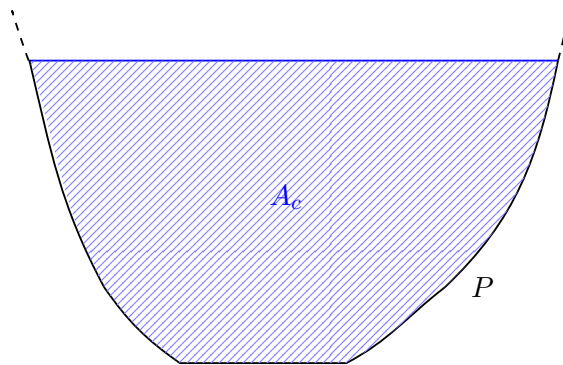


FIGURE 1.4 – Schéma représentant la coupe transversale d'un canal. A_c est l'aire de cette coupe, et P est le périmètre de la partie mouillée du canal.

Lois empiriques d'évolution des sédiments Dans le cas de l'érosion de la surface du sol sous l'effet de l'écoulement de l'eau, deux phénomènes coexistent :

le transport des sédiments par l'eau, ainsi que le creusement du sol par l'eau qui transforme une partie de la surface en sédiments, qui seront transportés par le premier processus [42]. Quand le premier phénomène prédomine, ce qui se produit par exemple dans des fleuves qui charrient des sédiments, on parle de régime limité par le transport ("transport-limited"). Dans ce cas, une couche de sédiments est présente à la surface du sol, qui est déplacée par l'eau selon le flux q_s . Plus haut dans les montagnes, les ruisseaux ou rivières ne transportent que peu de sédiments, donc le second phénomène prédomine : on parle de régime limité par le détachement ("detachment-limited"). Dans ce régime, on suppose que les sédiments arrachés à la surface sont en suspension dans l'eau. Le processus limitant l'érosion provient donc de la friction de l'eau sur la surface du sol, qui creuse cette dernière.

Dans le cadre d'une érosion limitée par le transport, le flux de sédiments circulant à la surface sur sol est communément donné par la loi empirique déterminée par Kirkby [42] :

$$q_s = C|q|^m|\nabla(h+z)|^n\frac{q}{|q|},$$

qui relie le flux de sédiments q_s au flux de l'eau q . Cette loi a été longuement étudiée et est utilisée par de nombreux auteurs en géomorphologie, les constantes m et n dépendant du type de sédiments. Quand l'érosion est limitée par le détachement, l'équivalent de cette loi est une loi d'érosion [56] : le flux de sédiments est égal au flux de l'eau ($q_s = q$) et la quantité de sédiment arraché à la surface est donnée par :

$$\partial_t z = -\beta|q|^m|\nabla(h+z)|^n. \quad (1.1)$$

1.3.2 Lois physiques

Nous nous intéressons maintenant aux lois présentes dans la littérature qui sont basées sur des théories physiques, et qui gouvernent l'évolution de la surface du sol, de l'eau et des sédiments présents dans l'eau.

Lois gouvernant l'écoulement de l'eau Dans les modèles géomorphologiques, les échelles de temps et d'espace considérées sont assez grandes, donc l'évolution de l'eau n'a pas besoin d'être décrite très précisément et à une petite échelle. Les modèles utilisent généralement une équation assez simple pour décrire l'évolution de l'eau, ce qui permet d'obtenir un modèle qu'il est possible d'étudier théoriquement, sans utiliser trop d'outils mathématiques. Les deux hypothèses qui sont généralement faites sont les suivantes :

– Conservation de la masse :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r,$$

où r est un terme source. Cette équation décrit la conservation de la masse d'eau, transportée à une vitesse v .

- La vitesse de l'eau v est dirigée dans la direction de la pente de la surface ∇z ou de celle de l'élévation $\nabla(z+h)$ [67], [65] :

$$\frac{v}{|v|} = \frac{\nabla z}{|\nabla z|}, \quad \text{ou} \quad \frac{v}{|v|} = \frac{\nabla(z+h)}{|\nabla(z+h)|}.$$

L'expression de la vitesse de l'eau peut prendre différentes formes. Dans [71], son expression est déduite de l'équation de Manning :

$$v = -\frac{h^{2/3}\nabla(z+h)}{n|\nabla(z+h)|^{1/2}},$$

avec $n > 0$ une constante. Cette expression est parfois généralisée [66], en choisissant des exposants différents pour les termes h et $\nabla(z+h)$. Dans [65], [67], l'expression choisie pour v est plus simple :

$$v = -\nabla(z+h).$$

Un modèle plus réaliste utilise les équations de Saint Venant, qui modélisent le comportement de l'eau en eaux peu profondes. Ce choix est fait par exemple dans [41], dans ce cas l'évolution de la vitesse v est donnée par l'équation :

$$\partial_t v + \operatorname{div}(v \otimes v) + g\nabla(z+h) = -c_f^2 \frac{v|v|}{h^{1/3}},$$

le terme de droite étant un terme de friction de type Manning. Cette équation traduit la conservation de la quantité de mouvement.

Lois d'évolution de l'élévation de la surface La surface du sol peut évoluer en fonction de plusieurs phénomènes. Tout d'abord, l'équation d'Exner décrit la conservation de la masse des sédiments dans le lit d'une rivière.

$$\partial_t z = -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div}(q_s), \tag{1.2}$$

ε_0 étant la densité de tassement des particules de sédiments. Cette équation décrit l'évolution de la hauteur de la surface du sol en fonction du flux de sédiments, qui forment la partie haute de cette surface.

Ensuite, des phénomènes agissent sur les reliefs à des échelles de temps géologiques : le fluage ainsi que le soulèvement tectonique. Le soulèvement tectonique est modélisé par un terme source u positif, décrivant l'élévation de la surface dans le temps : $\partial_t z = u$. Le fluage (ou reptation), quand à lui, est une loi de diffusion de la surface du sol, qui a tendance à s'aplatir sous l'effet de la gravité. Le flux du sol, noté \tilde{q}_s évolue alors selon l'équation $\tilde{q}_s = -D\nabla z$, qui combinée avec l'équation d'Exner permet d'obtenir l'équation d'évolution de la surface z sous l'action du fluage :

$$\partial_t z = K\Delta z,$$

en notant $K = D/\varepsilon_0$.

Lois gouvernant l'évolution des sédiments Dans la plupart des modèles en géomorphologie, la quantité de sédiments présents dans l'eau n'est pas prise en compte. Dans le cas d'un régime limité par le transport, les modèles considèrent que la quantité de sédiments présents dans l'eau est supérieure à la capacité de transport de l'eau. Par conséquent, l'évolution du système dépend seulement de la capacité de transport de l'eau, et non de la quantité de sédiments présents dans l'eau. L'équation d'Exner (1.2), combinée à une loi empirique du flux de sédiments permet alors de modéliser l'évolution du relief dans le temps. Pour un régime limité par le détachement de la surface, l'évolution du relief en fonction de l'érosion est donnée par l'équation (1.1).

Ces modèles sont néanmoins limités dans certains cas. Tout d'abord, le fait d'utiliser une loi empirique dans l'équation d'Exner supprime la propriété de conservation de la quantité de sédiments. Ensuite, les modèles ne sont valables que dans un seul régime (limité par le transport ou par le détachement), ils manquent donc de flexibilité. L'ajout d'une variable modélisant la quantité de sédiments présents dans l'eau permet d'améliorer ces modèles. Il est même possible de séparer cette variable en deux, une donnant la quantité de sédiments présents dans l'eau, et l'autre donnant la quantité de sédiments posés sur la surface, voir d'ajouter d'autres couches pour des modèles nécessitant plus de précision [18]. Ces différentes couches permettent d'obtenir un modèle valable pour une combinaison de régimes limités par le transport et par le détachement. Toutefois, l'ajout de telles variables augmente la complexité du modèle, nous allons donc présenter un modèle avec une seule couche, dont la concentration est dénotée λ . Cette variable suit une loi de conservation :

$$\partial_t \lambda + \operatorname{div}(\lambda v_\lambda) = E - s\lambda.$$

Les sédiments sont transportés à une vitesse v_λ , qui est égale à la vitesse de l'eau v dans le cas de sédiments en suspension dans l'eau [12], et qui est plus faible si les sédiments forment une couche posée sur la surface du sol (à cause des forces de friction). Le terme E représente l'ajout de sédiments par l'érosion de la surface, il peut être donné par la loi empirique $E = |q|^n |\nabla(z + h)|^n$. Enfin, le terme $s\lambda$ provient de la sédimentation, les sédiments entraînés par la gravité se déposent sur la surface. Dans le cas de modèles à plusieurs couches, des termes sources représentent les échanges de sédiments entre les couches voisines.

Conclusion sur les modèles existants Une grande diversité de modèles existe, utilisant des lois empiriques et/ou physiques. Ces modèles peuvent être de différentes complexités, du modèle décrivant seulement l'évolution de la hauteur du sol z , jusqu'au modèle complet décrivant l'évolution de l'eau et de différentes couches de sédiments. Dans la section suivante, nous allons décrire les choix faits pour le modèle étudié dans cette thèse, qui sera un compromis entre un modèle suffisamment simple pour en faire une étude mathématique approfondie, mais assez complexe pour représenter qualitativement la réalité.

1.4 Description du modèle

Dans cette section, nous décrivons le modèle étudié dans cette thèse, et détaillons son obtention en choisissant certaines lois empiriques et physiques. Les quantités modélisées sont la topographie décrite par sa hauteur z , l'eau décrite par sa hauteur h et sa vitesse v , ainsi que la concentration c de sédiments dans l'eau. Le modèle doit décrire l'évolution de la hauteur du sol sur un domaine de \mathbb{R}^2 , en prenant en compte les effets d'érosion et de sédimentation causés par l'écoulement de l'eau, ainsi que l'effet de fluage. Notre objectif est de mettre en évidence des mécanismes pouvant mener à la formation de motifs que l'on peut observer dans la nature, là où le relief a été modelé par l'écoulement d'eau. Ces reliefs peuvent être des vallées, des cours d'eau de taille variable pouvant aller de la rigole à la rivière, ou des réseaux de canaux.

1.4.1 Modèle d'écoulement d'eau

Compte tenu des échelles étudiées, nous allons considérer que l'évolution de l'eau s'apparente à un problème bi-dimensionnel. En effet, l'échelle d'espace horizontale considérée est assez grande, donc la hauteur de l'eau est beaucoup plus petite que la taille du domaine considéré, et la vitesse verticale est négligeable devant la vitesse horizontale. Le mouvement de l'eau est donc modélisé par les équations bidimensionnelles d'écoulement en eaux peu profondes. Ces équations s'obtiennent à partir des équations d'Euler incompressible, en les intégrant sur la hauteur du fluide. Il faut ensuite ajouter des conditions à la frontière entre l'eau et le sol, ainsi qu'à la surface libre. En notant $(v, w) \in \mathbb{R}^3$ la vitesse du fluide en dimension 3, la condition cinématique à la surface libre s'écrit :

$$\partial_t(h + z) + v(h + z) \cdot \nabla(h + z) = w(h + z). \quad (1.3)$$

Cette condition décrit le fait que la surface de l'eau varie dans le temps selon la composante normale à la surface de la vitesse du fluide, car cette normale (intérieure) est $(\partial_x(z + h), \partial_y(z + h), -1)$. Ensuite, à la surface du sol on fait l'hypothèse que la vitesse normale à la surface du sol est nulle, donc la condition s'écrit :

$$v(z) \cdot \nabla z - w(z) = 0. \quad (1.4)$$

Les équations bidimensionnelles d'écoulement de l'eau sont alors obtenues en supposant que la composante horizontale de la vitesse v est indépendante de la hauteur, que la composante verticale de la vitesse w est très petite devant v , et que la pression est proportionnelle à la gravité. Ces équations décrivent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r, \\ \partial_t(hv) + \operatorname{div}(hv \otimes v) + gh \nabla(z + h) = -c_f^2 \frac{v|v|}{h^{1/3}}, \end{cases} \quad \forall t > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.5)$$

où g désigne la pesanteur à la surface de la Terre, c_f est un coefficient de friction, et r est un terme source modélisant des chutes de pluie, ou l'injection d'eau dans un dispositif expérimental. Le terme de friction $-c_f^2 v|v|/h^{1/3}$ est heuristique, et les coefficients ont été obtenus expérimentalement, comme décrit dans [10] au chapitre 16 (voir le chapitre 4 pour les valeurs de c_f , le coefficient de Gauckler–Manning). Compte tenu des échelles de temps et d'espace, on néglige l'inertie dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement : la friction et les termes de pesanteur s'équilibrent :

$$gh\nabla(z+h) = -c_f^2 \frac{v|v|}{h^{1/3}} \iff v = -\frac{\sqrt{gh^{4/3}}}{c_f} \frac{\nabla(z+h)}{\sqrt{|\nabla(z+h)|}}.$$

Cette expression de la vitesse est connue comme la formule de Gauckler–Manning–Strickler [32, 50], une formule empirique pour les écoulements à surface libre qui sont gouvernés par la gravité.

L'écoulement du fluide est donc décrit par le système :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r, \\ v = -\frac{\sqrt{gh^{4/3}}}{c_f} \frac{\nabla(z+h)}{|\nabla(z+h)|^{1/2}}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Dans le cas d'un écoulement sur un plan incliné d'un angle θ , on peut simplifier l'écriture en écrivant $z(t, x, y) := \tan(\theta)(L_x - x) + \tilde{z}(t, x, y)$. Le plan est incliné dans la direction x , et L_x est sa longueur. En supposant que le gradient de l'élévation de l'eau $\nabla(h + \tilde{z})$ est petit devant le gradient de la pente $\tan \theta$, un développement limité permet d'écrire l'approximation :

$$\begin{aligned} v_1 &\approx \gamma(h) \sqrt{\tan(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma(h)}{\sqrt{\tan \theta}} \partial_x(h + \tilde{z}), \\ v_2 &\approx -\frac{\gamma(h)}{\sqrt{\tan \theta}} \partial_y(h + \tilde{z}), \end{aligned}$$

où $\gamma(h) = \frac{\sqrt{gh^{4/3}}}{c_f}$. Dans la suite, on utilisera une expression un peu plus simplifiée pour la vitesse du fluide : on suppose qu'elle est proportionnelle au gradient de l'élévation de la surface libre $h + z$:

$$v = -V\nabla(h+z),$$

où $V > 0$ est une constante, correspondant à une vitesse caractéristique du fluide dans des conditions données. Cette formule est utilisée dans [12], et permet de réduire les difficultés dans les études théoriques et numériques de l'évolution de la hauteur du fluide. Elle vérifie deux hypothèses physiques :

- Quand la hauteur de l'eau h est constante, la vitesse de l'eau est proportionnelle à la pente ∇z ,
- L'eau tend à s'aplatir en s'écoulant, en raison du terme de diffusion $\operatorname{div}(h\nabla h)$. En particulier, $v = 0$ quand la surface libre est horizontale (au repos).

Ainsi, l'équation décrivant l'évolution du fluide dans le temps que nous utiliserons dans ce manuscrit est :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r \\ v = -V\nabla(h+z) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

1.4.2 Équation d'évolution de la concentration de sédiments

Sous l'effet de l'érosion, une partie des sédiments présents dans le sol se dissolvent et sont transportés dans l'eau. On note c la concentration de sédiments dans le fluide, qui est décrite sur le domaine $\{(x, y, \zeta) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Omega, \zeta \in [z(t, x, y), (z + h)(t, x, y)]\} \subset \mathbb{R}^3$, à $t \geq 0$ fixé. On considère que les sédiments en suspension dans l'eau suivent une loi de conservation de la masse, et sont transportés à la même vitesse que l'eau. On obtient l'équation

$$\partial_t c + \operatorname{div}(c(v, w)) = D \Delta c, \quad (1.8)$$

où (v, w) est la vitesse de l'eau, et $D \geq 0$ une constante de diffusion. Cette équation est l'équation d'advection-diffusion pour la concentration, à laquelle on va ajouter des conditions au fond et à la surface libre,

$$D\nabla c \cdot \vec{n}|_z = (0, 0, \rho_s(E - S)) \cdot \vec{n}(z) = \rho_s(E - S), \quad \nabla c \cdot \vec{n}|_{z+h} = 0, \quad (1.9)$$

où $\vec{n}(z)$ et $\vec{n}(z+h)$ sont respectivement la normale à la surface du sol z et à la surface libre $z+h$, et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{n}(z) &= \frac{(\partial_x z, \partial_y z, -1)}{\sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2}}, \\ \vec{n}(z+h) &= \frac{(\partial_x(z+h), \partial_y(z+h), -1)}{\sqrt{1 + (\partial_x(z+h))^2 + (\partial_y(z+h))^2}}. \end{aligned}$$

La première condition de l'équation (1.9) décrit le flux de sédiments au fond de l'eau, qui est proportionnel à ρ_s , la masse volumique des sédiments. E et S sont des variables positives, décrivant respectivement le flux de sédiments du sol vers l'eau, et celui de l'eau vers le sol. La seconde condition décrit le fait qu'il n'y a pas de flux de sédiments entre la surface de l'eau et l'extérieur.

L'équation (1.8) est en trois dimensions, et posée dans un domaine variable. Pour simplifier, nous allons l'intégrer sur la hauteur de fluide $[z, z+h]$ afin d'obtenir une équation en deux dimensions et s'affranchir de la surface libre.

$$\begin{aligned} &\partial_t \left(\int_z^{z+h} c \right) - c(z+h) \partial_t(z+h) + c(z) \partial_t z + \operatorname{div} \left(\int_z^{z+h} cv \right) \\ &\quad - c(z+h) v \cdot \nabla(z+h) + c(z) v \cdot \nabla(z) + cw(z+h) - cw(z) \\ &= D \left(\operatorname{div} \left(\int_z^{z+h} \nabla c \right) - \nabla c(z+h) \cdot \nabla(z+h) + \partial_z c(z+h) \right. \\ &\quad \left. + \nabla c(z) \cdot \nabla(z) - \partial_z c(z) \right). \end{aligned}$$

Comme la vitesse horizontale v est indépendante de la hauteur z , et en notant

$$\bar{c}(t, x, y) = \frac{1}{h(t, x, y)} \int_{z(t, x, y)}^{(h+z)(t, x, y)} c(t, x, y, \zeta) d\zeta,$$

la concentration moyenne sur la hauteur, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t(\bar{c}h) + \operatorname{div}(\bar{c}hv) &= c(z+h) (\partial_t(z+h) + v \cdot \nabla(z+h) - w(z+h)) \\ &\quad - c(z) (z_t + v \cdot \nabla z - w(z)) + D \operatorname{div} \left(\int_z^{z+h} \nabla c \right) \\ &\quad + D \left(\sqrt{1 + |\nabla(z+h)|^2} \nabla c \cdot \vec{n}(z+h) - \sqrt{1 + |\nabla(z)|^2} \nabla c \cdot \vec{n}(z) \right) \\ &= c(z+h) (\partial_t(z+h) + v \cdot \nabla(z+h) - w(z+h)) \\ &\quad - c(z) (z_t + v \cdot \nabla z - w(z)) + D \operatorname{div} \left(\int_z^{z+h} \nabla c \right) + \rho_s(E - S). \end{aligned}$$

La dernière égalité a été obtenue en utilisant les conditions au fond et à la surface libre (1.9). Ensuite on utilise la condition cinématique à la surface libre (1.3) et la condition au fond (1.4) pour obtenir l'équation sur la concentration moyennée en hauteur \bar{c} :

$$\partial_t(\bar{c}h) + \operatorname{div}(\bar{c}hv) = D \operatorname{div} \left(\int_z^{z+h} \nabla c \right) + (c(z+h) - c(z)) \partial_t z + \rho_s(E - S). \quad (1.10)$$

Cette équation n'est pas fermée, elle dépend de la concentration non moyennée c . Pour fermer l'équation, il faut exprimer c en fonction des autres quantités \bar{c} , h , z . Pour cela, nous allons faire une hypothèse sur le profil de concentration sur la hauteur d'eau. Comme on se place dans un cadre d'eaux peu profondes, $h \ll 1$ donc $c(z+h) - c(z) \approx h \nabla c \ll 1$, c'est-à-dire que c varie peu sur la tranche de fluide. De plus, la vitesse d'évolution de la hauteur de la surface $\partial_t z$ est de l'ordre de $E - S$, ainsi :

$$|(c(z+h) - c(z)) \partial_t z| \ll \rho_s |E - S|.$$

Pour la même raison, on peut supposer que la concentration est constante sur la hauteur : $c(x, y, \zeta) = \bar{c}(x, y)$. Alors l'équation devient :

$$\partial_t(\bar{c}h) + \operatorname{div}(h(\bar{c}v - D \nabla \bar{c})) = \rho_s(E - S). \quad (1.11)$$

Enfin, nous faisons une dernière hypothèse pour la suite : $D \nabla \bar{c} \ll v \bar{c}$, c'est-à-dire que le flux de diffusion des sédiments est très faible devant le flux des sédiments transportés par le fluide. Pour justifier cette hypothèse, nous allons analyser les ordres de grandeur des différents termes de l'équation (1.11). Tout d'abord, la constante de diffusion D est de l'ordre de $10^{-7} m^2/s$, pour différents types de sédiments [69]. Soient $x' = x/L$, $y' = y/L$, $t' = t/T$, $h' = h/H$, $z' = z/H$, $v' = v/V$ et $c' = c/C$, où

L , T , H , V et C sont respectivement la longueur, le temps, la hauteur d'eau, la vitesse, et la concentration caractéristique du problème. L'équation dans les nouvelles coordonnées s'écrit

$$\frac{L^2}{T} \partial_t(c'h') + LV \operatorname{div}(v'\nabla c') = D \operatorname{div}(c'h') + \frac{L^2 \rho_s}{CH} (E - S).$$

On pose alors $T = L/V$, et soit $Pe = \frac{LV}{D}$ le nombre de Peclet du fluide. L'équation s'écrit

$$\partial_t(c'h') + \operatorname{div}(c'h'v') = \frac{1}{Pe} \operatorname{div}(h'\nabla c') + \frac{L\rho_s}{CHV} (E - S).$$

Dans la nature, la longueur caractéristique L est de l'ordre du centimètre ou plus grand, et la vitesse de l'eau est de l'ordre du centimètre par seconde, ou plus grand. On obtient donc

$$\frac{1}{Pe} \leq 10^{-3}.$$

Par conséquent, le terme de diffusion peut être négligé devant les termes d'advection, ce qui permet d'obtenir l'équation suivante.

$$\partial_t(ch) + \operatorname{div}(chv) = \rho_s(E - S). \quad (1.12)$$

1.4.3 Équation d'évolution du relief

Dans cette partie, nous décrivons l'évolution de la hauteur du sol dans le temps. Cette évolution est donnée par l'équation suivante :

$$\partial_t z = K \Delta z - E + S.$$

Les fonctions $E = E(t, x, y)$ et $S = S(t, x, y)$ ont été introduites dans la section précédente, et représentent respectivement la quantité de sédiments arrachée à la surface, et la quantité de sédiments déposée sur cette surface. Le paramètre $K > 0$ est une constante de diffusion, et le terme $K \Delta z$ modélise le fluage / reptation (creep en anglais) du sol. Ce phénomène est un mouvement diffusif de la surface du sol, causé par la gravité, qui agit sur des larges échelles de temps et d'espace. Il est causé par de nombreux processus, tels que les cycles de gel-dégel et de chaud-froid, ou l'activité biologique. On observe dans la nature que les paysages anciens et suffisamment érodés ne présentent pas beaucoup d'arêtes vives, et sont plutôt lisses. C'est dû à cet effet de fluage du sol qui tend à lisser les paysages, comme illustré par le schéma 1.5. On verra dans le chapitre 2 que ce terme de diffusion dans l'équation influe sur le comportement du système et sur la stabilité de certaines de ses solutions, et qu'il détermine le potentiel à former des motifs complexes ou non à la surface du sol.

L'érosion de la surface est causée par le cisaillement entre la couche de fluide et le sol. Sous l'hypothèse d'une vitesse de fluide constante sur la hauteur de la couche de fluide, ceci amène à considérer que l'érosion augmente avec (la norme de) la vitesse

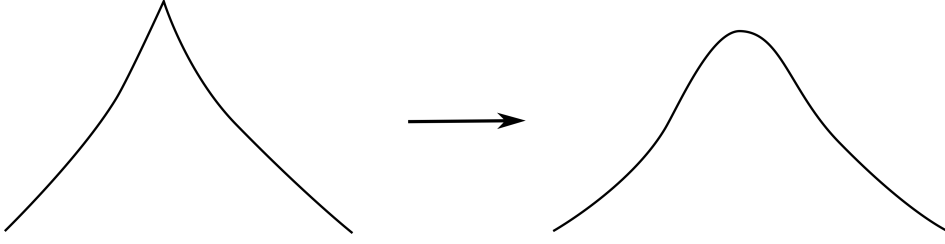


FIGURE 1.5 – Illustration de l'effet de fluage sur un relief. Initialement pointu, le relief est lissé, aplani et s'étend en largeur.

de l'eau, ainsi qu'avec le débit de l'eau. Cette hypothèse, utilisée par exemple dans [40] conduit à l'expression suivante du terme d'érosion E :

$$E(t, x, y) = \alpha |Q|^\mu |v|^\nu.$$

En considérant que $Q = hv$, nous supposons que le taux d'érosion est proportionnel à une puissance de la norme de la vitesse du fluide, ainsi qu'à une puissance de la hauteur d'eau. Par conséquent nous obtenons :

$$E(t, x, y) = e \left(\frac{h(t, x, y)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(t, x, y)|}{V} \right)^n,$$

en définissant e comme étant le taux d'érosion dans le régime $h = H > 0$ et $|v| = V > 0$, qui représentent respectivement une hauteur d'eau et une vitesse d'eau de référence.

Le phénomène de sédimentation se produit quand les sédiments présents dans le fluide se déposent sur le sol, sous l'effet de la gravité. Ce phénomène est plus important quand la concentration de sédiments dans l'eau est plus élevée. Dans un souci de simplicité, nous faisons donc l'hypothèse que le taux de sédimentation est proportionnel à la concentration de l'eau en sédiments, et fixons :

$$S(t, x, y) = s \frac{c(t, x, y)}{c_{sat}}.$$

La constante $s > 0$ représente le taux de sédimentation dans le régime de saturation de l'eau en sédiments $c = c_{sat}$. Finalement, le relief évolue selon l'équation :

$$\partial_t z = K \Delta z - e \left(\frac{h}{H} \right)^m \left(\frac{|v|}{V} \right)^n + s \frac{c}{c_{sat}}. \quad (1.13)$$

1.4.4 Le modèle

En combinant les équations d'évolution sur la hauteur de l'eau $h(t, x)$, la concentration de sédiments présents dans l'eau $c(t, x)$ et la hauteur du sol $z(t, x)$, où $t \geq 0$

et $x \in \mathbb{R}^2$, on obtient le système d'équations aux dérivées partielles suivant.

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r, & (1.14a) \\ \partial_t(ch) + \operatorname{div}(chv) = \rho_s \left(e \left(\frac{h}{H} \right)^m \left(\frac{|v|}{V} \right)^n - s \frac{c}{c_{sat}} \right), & (1.14b) \\ \partial_t z = K \Delta z - e \left(\frac{h}{H} \right)^m \left(\frac{|v|}{V} \right)^n + s \frac{c}{c_{sat}}, & (1.14c) \\ v = -V \nabla(h + z). \end{cases}$$

Dans ce manuscrit, nous allons étudier mathématiquement ce modèle, introduit dans [11]. Les auteurs y présentent ce modèle et mènent des simulations numériques avec une méthode des volumes finis, pour montrer ses capacités à décrire la formation de motifs, comme des réseaux de canaux. Ils listent également une série de questions ouvertes, comme le caractère bien posé des équations ou la stabilité de certains états d'équilibre.

Le système (1.14) est composé de trois équations d'évolution non linéaires et couplées. Il comporte une équation de transport pour c , une équation parabolique pour z , et une équation parabolique dégénérée pour h , avec des termes sources dans les trois équations. Plusieurs pistes d'études de ce système sont possibles. La première est l'étude spectrale de la stabilité du système linéarisé autour de certaines solutions stationnaires. Une autre perspective de recherche est celle du caractère bien posé du système, qui a été laissé ouvert dans [11]. Des difficultés apparaissent dans ces études. Tout d'abord, le nombre de paramètres est assez important, ce qui rend difficile l'identification du rôle de chaque terme de l'équation dans la formation de reliefs à la surface. Également, la présence possible de zones sèches à la surface du sol complique l'étude théorique du système. Une zone sèche est une zone du domaine dans laquelle la hauteur de l'eau s'annule. En présence d'une zone sèche, le terme régularisant $\operatorname{div}(h \nabla h)$ dans l'équation (1.14a) s'annule et rend l'équation sur h parabolique dégénérée. D'autre part, la résolution du système d'équation par une méthode des volumes finis devient beaucoup plus complexe lorsque la hauteur d'eau s'annule en certains points. Dans cette situation, il est possible de résoudre le système en calculant la forme de la frontière entre les zones sèches et humides, mais cela entraîne une augmentation de la complexité et du temps de calcul du schéma numérique.

Dans cette thèse, nous contribuons à quelques unes des questions citées précédemment. Tout d'abord, nous étudions le caractère bien posé du système (1.14), en se plaçant dans des espaces de Sobolev adéquats. Ce résultat est valable sous des hypothèses de régularité pour les conditions initiales, sous l'hypothèse que la hauteur d'eau initiale ne se rapproche pas de zéro, ainsi qu'en supposant que la constante de fluage K est suffisamment grande. Ensuite, nous réalisons l'étude de la stabilité linéaire du système autour de solutions stationnaires. Ceci permet de montrer que le comportement du système est dirigé principalement par deux phénomènes : l'érosion et le fluage. Le terme d'érosion tend à creuser le sol là où il a déjà été creusé, car

la vitesse de l'eau augmente en arrivant sur une zone creusée. Ceci déstabilise le système, les perturbations sont amplifiées et le sol se creuse de plus en plus dans certaines zones. De l'autre côté, le phénomène de fluage a tendance à lisser le sol, s'opposant ainsi au creusement de rigoles et de canaux. Nous verrons que la valeur de la constante de fluage K joue un rôle déterminant pour la stabilité du système. Si cette constante est en dessous d'un certain seuil, des canaux peuvent se former à la surface du sol, tandis qu'au-dessus de ce seuil la surface est lissée au cours du temps et les perturbations disparaissent. Cette dépendance en K a été étudiée pour un système plus simple dans [7], qui met en évidence l'existence d'un indice de chenalisation décrivant la tendance du système à former des canaux dans le sol. Cet indice est proportionnel à K , et les auteurs montrent que des canaux peuvent se former seulement si l'indice est plus petit qu'une valeur seuil. Nous étudions également les solutions du système (1.14) en calculant des solutions approchées avec des méthodes numériques. La première méthode utilisée est une méthode des volumes finis, qui permet de calculer des solutions approchées du système en l'absence de zones sèches. Dans le cas contraire, cette méthode est plus compliquée à mettre en place, nous utilisons alors une autre méthode numérique, basée sur le principe des méthodes particulaires. Comme nous le verrons dans la suite, les échelles de temps considérées sont très grandes en raison d'une vitesse d'érosion lente. Ceci nous amène à considérer une version stationnaire des équations d'évolution du fluide et des sédiments. Nous développons dans cette thèse une méthode particulière adaptée aux équations stationnaires, et démontrons la convergence du schéma numérique.

1.5 Méthodes de résolution numérique

Dans cette section, nous décrivons certaines méthodes de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, et la façon dont nous pouvons les utiliser pour résoudre le système d'évolution du paysage. De telles méthodes transforment un système d'EDP en équations discrètes, dont la solution est une approximation de la solution exacte du système d'EDP. On dit qu'un schéma numérique converge si l'écart entre la solution exacte et la solution calculée par le schéma tend vers 0 quand les paramètres de discrétisation convergent vers 0. Certaines méthodes utilisent un maillage, comme par exemple la méthode des différences finies qui est la plus simple à mettre en oeuvre. Les méthodes avec maillage consistent à résoudre un système discret d'équations, calculé en utilisant des relations entre les fonctions inconnues sur le maillage. On peut citer la méthode des éléments finis qui est très largement utilisée en mécanique, ainsi que la méthode des volumes finis qui sera utilisée dans cette thèse. Des méthodes numériques sans maillage existent aussi, comme les méthodes particulaires. Ce type de méthode sera aussi utilisé dans la suite, et nous décrirons ses avantages et inconvénients, comparé à la méthode des volumes finis.

1.5.1 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une méthode numérique exploitant les valeurs de la fonction inconnue sur un maillage, en utilisant la formulation intégrale de l'équation à discrétiser. Cette méthode peut s'utiliser pour des équations de conservation, des équations elliptiques ou des équations paraboliques. Elle est décrite pour différents types d'équations dans [28], et des résultats de convergence des schémas dans des cas linéaires et non linéaires sont démontrés. La méthode des volumes finis est beaucoup utilisée en mécanique des fluides.

Sur chaque volume du maillage, l'intégrale du terme de divergence est transformée en intégrale sur la frontière du volume, par le théorème de flux-divergence. Si K est un compact de \mathbb{R}^d , alors :

$$\int_K (\operatorname{div} f)(x) dx = \int_{\partial K} f(\gamma) \cdot \vec{n}(\gamma) d\gamma,$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la frontière ∂K . Si L est un compact de \mathbb{R}^d qui partage une partie de sa frontière avec K , l'intégrale

$$\int_{\partial(K \cap L)} f(\gamma) \cdot \vec{n}(\gamma) d\gamma$$

représente le flux circulant entre les volumes K et L . Ce flux correspond, pour une équation de conservation de la masse, à la quantité de matière moyenne déplacée entre les volumes. La figure 1.6 illustre une discrétisation d'un domaine en dimension deux, deux volumes triangulaires y sont représentés ainsi que le flux circulant entre ces volumes.

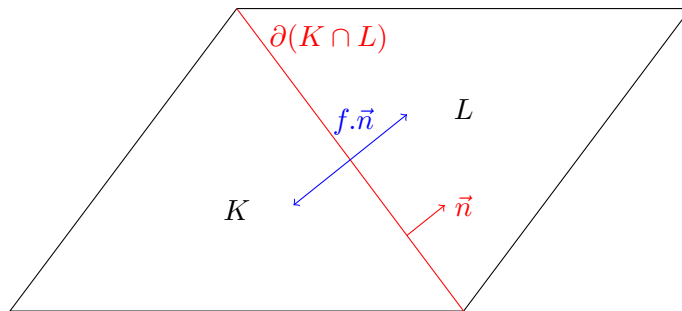


FIGURE 1.6 – Volumes K et L . Leur frontière commune est en rouge, le flux circulant entre ces deux volumes est indiqué en bleu.

Le schéma numérique est construit en discrétisant le domaine en volumes $K \in \mathcal{K}$, puis en intégrant l'équation sur chacun de ces domaines. Il faut ensuite choisir une discrétisation de chacune des intégrales sur les volumes K , et des flux circulant entre chaque volume. Ceci donne un ensemble de relations liant les variables, qui peut être écrit comme un système linéaire dans certains cas (si l'équation est linéaire, ou si le schéma est explicite). Ces relations ne suffisent pas à obtenir une unique

solution, car il manque des conditions sur les frontières du domaine. Ces conditions, appelées conditions au bord ou conditions aux limites, sont choisies en fonction du problème et sont généralement de deux types : de Dirichlet ou de Neumann (ou une combinaison des deux). Une condition de Dirichlet consiste à imposer la valeur de la solution sur le bord du domaine, tandis qu'une condition de Neumann impose la valeur d'une dérivée sur le bord du domaine. Une condition de Dirichlet est utilisée pour la résolution de l'équation de la chaleur sur une barre, si l'on suppose que ses extrémités ($x = 0$ et $x = 1$ par exemple) sont maintenues à une température constante. Comme cette équation dépend du temps, il faut aussi fixer la température initiale : c'est également une condition au bord (en $t = 0$) de Dirichlet. Si l'on considère maintenant une barre parfaitement isolée avec l'extérieur, il n'y a pas de flux de chaleur entre l'objet et l'extérieur. Donc on peut utiliser une condition de Neumann : la dérivée de la température est nulle aux deux extrémités de la barre. Dans le cas linéaire et avec des conditions aux limites adéquates, un schéma numérique aux volumes finis possède une unique solution.

Pour une équation linéaire, la convergence d'un schéma aux volumes finis conservatif (pour lequel le flux entrant est égal au flux sortant entre chaque paire de volumes) est donnée par la combinaison de deux propriétés, la consistance du schéma ainsi que sa stabilité [29]. Un schéma est consistant/stable si son erreur de consistance/stabilité converge vers 0 lorsque la taille du maillage converge vers 0. L'erreur de consistance provient de l'erreur faite dans l'approximation des opérateurs de différentiation, par des formules de Taylor. Ensuite, l'erreur de stabilité est due à la propagation des erreurs à chaque étape, qui peuvent s'amplifier. Si le schéma est instable, une petite erreur à la première itération va progressivement augmenter, jusqu'à rendre la solution approchée très éloignée de la solution exacte. Dans les schémas aux volumes finis explicites, la stabilité du schéma est obtenue à la condition que les pas de temps et d'espace vérifient une condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL). Cette condition limite le pas de temps en fonction d'une constante dépendant du pas d'espace, ainsi que de la vitesse des ondes se déplaçant sur le domaine. La vitesse de convergence est contrôlée par l'ordre de la méthode, le schéma converge plus rapidement quand l'ordre est plus élevé. L'ordre d'une méthode des volumes finis dépend de la discrétisation choisie pour le flux, ainsi que pour les autres termes. Le schéma MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) est un exemple de méthode de volumes finis d'ordre deux ou plus en espace.

La méthode des volumes finis peut être difficile à mettre en place pour certaines équations ou certaines géométries du domaine. Dans le cas où le domaine possède une géométrie complexe, la création du maillage peut s'avérer difficile. Par exemple, si l'on considère l'équation d'évolution d'un fluide sur une surface qui comporte des zones en lesquelles la hauteur de fluide s'annule, le bord du domaine est composé de toutes les courbes formant la frontière entre les zones comprenant du fluide, et les zones sèches. Après avoir maillé le domaine, il faut également définir des conditions aux limites sur chacune des frontières du domaine. D'autre part, certains types d'équations possèdent des solutions qui comportent des chocs, c'est-à-dire des points

en lesquels la solution présente une discontinuité. Ces chocs ne sont généralement pas bien capturés en utilisant des méthodes numériques classiques. Certains schémas comportent de la diffusion numérique, ce qui lisse beaucoup la solution approchée au voisinage des chocs. D'autres schémas sont construits pour éviter cette diffusion numérique, mais ajoutent de fortes oscillations à la solution numérique au voisinage des chocs.

Dans cette thèse, nous allons tout d'abord calculer des solutions approchées au système (1.14) en utilisant une méthode des volumes finis pour résoudre les équations de conservation. Cette méthode est facile à mettre en oeuvre, à condition que la hauteur d'eau soit strictement positive partout sur le domaine. Dans le cas contraire, il serait nécessaire d'ajouter des conditions aux limites sur l'interface entre les zones contenant de l'eau et les zones sèches, ce qui augmenterait la complexité du schéma numérique et le temps de calcul. De plus, pour un schéma explicite classique la hauteur de l'eau doit vérifier $h \geq h_{\min} > 0$ sur tout le domaine et en tout temps. En effet, si h s'approche trop de 0 en certains points, alors les erreurs numériques de la solution approchée peuvent rendre cette solution négative à certains endroits, ce qui n'est plus une solution physiquement acceptable. La figure 1.7 est un exemple de résolution par une méthode des volumes finis de l'équation

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = 0, \quad v = -\frac{1}{\tan \theta} \nabla(h + z), \quad (1.15)$$

$$h(t, 0, y) = h_0 = 0.5 \text{ mm} \quad \forall t > 0, \quad \forall y \in [0, 0.1], \quad (1.16)$$

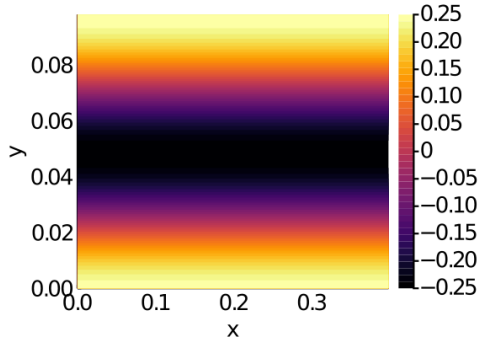
$$h(0, x, y) = h_0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (1.17)$$

sur le domaine $\Omega = [0, 0.4]m \times [0, 0.1]m$, avec :

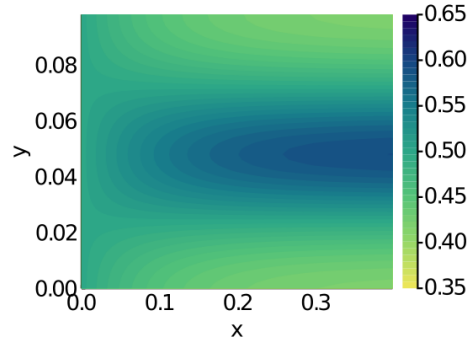
$$z(x, y) = \tan \theta (L_x - x) + \frac{h_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right). \quad (1.18)$$

z représente la hauteur de la surface du sol, qui prend la forme d'un plan incliné d'un angle θ , pour lequel les bords dans la direction y sont un peu relevés. Le domaine Ω est périodique dans la direction y . L'eau traverse le domaine en environ 0.4 secondes. La hauteur de l'eau est constante au temps initial, et la surface du sol étant légèrement concave, cette hauteur augmente dans la partie centrale du domaine quand le temps avance. Après 8 itérations, l'eau atteint un état à peu près stationnaire.

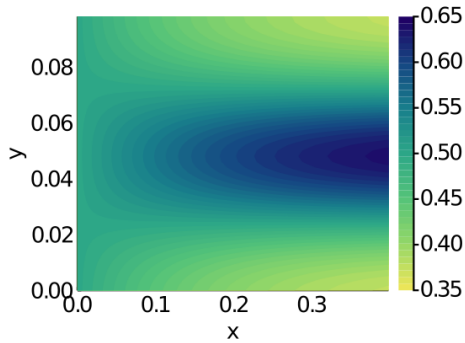
La résolution numérique du système d'évolution du paysage (1.14) est possible par une méthode des volumes finis pour chacune des équations. Néanmoins, comme l'évolution de l'eau se fait sur une échelle de temps beaucoup plus courte que l'érosion du sol, la simulation numérique du système est très coûteuse en temps de calcul car le pas de temps est limité par la condition CFL associée à l'équation. Une solution pourrait consister en l'utilisation d'un schéma numérique implicite, mais un tel schéma est également plus coûteux en temps de calcul en raison du caractère non linéaire des équations. La solution utilisée dans cette thèse est de résoudre



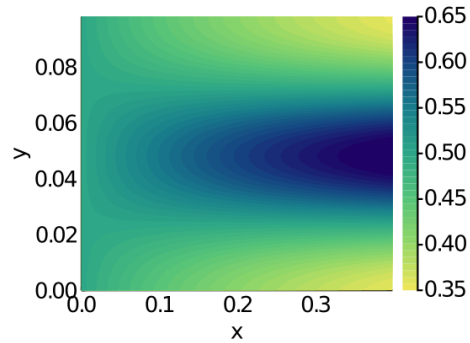
(a) Hauteur du sol comparé au plan incliné, en millimètres.



(b) Hauteur de l'eau après 2 itérations, au temps $T = 0.2$ secondes.



(c) Hauteur de l'eau après 4 itérations, au temps $T = 0.4$ secondes.



(d) Hauteur de l'eau après 8 itérations, au temps $T = 0.8$ secondes.

FIGURE 1.7 – Représentation des valeurs de $z - \tan\theta(L_x - x)$ (la différence entre la hauteur du sol et celle du plan incliné), et de la hauteur de l'eau h calculée par une méthode des volumes finis, à différents temps, sur le domaine Ω . Les échelles sont données par la barre de couleurs à droite de chaque image.

la version stationnaire des équations sur h et c , c'est-à-dire de supposer que l'eau est en régime stationnaire. Nous montrerons que cette hypothèse est justifiée par les grandeurs caractéristiques et les paramètres utilisées dans notre cadre. Nous observerons également que les résultats de simulations numériques obtenus par ces deux méthodes sont très similaires.

1.5.2 Méthode particulière

Les méthodes particulières sont des méthodes numériques sans maillage de type Lagrangien, principalement utilisées pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. La méthode SPH (Smooth Particle Hydrodynamics), la méthode des vortex, et la méthode PIC (Particle-in-cell) sont des exemples de méthodes particulières. La méthode SPH a été initialement créée pour résoudre des problèmes d'astrophysique. Elle a été développée par Gingold et Monaghan [35], et Lucy [49], en 1977. Depuis lors, cette méthode a été utilisée dans divers domaines tels que l'océanographie et

la mécanique des solides déformables. L'étude mathématique des méthodes particulières a commencée dans les années 1980, sous l'impulsion de Pierre-Arnaud Raviart et ses collaborateurs Georges-Henri Cottet et Sylvie Mas-Gallic. En 1987, Mas-Gallic et Raviart [51] font l'analyse mathématique d'une méthode particulière pour résoudre une classe de systèmes d'équations hyperboliques linéaires. Ils prouvent la convergence du schéma numérique à temps continu, dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considérons l'équation hyperbolique suivante :

$$\partial_t u(t, x) + \operatorname{div}(\mathbf{a}u)(t, x) + a_0(t, x)u(t, x) = S(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \quad (1.19)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.20)$$

avec \mathbf{a} , a_0 , $S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Les courbes caractéristiques associées au champ de vecteur \mathbf{a} sont définies par :

$$y'_x(t) = \mathbf{a}(t, y_x(t)), \quad \text{avec } y_x(0) = x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.21)$$

L'idée des méthodes particulières est de considérer le fluide comme une combinaison d'un nombre fini de particules, dont les positions au temps t sont des points $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$. Ces particules interagissent selon une distribution de masse représentée par une fonction, appelée noyau et dénotée ζ , qui représente la force de l'interaction entre les particules voisines. Elles se déplacent dans le domaine à des vitesses $\mathbf{a}(t, x_i(t))$ selon la description lagrangienne de l'écoulement du fluide. La fonction u solution de (1.21) est alors approchée en utilisant la formule de quadrature suivante :

$$u(t, x) \approx \sum_i \omega_i(t) u(x_i(t)) \zeta(x - x_i(t)),$$

où $\omega_i(t)$ est le poids de la particule i au temps t . La figure 1.8 illustre la forme du noyau et les interactions entre les particules.

Les quantités $x_i(t)$ et $\omega_i(t)$ sont initialisées en plaçant des points $x_i(0)$ sur le domaine au temps initial, et en leur associant leur poids $\omega_i(0)$ qui correspond au volume d'espace occupé par la particule (la somme de ces volumes doit être égale au volume du domaine). Si la quantité initiale $x \mapsto u(0, x)$ est constante, les particules peuvent être réparties uniformément sur le domaine, et les poids définis comme tous égaux. Les positions x_i évoluent dans le temps en suivant les courbes caractéristiques, et les poids ω_i ainsi que les quantités $u_i := u(x_i)$ sont également les solutions d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'_i(s) = \mathbf{a}(x_i(s)), & (1.22a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega'_i(s) = (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_i(s)) \omega_i(s), & (1.22b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_i(s) = -u_k(s) [(\operatorname{div} \mathbf{a})(x_i(s)) + a_0(x_i(s))] + S(x_i(s)), & (1.22c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i(0) = x_i^0, \quad \omega_i(0) = \omega_i^0, \quad u_k(0) = u(x_k^0). & (1.22d) \end{cases}$$

Les avantages des méthodes particulières par rapport à des méthodes avec un maillage sont :

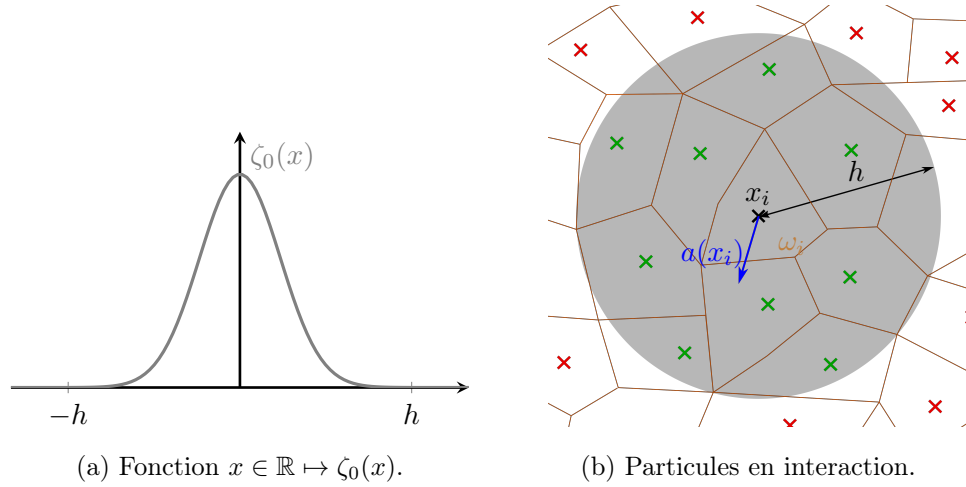
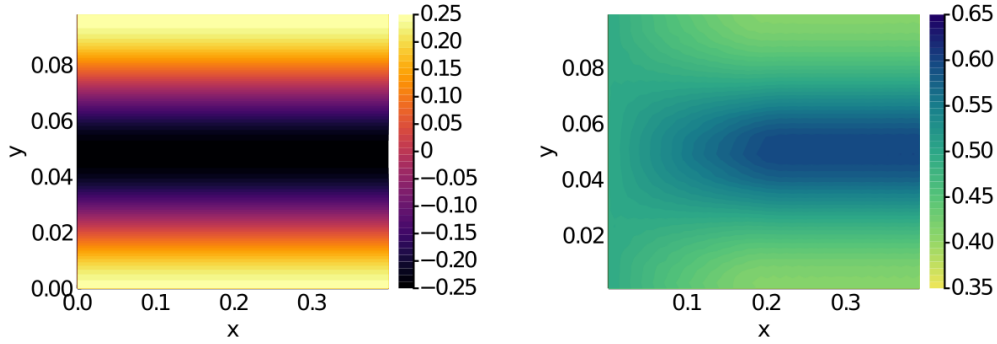


FIGURE 1.8 – Représentation des particules et du noyau en deux dimensions. Le noyau est défini par la fonction $\zeta : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \zeta_0(|x|)$, dont le support est $B(0, h)$. Une particule située à la position x_i est en interaction avec les particules x_j vérifiant $\zeta(x_i - x_j) > 0$ (zone en gris). À la particule x_i est associé son volume w_i et sa vitesse $a(x_i)$.

- En plusieurs dimensions, une précision raisonnable pour ces méthodes peut être obtenue avec beaucoup moins de points de discrétisation que dans une grille.
- Les problèmes ayant une géométrie complexe peuvent être résolus plus facilement, car il n’y a pas besoin de créer un maillage.
- Les interactions fluides - solides sont plus faciles à traiter.

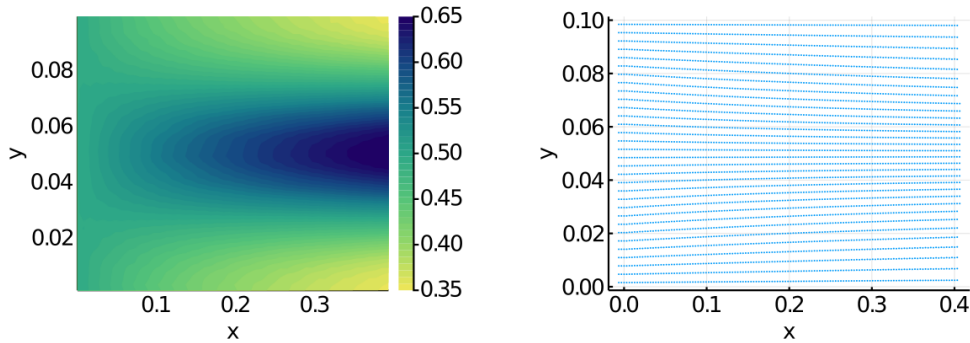
La figure 1.9 illustre la résolution numérique par la méthode particulaire (1.22) de l’équation (1.17)-(1.18), en utilisant les mêmes paramètres que pour la résolution avec une méthode des volumes finis 1.7. La première image 1.9a représente la hauteur de la surface, et les deux suivantes 1.9b-1.9c représentent la hauteur de l’eau calculée après 30 et 100 itérations en temps du schéma. On observe le même comportement qu’avec la méthode des volumes finis, la hauteur de l’eau augmente là où la hauteur du sol est la plus basse : sur la droite d’équation $y = L_y/2$, et vers le bas du domaine $x = L_x$. La dernière figure représente la position des particules sur le domaine après 100 itérations. On observe qu’elles sont un peu plus proches les unes des autres là où la hauteur d’eau est plus grande.

Dans cette thèse, on adapte cette méthode dans un contexte géophysique, pour modéliser l’écoulement de l’eau sur les reliefs. Dans ce contexte, l’eau qui s’écoule est susceptible de provenir de plusieurs sources : de rivières ou de torrents prenant leur source plus haut, ou de la pluie. On pourrait aussi considérer qu’une partie de l’eau s’infiltré dans le sol. Tous ces phénomènes peuvent être difficiles à simuler avec une méthode des volumes finis à cause de la géométrie du domaine et de la présence de zones sèches. En utilisant une méthode particulaire, il suffit de modéliser



(a) Hauteur du sol comparé au plan incliné, en millimètres.

(b) Hauteur de l'eau après 30 itérations, au temps $T = 0.19$ secondes.



(c) Hauteur de l'eau après 100 itérations, au temps $T = 0.64$ secondes.

(d) Position des particules après 100 itérations, au temps $T = 0.64$ secondes.

FIGURE 1.9 – Représentation des valeurs de $z - \tan\theta(L_x - x)$ (la différence entre la hauteur du sol et celle du plan incliné), de la hauteur de l'eau h et de la position des particules sur le domaine Ω . Il y a environ 4000 particules sur le domaine.

l'apport d'eau sur le domaine par un ajout de particules de fluide, et l'infiltration par la disparition de certaines des particules. De plus, les zones sèches sont tout simplement les zones ne contenant pas de particules de fluide, il n'y a pas besoin d'ajouter de condition aux frontières entre les zones sèches et celles contenant de l'eau. Une difficulté déjà évoquée dans la section précédente pour la simulation numérique du système considéré (1.14) est la grande échelle de temps nécessaire pour observer l'effet de l'érosion. Cette difficulté peut se contourner en résolvant les versions stationnaires des équations sur h et c , mais les méthodes particulières ne peuvent être appliquées qu'à des équations d'évolution en temps. Dans cette thèse, nous développons une version alternative des méthodes particulières, qui permet de résoudre des équations hyperboliques stationnaires. Cette méthode permet ainsi de résoudre les équations (2.2a) et (2.2b), en présence de zones sèches sur le domaine.

D'autres types de méthodes particulières existent. La méthode de vortex a été imaginée par Rosenhead en 1931 [62], pour résoudre l'équation d'Euler incompressible. En l'absence d'ordinateurs, ses calculs ont été faits à la main. Cette méthode

a ensuite été développée et implémentée dans les années 1970 pour sa formulation en deux dimensions [15], et dans la fin des années 1980 pour la formulation en trois dimensions [44]. La méthode de vortex est présentée et analysée dans le livre de référence sur le sujet [17], qui donne des applications pour la simulation numérique directe de l'équation d'Euler. En physique des plasmas, la méthode PIC (Particle-in-cell) est utilisée pour résoudre les équations de Vlasov-Poisson ou les équations de Vlasov-Maxwell, et a été développée dans les années 1950 [27]. Ces équations sont des équations d'évolution en 6 dimensions d'espace, ce qui rend très coûteuse une résolution par une méthode avec un maillage. La méthode PIC permet de diminuer le temps de calcul de la solution approchée : elle combine des particules, ainsi qu'une grille qui est utilisée pour calculer les champs électromagnétiques. L'ouvrage [9] présente de façon détaillée cette méthode, donne des résultats de convergence associés, et décrit des applications en astrophysique, en physique des plasmas et pour les semi-conducteurs.

2 Principaux résultats et contributions

Cette thèse se décompose en deux parties, formant chacune un chapitre. Le chapitre 2 est axé sur l'étude de solutions du système (1.14). On donne une preuve du caractère bien posé du système d'équations, puis on étudie la stabilité linéaire du système autour de certaines solutions stationnaires. Enfin, on met en oeuvre des simulations numériques de (1.14) pour illustrer les effets de stabilité/instabilité linéaire sur le système complet. On se place dans un cadre pour lequel la hauteur d'eau ne s'annule pas. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans une revue [6].

Le chapitre 3 porte sur une méthode de résolution numérique de type particulière, pour une certaine classe d'équations hyperboliques stationnaires. Nous développons une méthode particulière pour ces équations stationnaires, qui consiste en une quadrature du domaine par des points représentant des particules de fluide. On démontre la convergence de la méthode, puis on conduit une série de simulations numériques, notamment dans le cas où la hauteur du fluide s'annule. Ensuite, cette méthode est appliquée à la résolution du système d'évolution du paysage (1.14).

2.1 Chapitre 2 : Caractère bien posé et analyse de stabilité d'un modèle d'évolution du paysage

Dans ce chapitre nous étudions mathématiquement le système (1.14), afin de déterminer des conditions dans lesquelles ce système est bien posé. Nous étudions ensuite la stabilité linéaire d'une classe de solutions stationnaires, pour expliquer la formation de certains types de motifs dans le sol.

Le premier résultat est le caractère bien posé du système (1.14) sous certaines conditions.

Théorème 2.1. Soient $m > 0$, $n > 3$ ou $n = 2$, $K > 0$ et $T_0 > 0$. Fixons deux constantes $h_{\text{ref}} > h_{\text{min}} > 0$. Supposons que les données initiales h^0 , z^0 , c^0 satisfont

$$h^0 - h_{\text{ref}}, z^0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}^2), \quad c^0 \in H^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, h^0(x) \geq 2h_{\text{min}}.$$

avec $k = 3$. Supposons également que $r \in L^2_{T_0}(H^k)$, $K h_{\text{min}} - \|h^0\|_{L^\infty}^2 \geq 0$. Alors il existe $0 < T < T_0$ tel que le système (1.14) admet une unique solution (h, z, c) avec

$$h - h_{\text{ref}}, z \in L^2_T(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1}), \quad c \in C_T(H^k).$$

La preuve de la convergence se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous établissons une estimation a priori sur les solutions du système. Les équations sur h et z peuvent être vues comme des équations paraboliques, à condition que $h \geq h_{\text{min}} > 0$ et que $K > 0$. Ceci permet de gagner une dérivée sur les solutions, et est nécessaire pour obtenir une borne sur le terme non linéaire $h^m|v|^n$. L'équation sur c est une équation de transport linéaire. L'estimation a priori est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.2. Soit $(h - h_{\text{ref}}, z, c) \in (L^2_T(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1}))^2 \times C_T(H^k)$ une solution du système (1.14). Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites. Alors il existe $T_1 \leq T$ tel que $h - h_{\text{ref}}$ et z sont bornés dans $C_{T_1}(H^{k+1}) \cap L^2_{T_1}(H^{k+2})$, c est borné dans $C_{T_1}(H^k)$, et satisfont l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\leq e^{Ct} \left(\mathcal{E}(0) + C \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 \right), \\ \int_0^t (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) &\leq C e^{Ct} \left(\mathcal{E}(0) + C \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 \right), \end{aligned}$$

où C est une constante qui dépend de $h^0, z^0, c^0, h_{\text{min}}$, et \mathcal{E} est défini par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (\|h - h_{\text{ref}}\|_{L^2}^2 + \|\nabla h\|_{H^k}^2 + \|z\|_{H^{k+1}}^2 + \|c\|_{H^k}^2).$$

Cette estimation se démontre en utilisant des injections de Sobolev, ainsi que la continuité des solutions. Ensuite, nous construisons une suite de solutions approchées en linéarisant le système :

$$\begin{cases} \partial_t h_{i+1} - \text{div}(h_i \nabla h_{i+1}) - \text{div}(h_{i+1} \nabla z_i) = r(t, x), \\ \partial_t z_{i+1} = K \Delta z_{i+1} + s c_i - e h_i^m |v_i|^n, \\ \partial_t c_{i+1} + v_i \cdot \nabla c_{i+1} = e h_i^{m-1} |v_i|^n - s c_i / h_i - r c_i / h_i, \\ h_i(0, x) = h(0, x), z_i(0, x) = z(0, x), c_i(0, x) = c(0, x), \end{cases}$$

avec $h_0(x) = h(0, x)$, $z_0(x) = z(0, x)$, $c_0(x) = c(0, x)$. Ces équations possèdent des solutions $h_i - h_{\text{ref}}, z_i \in L^2_T(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1})$ et $c_i \in C_T(H^k)$. Nous effectuons alors une estimation uniforme pour cette suite de solutions :

– Les suites $(\partial_t h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\partial_t z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont uniformément bornées dans $L^2_{T^*}(H^k)$.

– La suite $(\partial_t c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L_{T^*}^2(H^{k-1})$.

Ces estimations permettent de montrer que ces suites sont des suites de Cauchy. On montre ensuite que chacun des termes apparaissant dans les équations converge, ce qui permet de conclure que la limite est solution du système. La dernière étape est la preuve de l'unicité de la solution pour une condition initiale donnée, obtenue en établissant une estimation sur la différence entre deux solutions.

La suite du chapitre est consacrée à l'étude de la stabilité du système autour de certaines solutions stationnaires. Afin d'étudier la formation de motifs dans le sol, nous nous intéressons aux solutions stationnaires sur une surface plane, un plan incliné d'un angle θ . Après avoir adimensionné le système, les solutions stationnaires sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in \Omega, \quad \begin{cases} h(t, x, y) = \underline{h} > 0, \\ c(t, x, y) = \underline{c} = \frac{e}{s} \underline{h}^m \tan^n \theta > 0, \\ z(t, x, y) = \tan \theta (L_x - x_1). \end{cases}$$

L'objectif est d'étudier si des perturbations de ces solutions stationnaires diminuent dans le temps, ou si elles sont amplifiées. Dans le premier cas cela signifie que la solution stationnaire est stable, dans le second cas elle est instable. Nous voulons alors déterminer le type d'instabilités du système, ce qui donnera des informations sur les différents motifs qui peuvent apparaître dans le sol. Nous étudions la stabilité linéaire du système autour de ces solutions, c'est-à-dire la stabilité du système linéarisé (et adimensionné) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \tan \theta \partial_x h = \alpha \underline{h} \Delta (h + z), \\ \partial_t c + \tan \theta \partial_x c = \frac{\rho_s}{c_{sat}} \frac{s}{e} \left(\frac{m \underline{c}}{\underline{h}^2} h - \frac{\alpha n \underline{c}}{\underline{h} \tan \theta} \partial_x (h + z) - \frac{c}{\underline{h}} \right), \\ \partial_t z = K \Delta z - \frac{s}{e} \left(\frac{m \underline{c}}{\underline{h}} h - \frac{\alpha n \underline{c}}{\tan \theta} \partial_x (h + z) - c \right), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $\alpha = e/V$. On applique la transformée de Fourier en espace à ce système, qui s'écrit :

$$\partial_t \hat{f} = (A_0 + i\xi A_1 - (\xi^2 + \eta^2) A_2) \hat{f} := A(\xi, \eta) \hat{f},$$

où $f = (h, c, z)^T$, et en notant $a = \frac{s \rho_s}{e \underline{h} c_{sat}}$ et $\bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{c_{sat}}$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{a m \underline{c}}{\underline{h}} & -a & 0 \\ -\frac{a m \underline{c}}{\bar{\rho}_s} & \frac{a \underline{h}}{\bar{\rho}_s} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\tan \theta & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha n \underline{c}}{\tan \theta} & -\tan \theta & -\frac{\alpha n \underline{c}}{\tan \theta} \\ \frac{\alpha n \underline{h} \underline{c}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} & 0 & \frac{\alpha n \underline{h} \underline{c}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \alpha \underline{h} & 0 & \alpha \underline{h} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}.$$

Pour étudier la stabilité linéaire du système, il faut étudier le signe de la partie réelle des valeurs propres de $A(\xi, \eta)$. Le système est stable pour une fréquence $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si les trois valeurs propres de $A(\xi, \eta)$ ont une partie réelle négative. Toutefois, les valeurs propres étant des racines d'un polynôme de degré 3, il n'est pas possible d'obtenir une formule explicite donnant le signe de la partie réelle des valeurs propres, pour des valeurs quelconques des paramètres et de ξ, η . Le théorème suivant donne un critère de stabilité sur le domaine tout entier, selon la valeur de K .

Théorème 2.3. *Si $K = 0$, le système (2.1) est instable. Plus précisément, pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_*^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, le système est stable en cette fréquence si et seulement si*

$$m < \frac{\bar{\rho}_s}{\underline{c}} \quad \text{and} \quad \eta^2 m < \xi^2 (n - m).$$

En particulier, si $n \leq m$ alors le système est instable à toutes fréquences. Si $K > 0$, il existe une constante $\gamma > 0$ indépendante de n telle que le système (2.1) est stable à toutes fréquences $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_^2$ si et seulement si*

$$K \geq \alpha m \underline{h} \underline{c} / \bar{\rho}_s \quad \text{et} \quad n < \gamma.$$

La première partie du théorème se démontre en calculant une formule explicite pour la partie réelles des valeurs propres. Ceci est possible car le paramètre K est nul, ce qui simplifie suffisamment l'expression du polynôme caractéristique. Ensuite, pour $K > 0$ le théorème donne un critère de stabilité sur le domaine, qui se démontre en utilisant le critère de Routh-Hurwitz [55]. Ce critère donne une condition de stabilité du système, et montre que la constante K joue un rôle important : elle doit être suffisamment grande pour que le système soit stable. Ceci indique que le phénomène de fluage, qui tend à lisser le sol, a un effet stabilisant sur la solution du système. Néanmoins, dans le cas instable, le critère ne donne pas d'informations sur la localisation des fréquences pour lesquelles le système est instable. Dans la suite nous étudions la forme de ces zones instables, en calculant un développement limité des valeurs propres, pour des grandes fréquences ($\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$), ainsi que pour des petites fréquences ($|\xi| + |\eta| \rightarrow 0$). On montre ainsi que pour des fréquences suffisamment grandes le système est stable, donc l'ensemble des fréquences pour lesquelles le système est instable est un ensemble borné. De plus, on peut déterminer la forme de la frontière de cet ensemble autour de $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Ce chapitre se conclut par des simulations numériques du système. Nous supposons que l'eau est dans un régime stationnaire, ce que l'on peut justifier par le fait que le temps caractéristique d'érosion est beaucoup plus grand que le temps caractéristique de l'écoulement de l'eau (car la vitesse du fluide est très grande devant la

vitesse d'érosion). Dans ce régime, le système (1.14) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(hv) = r, & (2.2a) \\ \operatorname{div}(chv) = \rho_s e \left(\frac{h}{H}\right)^m \left(\frac{|v|}{V}\right)^n - \rho_s s \frac{c}{c_{sat}}, & (2.2b) \\ \partial_t z = K \Delta z(x) - e \left(\frac{h}{H}\right)^m \left(\frac{|v|}{V}\right)^n + s \frac{c}{c_{sat}}, & (2.2c) \\ v = -V \nabla(h + z). & (2.2d) \end{cases}$$

Seule l'équation sur z (2.2c) est une équation d'évolution en temps, mais les équations (2.2a) et (2.2b) dépendent de z et doivent donc être recalculées à chaque pas de temps du schéma numérique. La condition initiale est une petite perturbation de la solution stationnaire sur le plan incliné. Nous montrons des résultats de simulations obtenus pour différentes valeurs des paramètres, et les comparons avec les résultats donnés par l'analyse de stabilité. En choisissant des paramètres pour lesquels le système est stable à toute fréquence, nous observons une diminution dans le temps des perturbations. Ensuite, en réduisant la valeur de la constante K de telle manière que le système devienne instable dans une zone comprenant des fréquences pour lesquelles $\xi = 0$, nous observons une augmentation des perturbations transverses à la pente, ce qui conduit à la formation de canaux creusés dans la direction de la pente.

La figure 2.1 donne un exemple de résolution du système, avec des paramètres pour lesquels le système est instable dans la direction transverse à la pente. L'eau s'écoule sur le domaine de la gauche vers la droite, et on observe que les perturbations initiales évoluent peu à peu. Après suffisamment d'étapes, des canaux de direction transverse à la pente commencent à se creuser à la surface du sol. Ces canaux se creusent ensuite de plus en plus, donc après suffisamment de temps la hauteur de l'eau est beaucoup plus grande dans ces canaux qu'en dehors. Nous atteignons alors les limites de la résolution numérique par cette méthode des volumes finis, car lorsque la hauteur de l'eau devient trop faible en certains points, le schéma numérique peut calculer des hauteurs d'eau négatives (dus aux erreurs numériques dans le calcul approché du flux). Cette méthode ne peut donc pas être mise en œuvre sur un temps trop long, quand des canaux trop profonds se forment à la surface. Nous introduisons dans le chapitre suivant une méthode numérique permettant de résoudre le système quand la hauteur de l'eau est nulle dans certaines zones du domaine.

2.2 Chapitre 3 : Une méthode particulière pour des équations de transport stationnaires

Pour gérer les zones sèches, nous introduisons une nouvelle méthode numérique, la version stationnaire des méthodes particulières pour les systèmes d'équations hy-

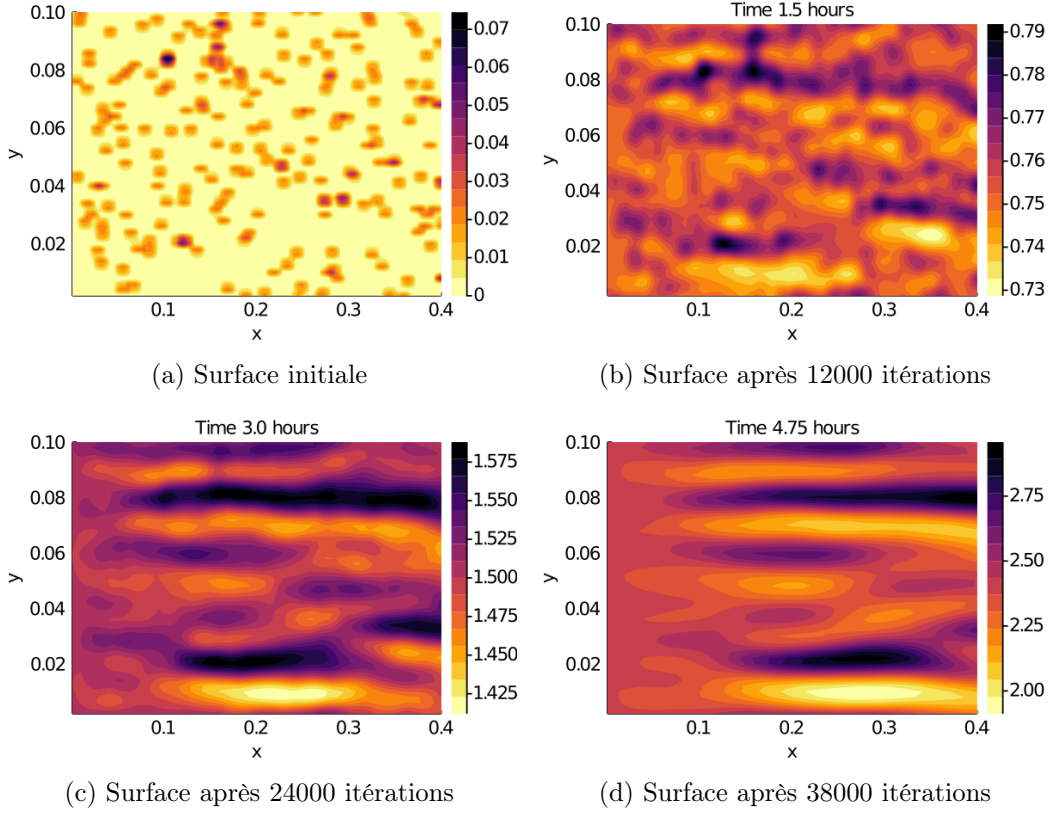


FIGURE 2.1 – Évolution dans le temps de la surface du sol en millimètres. Les couleurs représentent la hauteur de $z - \tan \theta (L_x - x)$, c'est à dire la différence entre la hauteur du sol et la hauteur du plan incliné.

perboliques. On considère le système linéaire du premier ordre suivant :

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}u)(x) + a_0(x)u(x) = S(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^d := (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad (2.3)$$

$$u(0, \xi) = g(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.4)$$

La méthode est basée sur une formule de quadrature, permettant d'approcher la valeur de la solution sur des points du domaine, auxquels certaines quantités sont associées. La position de ces points et la version particulière des équations de conservation sont calculés en utilisant les courbes caractéristiques associées à l'équation. Ces quantités peuvent être vues comme l'équivalent des particules qui se déplacent sur le domaine dans les méthodes particulières. Les courbes caractéristiques sont définies comme étant les solutions de l'équation suivante :

$$x'_\xi(s) = \mathbf{a}(x_\xi(s)), \quad \text{avec} \quad x_\xi(0) = (0, \xi) \in \mathbb{R}_+^d, \quad (2.5)$$

L'ensemble \mathbb{R}^{d-1} est discrétisé en points $(\xi_k)_i = k_i \varepsilon$, avec $i = 1, \dots, d-1$ et $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$. Pour $s \geq 0$ on définit alors les quantités $w_k(s) := \varepsilon^{d-1}(\det J_\Phi)(s, \xi_k)$ et $\rho_k(s) :=$

$w_k(s)u(x_k(s))$, et on montre qu'elles sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \omega'_k(s) = (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s))\omega_k(s), & (2.6a) \\ \rho'_k(s) + a_0(x_k(s))\rho_k(s) = \omega_k(s)S(x_k(s)), & (2.6b) \\ x_k(0) = (0, \xi_k), \quad \omega_k(0) = \varepsilon^{d-1}\mathbf{a}_1(0, \xi_k), \quad \rho_k(0) = w_k(0)g(\xi_k). \end{cases}$$

Les équations (2.6a) et (2.6b) donnent la valeur de la solution u le long des courbes caractéristiques, comme la solution d'une équation différentielle. En utilisant une formule de quadrature, nous approchons alors la valeur de u en un point $x \in \mathbb{R}_+^d$ par :

$$u(x) \approx \Delta s \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ n_\ell \leq j < +\infty}} \omega_k(s_j)u_k(s_j)\zeta^h(x - x_k^j) = \Delta s \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ n_\ell \leq j < +\infty}} \rho_k(s_j)\zeta^h(x - x_k^j), \quad (2.7)$$

où $\Delta s > 0$ et pour $j \in \mathbb{N}$, $s_j = j\Delta s$. La dernière étape est de résoudre numériquement les équations différentielles pour w_k et ρ_k , ce qui est fait en utilisant un schéma d'Euler explicite. En notant w_k^j et ρ_k^j les solutions approchées obtenues, le système (2.6) s'écrit :

$$\begin{cases} x_k^{j+1} = x_k^j + \Delta s \mathbf{a}(x_k^j), \\ \omega_k^{j+1} = \omega_k^j \left(1 + \Delta s (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^j)\right), \\ \rho_k^{j+1} = \rho_k^j - \Delta s a_0(x_k^j)\rho_k^j + \Delta s \omega_k^j S(x_k^j), \\ x_k^0 = (0, \xi_k), \quad u_k^0 = g(\xi_k), \quad \omega_k^0 = \Delta s \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k), \quad \rho_k^0 = u_k^0 \omega_k^0. \end{cases}$$

L'approximation de la solution u du système (2.3)-(2.4) est alors définie par la formule suivante :

$$\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x) := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ n_\ell \leq j < +\infty}} \rho_k^j \zeta^h(x - x_k^j). \quad (2.8)$$

Après avoir présenté la méthode, nous démontrons un résultat de convergence du schéma numérique.

Théorème 2.4. *Soit $d \geq 2$, et supposons que*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\in C^{d+1}(\tilde{U}_\ell) \cap W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell), \quad a_0, S \in C^d(\tilde{U}_\ell) \cap W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell), \\ g &\in C^d(\tilde{U}_\ell) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1}), \quad \zeta \in C^d(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Alors pour tout ensemble compact $X \subset \mathbb{R}_+^d$, il existe des constantes $C_X^{(0)}, \dots, C_X^{(3)} > 0$ qui ne dépendent pas de $h, \varepsilon, \Delta s$ telles que si $C_X^{(0)} \Delta s \leq h$, l'approximation $\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}$ définie par Eq. (2.8) vérifie :

$$\sup_{x \in X} |u(x) - \tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x)| \leq C_X^{(1)} h^2 + C_X^{(2)} \frac{\varepsilon^d}{h^d} + C_X^{(3)} \frac{\Delta s}{h}. \quad (2.9)$$

Ce résultat se démontre en séparant l'erreur en plusieurs termes, correspondants à :

- L'erreur d'interpolation, provenant de la convolution de u avec le noyau ζ^h :

$$|I_h(x)| = \left| u(x) - \left(u * \zeta^h \right) (x) \right| \leq C_X^{(1)} h^2.$$

Cette borne se démontre en faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 de $u(x) - u(y)$.

- L'erreur de quadrature, qui est causée par la discrétisation de l'intégrale :

$$|Q_{h,\varepsilon,\Delta s}(x)| = \left| \left(u * \zeta^h \right) (x) - \sum_{j=n_l}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \rho_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)) \right| \leq C_X^{(2)} \frac{\varepsilon^d}{h^d}.$$

Pour ce terme, nous utilisons un résultat donnant une borne sur l'erreur de discrétisation, qui dépend de la norme $W^{1,d}$ de la fonction $y \mapsto u(x_k(t)) \zeta^h(x - x_k(t))$. Il faut ensuite calculer une majoration de cette norme, ce qui est effectué en utilisant le changement de variable associé à l'inverse du flot $\Phi(t, \xi) := x_\xi(t)$.

- L'erreur de discrétisation en temps des solutions des équations différentielles pour ω_k et x_k :

$$\begin{aligned} |F_{h,\Delta s}^\rho| &= \left| \sum_{j=n_l}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \left(\rho_k(s_j) - \rho_k^j \right) \zeta^h(x - x_k(s_j)) \right| \leq C_X^{(3,1)} \Delta s, \\ |F_{h,\Delta s}^\zeta(x)| &= \left| \sum_{j=n_l}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \rho_k^j \left(\zeta^h(x - x_k(s_j)) - \zeta^h(x - x_k^j) \right) \right| \leq C_X^{(3,2)} \frac{\Delta s}{h}. \end{aligned}$$

Afin de démontrer ces deux inégalités, nous commençons par donner des bornes sur l'erreur de consistance provenant de la résolution par une méthode d'Euler des équations différentielles associées à x_k et ρ_k . La suite fait appel à différentes techniques, dont une nouvelle utilisation de l'erreur de discrétisation pour l'intégrale de $y \mapsto \zeta^h(x - y)$, ainsi qu'un calcul du nombre de particules $x_k(s_j)$ et x_k^j contenues dans la boule $\overline{B}_d(x, h)$.

Ensuite, le schéma numérique est testé pour différentes équations et différentes valeurs des paramètres numériques. Ces équations s'écrivent :

$$\operatorname{div}(hv) = 0, \quad \text{avec } v = (\tan \theta, 0) - \nabla z,$$

pour lesquelles on choisit différentes valeurs de z . Les erreurs de convergence obtenues sont comparées au résultat théorique 2.4.

Enfin, la méthode particulière est appliquée au modèle d'érosion en régime stationnaire pour le fluide (2.2), afin de résoudre les équations stationnaires (2.2a)-(2.2b) sur h et c . Ces équations sont non linéaires, donc le schéma numérique ne peut pas être directement appliqué aux équations. Néanmoins, à chaque itération

en temps de l'équation (2.2c) sur z , la surface du sol est très peu modifiée. Nous résolvons donc le système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h_{i+1}v_i) = r_{i+1}, & (2.10a) \\ \operatorname{div}(c_{i+1}h_{i+1}v_i) = \rho_s e \left(\frac{h_i}{H}\right)^m \left(\frac{|v_i|}{V}\right)^n - \rho_s s \frac{c_i}{c_{sat}}, & (2.10b) \\ z_{i+1} = z_i + dtK\Delta z_i - e dt \left(\frac{h_i}{H}\right)^m \left(\frac{|v_i|}{V}\right)^n + s dt \frac{c_i}{c_{sat}}, & (2.10c) \\ v_i = V(\tan\theta, 0) - V\nabla(h_i + z_i), \end{cases}$$

où au pas de temps t_i , on définit $r_i(x) := r(t_i, x)$, $h_i(x) := h(t_i, x)$, $c_i(x) := c(t_i, x)$, $z_i := z(t_i, \cdot)$ et $v_i := v(t_i, \cdot)$. Le système est initialisé au temps $t = 0$ avec une hauteur de sol initiale $z(0, x) = z_0(x)$. Les fonctions h_0 et c_0 doivent alors être des solutions des équations (2.2a)-(2.2b), avec $z = z_0$. Ces solutions ne peuvent pas être calculées dans le cas général, donc nous nous plaçons dans le cadre d'un plan incliné pour la surface initiale $z_0(x) = \tan\theta(L_x - x)$. Les fonctions $h_0(x) = h_0 > 0$ et $c_0(x) = c_{sat}e/s$ sont solutions des équations (2.2a)-(2.2b). La méthode particulière peut alors être utilisée pour résoudre les équations (2.10a) et (2.10b).

La figure 2.2 représente les résultats d'une simulation numérique du système linéarisé stationnaire (2.10), la surface initiale est un plan incliné avec quelques perturbations 2.2a, et la hauteur d'eau ainsi que la concentration initiales sont constantes. Après 2600 itérations du schéma, les figures 2.2b, 2.2c, 2.2d montrent respectivement la hauteur de sol érodée, la hauteur de l'eau et la position des particules sur le domaine. On observe que le sol a été creusé, des canaux qui suivent la direction de la pente sont apparus, et ces canaux sont plus profonds vers le bas du domaine ($x = 0.4$). L'eau est plus profonde dans les canaux, et les particules y sont très rapprochées.

Enfin, la figure 2.3 montre la même simulation que précédemment, après 4200 itérations. La surface du sol (2.3a) est beaucoup plus creusée, les canaux ont une profondeur d'environ 2,5 millimètres. On observe que la hauteur de l'eau (2.3b), initialement de 0,5 millimètres, est nulle dans certaines parties du domaine situées entre les canaux (les zones jaunes). Cette simulation illustre donc l'avantage de la méthode particulière comparée à la méthode des volumes finis, le fait de pouvoir procéder à des simulations qui contiennent des zones sèches.

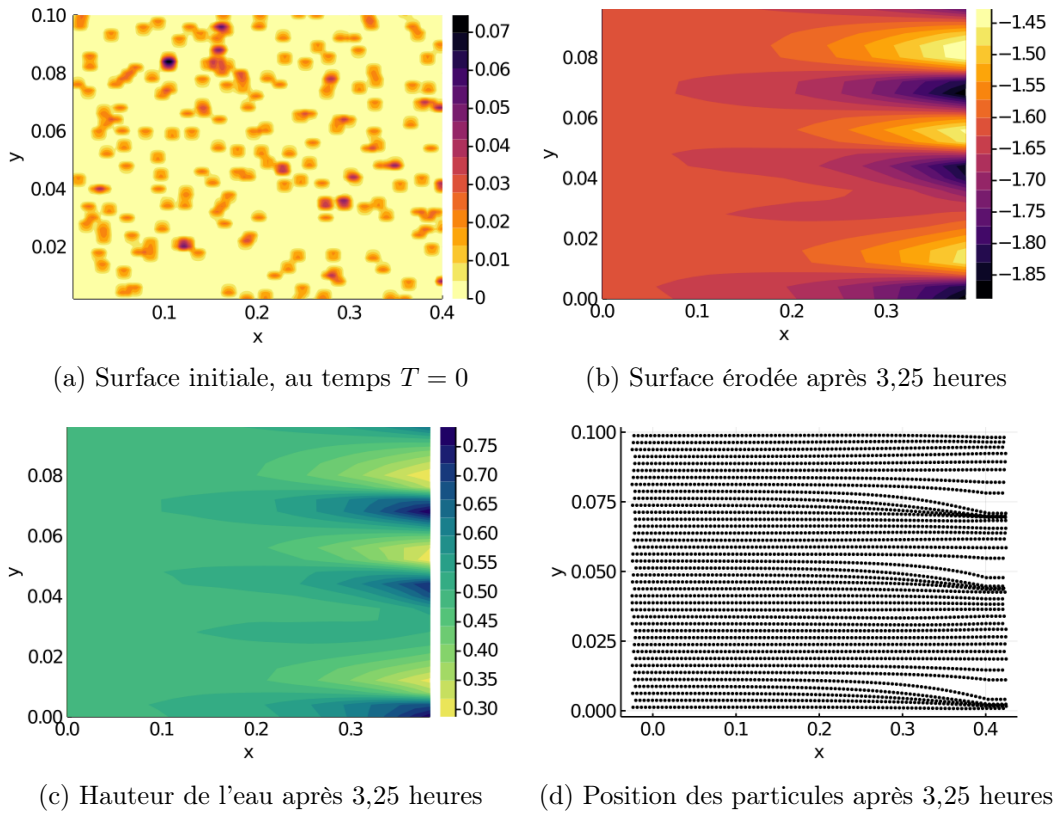


FIGURE 2.2 – Simulation numérique avec la méthode particulaire : hauteurs du sol et de l'eau en millimètres, et position des particules. La hauteur de la surface représentée est celle de $z - \tan \theta (L_x - x)$, c'est à dire la différence entre la hauteur du sol et la hauteur du plan incliné.

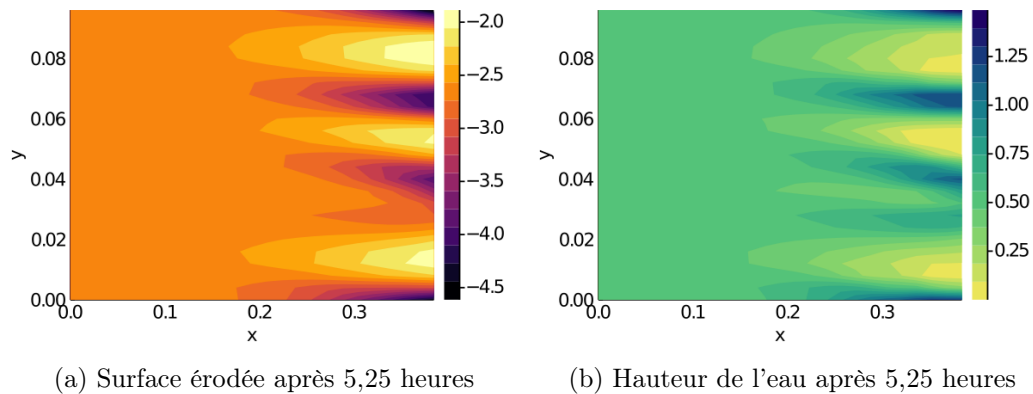


FIGURE 2.3 – Simulation numérique avec la méthode particulaire : hauteurs de la surface érodée et de l'eau en millimètres.

Well-posedness and stability analysis of a landscape evolution model

Résumé

Dans ce chapitre, on considère un système d'équations aux dérivées partielles modélisant l'évolution d'un paysage, dans le but de décrire les mécanismes menant à la formations de motifs à la surface du sol. Le relief évolue sous l'effet de l'écoulement de l'eau à sa surface, selon des procédés d'érosion et de sédimentation. Le système est composé de trois équations modélisant l'évolution de la hauteur du sol, de la hauteur de l'eau, et de la concentration de la couche d'eau en sédiments. Tout d'abord, on établit le caractère bien posé du système en temps court, et sous l'hypothèse que la hauteur d'eau initiale ne s'annule pas. Ensuite on s'intéresse à la formation de motifs dans le sol, dans le cas d'une couche d'eau s'écoulant sur un plan incliné érodable. Pour cela, on effectue une analyse de stabilité spectrale de certaines solutions constantes, afin de déterminer les conditions rendant le système instable. Cette analyse permet d'identifier des mécanismes menant à des formations de motifs à la surface du sol. Ces motifs sont des rigoles et des ruisseaux, et peuvent mener à la formation de vallées et de rivières dans le paysage. Enfin, on effectue des simulations numériques du système, qui permettent de valider les scénario d'instabilité et d'identifier les motifs correspondants.

Abstract

In this chapter, we study a system of partial differential equations modeling the evolution of a landscape in order to describe the mechanisms of pattern formations. A ground surface is eroded by the flow of water over it, either by sedimentation or dilution / suspension. We consider a model, composed of three evolution equations, one on the elevation of the ground surface, one on the fluid height and one on the concentration of sediments in the fluid layer. We first establish the well-posedness of the system in short time, and under the assumption that the initial fluid height does not vanish. Then, we focus on pattern formation in the case of a film flow over an inclined erodible plane. For that purpose, we carry out a spectral stability analysis of constant state solutions in order to determine instability conditions and identify a mechanism for pattern formations. These patterns, which are rills and gullies, are the starting point of the formation of rivers and valleys in landscapes. Finally,

we carry out some numerical simulations of the full system in order to validate the spectral instability scenario, and determine the resulting patterns.

This chapter is based on the publication [6].

Contents

1	Introduction	39
2	The landscape evolution model	45
3	Well-posedness of the landscape evolution model	46
3.1	Hypothesis on the system of equations	47
3.2	Sobolev injections	47
3.3	An a priori estimate	48
3.4	The approximate system	52
3.5	Convergence of the sequences	54
3.6	Uniqueness	57
4	Spectral stability of constant states	58
4.1	Non-dimensionalization and linearization of the system	58
4.2	Numerical exploration of stability	60
4.3	Stability analysis	61
4.4	Discussion on the low frequencies stability analysis: form of the spectrum	65
5	Direct numerical simulations	67
5.1	Simulations without source term for water	69
5.2	Simulations including a source term for water	72
6	Conclusion and perspectives	74
A	Proof of the stability theorem	75
B	Proof of the stability results at low frequencies	79
B.1	The first case	79
B.2	The second case	80
C	Proof of the stability results at high frequencies	83
C.1	The case $K > 0$	83
C.2	The case $K = 0$	84
D	Numerical scheme	86

1 Introduction

The modeling of landscape evolution under the effect of water flow has received increasing attention these last decades. Several physical phenomena must be considered in order to describe the erosion and sedimentation processes, which occur when water flows over an erodible surface. The erosion is the removal of sediments from the soil by a fluid, and the sedimentation is the inverse process, when the sediments settle on the surface. Heuristically, the intensity of the erosion process is strongly related to the flow rate of the fluid, the erosion rate is higher when the flow rate is higher. An other process that affects landscape evolution is the creep effect, which tends to smooth the bottom surface on time scales that are much larger than the ones involved in sediment transport. This effect has multiple causes, such as gravitational forces acting on the soil, and corrosion and dilatation caused by physical and chemical factors. It can be described as a simple diffusion process of the soil. The creep effect was introduced in 1892, in [21]. It was used in [34] to explain the convexity of hilltops profile. Later, in 1963 a derivation of the soil creep effect as a limit of a stochastic process had been done in [20]. The stochastic effect models soil particles which follow a random motion, under the constrain of gravity. In this article, Culling writes "Soil creep —so gradual as to be imperceptible —appears to be the result of the persistent effect of molecular and macromolecular forces tending to displace the soil particles.", and he describes the soil flow as a quasi-viscous fluid.

The description of the geological processes that occur in landscape evolution was initiated in [33]. In this book, the author gives the fundamental principles of landscape evolution and explains why the profiles of stream beds are concave upwards. This concavity property had been illustrated later in [19], with a mathematical description of the erosion of a slope. The slope evolution is described with a reaction diffusion equation, the exponential source term representing the erosion rate. The landscapes evolve mainly in function of these two competitive factors: creep on the hilltops, and stream incision on the lower slopes. Indeed, in the upper slopes the water flow is weak and dispersive, thus the creep effect predominates. Downward, the effect of shear stress of the flow becomes dominant, and bedload transport process increases. This leads to the formation of stream beds and valley, the profiles being concave. Since then, the complexity of the landscape evolution models increased: see [11] and [12] for a review of these models.

The process of erosion and transport of sediments can be described by two different laws, the alluvial transport law or the stream incision law, which depends on the nature of the soil. When the soil is covered by alluviums, the sediments are directly transported by water flux, and the amount of sediments moved by the water flux at a given time q_s follows a law that depends on the water discharge q . This transport discharge law is described, for example, in [68] and is given by

$$q_s = kq^m |\nabla z|^n, \quad (1.1)$$

where k , m , n are constants. This is called the transport limited case. On the other side, the stream incision law is used when the surface is bedrock, because in this case the sediment transport is limited by the resistance of the bedrock to the shear stress caused by the water flux. This is modeled by an erosion source term in the equation of surface height evolution, as described in [40]. The sediments removed from the soil by the erosion are supposed to be dissolved in water, thus are transported by the water flux. This stream incision law is described below, in Section 2. This case, that we study in this chapter is called the detachment limited case.

In this chapter, we study a system of partial differential equations describing the erosion of the soil by water, which had been proposed in [11], Section 4. It includes the modeling of the water flow, the erosion of the surface by water, the transport and deposition of sediments, and the creep effect. The characteristic fluid velocity is usually much larger than the erosion rate: in order to describe pattern formation, we only consider large scale fluctuations of the fluid velocity. As a result, we assume that the fluid velocity is proportional to the gradient of the free surface elevation. The other physical principles taken in account are:

- The conservation law for water and sediments contained in water,
- The stream incision law: the erosion grows with the water speed and the water height,
- The sedimentation rate is proportional to the concentration of sediments in water,
- The creep effect: the soil is subject to a diffusion process.

Other effects, such as infiltration, vegetation, wind, or ice formation are neglected. Moreover, we suppose that the bottom surface is constituted by one type of sediments. The system studied in this article models the time evolution of the soil and of the fluid. This system is composed by the following three partial differential equations:

$$\begin{cases} \partial_t h - \operatorname{div}(h \nabla(h + z)) = r(t, x), \\ \partial_t z = K \Delta z + sc - eh^m |v|^n, \\ \partial_t(ch) + \operatorname{div}(chv) = eh^m |v|^n - sc. \end{cases} \quad (1.2)$$

The first equation is a mass conservation law for the fluid and describes the evolution of the fluid height, denoted by h , and the fluid is transported at speed $v := -\nabla(h + z)$. The term r is a source term representing an exterior source of water, like the rain. The second equation models the time evolution of the bottom topography (denoted by z). The constant K is the constant of creep whereas e and s are respectively the constants for the incision law and the sedimentation rate. As in [40], we will suppose that the incision law depends on a power of the norm of the water velocity, and on a power of the water height. Thanks to this hypothesis, as long as the water height and velocity do not vanish, the erosion rate is positive. However, in practice the erosion starts if the water velocity is high enough to break the cohesion of the soil. Thus a threshold effect could be introduced in the model. This effect could be easily added to the numerical scheme of the model, but it would

increase significantly the difficulty of its mathematical study. Therefore we choose to ignore the threshold effect in the erosion process. This approximation is justified in the regime that we study, because the water height and water velocity are not close to zero. The last equation is the conservation equation for the sediments in suspension in the fluid. This concentration, denoted by c is the average of the concentration over the height of the fluid, thus is given in gram per square meter. The right hand side is the source term, which represents the exchange of sediments between the ground and the fluid, caused by the erosion and the sedimentation. The model is set in two dimensions, the variables are the time $t \in \mathbb{R}^+$ and the position (x, y) , which belongs to a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

In [11], the authors reviewed various landscape evolution models and focused on system (1.2). They listed some open mathematical problems like local existence in time, regularity of solutions or stability. They performed a numerical study on the erosion of a Gaussian shaped hill to demonstrate the ability of the model to exhibit pattern formation and studied the influence of some parameters on the complexity of these patterns. In [43], the authors performed numerical simulations in a more practical context where the initial topography is a real one like the ones found in La Reunion or Madeira islands: they took a particular care of the visualization of landscape evolution through a particular colorization process. The simulations show the capacity of the model to describe a realistic evolution in time of the rivers and gullies on these landscapes, provided its parameters are properly chosen. Note that the detachment-limit hypothesis is valid for bedrock rivers and must be appropriately modified for alluvial rivers, where sediments form a layer of loose material. In this latter case, other classes of models may be considered like the shallow water equations coupled with Exner equations for the transport of sediments: see [31] for a formal derivation of these models from bi-layer type models (one layer for the fluid and one layer for the sediment) and [30, 25] for various numerical strategies to perform simulations of bedload sediment transport.

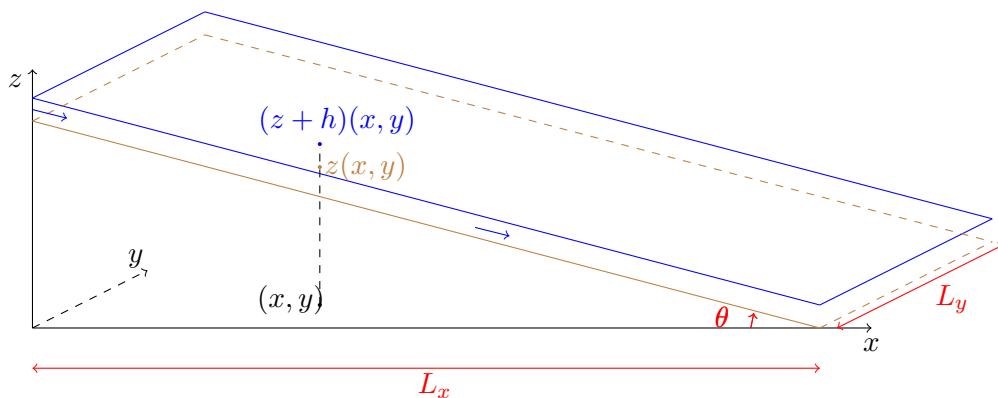


Figure 1.1 – Sketch of the mathematical framework for stability analysis: the water is flowing on a tilted plane.

The aim of this chapter is to explore the mechanism of pattern formation in the soil caused by water flow, and to precise the form and the frequency of apparition of these patterns. In landscapes, these patterns are channels, bed rivers, valley. We will focus on a simple framework where the initial bottom surface is a tilted plane. This surface is covered by a layer of water, the water flow from the top of the plane. The situation is represented in Figure 1.1, where the tilted plane is seen from the side. Although it is a less realistic framework than the landscape evolution described in [43] where real initial topographies are considered, it is sufficient to study the emergence of patterns on the surface. Note that experiments of erosion on a flat surface were conducted in [36] with a thin film flow which erodes blocks of plaster or salt.

The main outcomes of this chapter are the following:

- We establish the well-posedness of System (1.2) when the initial fluid height does not vanish.
- We study the spectral stability of constant states when the bottom is an inclined plane and characterize rigorously the spectral instability through a non dimensional number, so called channelization index.
- We perform direct numerical simulations of System (1.2) for realistic experimental data and on time scales associated to the erosion phenomenon. We tackle the problem of severe CFL restrictions due to very short time scales associated to the fluid flow.

We provide thereafter a short description of our main results. First, we prove the well posedness character of System (1.2) locally in time under some assumptions on the data and the parameters. We prove the existence of solutions in suitable Sobolev spaces. In order to simplify notations, we will denote for any $T > 0$ and \mathcal{H} a Hilbert space

$$L_T^2(\mathcal{H}) := L^2((0, T); \mathcal{H}); \quad C_T(\mathcal{H}) := C((0, T); \mathcal{H})$$

the space of functions $u : t \mapsto u(t, \cdot) \in \mathcal{H}$ that are respectively L^2 integrable or continuous in time on the interval $(0, T)$. We prove the following result:

Theorem 1.1. *Let $m > 0$, $n > 3$ or $n = 2$, $K > 0$, and $T_0 > 0$. Let us fix two constants fluid heights $h_{ref} > h_{min} > 0$. Suppose that the initial data h^0, z^0, c^0 satisfy*

$$h^0 - h_{ref}, z^0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}^2), \quad c^0 \in H^k, \quad h^0(x) \geq 2 h_{min} \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

with $k = 3$. Suppose that $r \in L_{T_0}^2(H^k)$, $K h_{min} - \|h^0\|_{L^\infty}^2 \geq 0$. Then there exists $0 < T < T_0$ such that System (1.2) admits a unique solution (h, z, c) with

$$h - h_{ref}, z \in L_T^2(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1}), \quad c \in C_T(H^k).$$

The proof of Theorem 1.1 is based on energy estimates and on a fixed point argument. The problem of the well posedness of this system was raised in the conclusion of [11]. We prove that it is well-posed locally in time, and under the assumption that the fluid height does not vanish. With this assumption, the equations on water height and water concentration are parabolic, and this property is used in the proof, for the energy estimates. This validates the model in the situation where the fluid height is close to a constant, hence, far from vanishing. This will be the case in our stability study, and our numerical simulations. The case of vanishing fluid height is more involved as the model becomes degenerated parabolic and the regularizing effect on the fluid height, and thus on the fluid velocity, is lost: one has to consider weaker classes of solutions. More precisely, dropping the z dependence, the equation on h reads

$$\partial_t h = h\Delta h + |\nabla h|^2.$$

In [8], the authors prove the well posedness for this equation within the class of bounded, continuous and non negative viscosity solutions. This is beyond the scope of this chapter to couple this type of solutions with the other equations of the model, and we leave this problem open for future studies. An other interesting question is the numerical simulation of the model in the presence of dry areas: this will be carried out in a forthcoming work.

The second part of the chapter is dedicated to pattern formation when the initial topography is an inclined plane and the bottom surface is weakly eroded. Our aim is to identify instability mechanisms that could explain the formation of patterns. For that purpose, we linearize System (1.2) around a constant state and we study the conditions of spectral instability and the nature of the instabilities. We expect that when the system is spectrally unstable for some parameters and wave vectors, a slight perturbation of the system with these unstable modes will grow up and lead to the formation of patterns in the soil. Stability studies have been done previously, for other landscape evolution models. The papers [68] and [48] analyze a model of two equations, where the water is supposed to be at equilibrium. This model has steady solutions for which the soil height can be concave in some areas and convex in other areas, depending on the sediment discharge law. They show that the linearised system is stable in the convex parts and unstable in the concave parts, with a stronger instability in the transverse direction. In their model they use the sediment transport law, thus its not the same framework as in the model (1.2). Note that in a couple of recent papers [3] and [7], the following system of 2 PDEs was considered:

$$\partial_t z = K\Delta z - e\left(\frac{h}{H}\right)^m |\nabla z|^n + U, \quad \partial_t h = \operatorname{div}\left(hV_0\frac{\nabla z}{|\nabla z|}\right) + R, \quad (1.3)$$

where R, U and V_0 are constants. A numerical scheme is designed in [3] for (1.3) where the time derivative of the fluid height is neglected with test cases where the initial bottom topography is pyramidal. It is found that a channelization index

$$\mathcal{C}_I = \frac{e\ell^{m+n}}{K^n U^{1-n}},$$

where l is the typical length of the domain, drives the formation of channels: the number of channels and their branching increase with \mathcal{C}_I . This analysis is completed by a spectral stability analysis of a spatially non homogeneous steady state where the topography is a hillslope which is divided in the middle. It is found numerically that there exists a critical \mathcal{C}_I^0 such that the steady state is stable if $\mathcal{C}_I \leq \mathcal{C}_I^0$ and unstable otherwise.

The spectral study carried out in this chapter is new and our analysis provides some explanations for the formation of patterns in landscapes. The appearance of channels on the flat plane is indeed the initial stage of development for the formation of valley and rivers in landscapes. The stability of the system depends on the parameters, in particular the constant of creep K plays an important role in this study. We show that there is a critical value \bar{K} such that if $K \geq \bar{K}$, and if another condition on parameters is satisfied, then the system is spectrally stable at all frequencies. If $K < \bar{K}$ then there exist some wave numbers and vectors for which the system is spectrally unstable. Moreover, the instabilities grow as the wave vectors of the perturbations points in the direction transverse to the flow, which explains the formation of gullies and channels aligned with the direction of the fluid flow. We then recover qualitatively the results of [7].

Finally, our stability study is completed by direct numerical simulations, which illustrate the appearance of patterns for the nonlinear system. The space and time scales of the model can take a large range of values, depending of the environment. On real landscapes, the domain size can be measured in kilometers, with a very slow erosion rate, in the order of 20 – 200 millimeters per thousand year. In the experience on salt and plaster made in [36], the domain has a size of the order of ten centimeters whereas the erosion speed is around one millimeter per hour (so, much faster than in real landscape) and the fluid velocity is 1 meter per second. Parameters chosen in the numerical simulations are based on these experiments. As in [3, 7], we have observed that decreasing K (respectively increasing the channelization index \mathcal{C}_I) reinforces the channelization process. Note that we have focused here on the formation of channels: unlike simulations made in [43] where the initial state is a matured landscape, we start from a simple state and the landscape evolves by himself in the simulations.

The chapter is organized as follow: First, in Section 2, we describe the model and the associated system of equations. Then, Section 3 is devoted to the proof of the well posedness character of the system in short time, (see Theorem 1.1). Next, in Section 4 we carry out a spectral stability analysis of the System (1.2) linearized about a stationary solution. These stability results are compared to direct numerical simulations of the nonlinear system (1.2) in Section 4.2. Finally, Section 6 draws a brief conclusion of the chapter and provides some future perspectives.

2 The landscape evolution model

In this section, we introduce the landscape evolution model considered in this chapter. This is a system of three partial differential equations for the fluid height h , the bottom topography z and the sediment concentration c .

Evolution of topography. The evolution of the bottom topography z is given by:

$$\partial_t z = K \Delta z - E + S.$$

The functions $E = E(t, x, y)$ and $S = S(t, x, y)$ represent the erosion speed of the soil and the sedimentation speed respectively, with $t \geq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

The parameter $K > 0$ is a constant, and the term $K \Delta z$ models the creep of the soil. This phenomenon is a slow diffusive movement of the soil which occurs at large time and space scales. This movement is caused by several processes, such as the gravitational flow of the soil, wind, rain splash, expansions and contractions of the soil due to freeze-thaw, wet-dry and hot-cold cycles, or biological activity. In sufficiently eroded landscape there are generally not many sharp edges, and this creep term, which tends to smooth the bottom surface models this phenomenon. We shall see that this term plays a significant role in the well-posedness of the model. However, the creep effect is not supposed to be relevant in the formation of patterns as it is a short time effect and should be supposed to be small in comparison to the erosion and sedimentation terms.

The erosion of the surface is caused by the shear stress and the friction of the water flow. Assuming that the fluid velocity is constant across the fluid layer, this amounts to consider that the erosion increases with the (norm of the) water velocity, and with the water discharge Q , as in [40]:

$$E(t, x, y) = \alpha Q^\mu v^\nu.$$

Consequently, as $Q = hv$, we will suppose that the erosion speed depends on a power of the norm of the water velocity, and of a power of the water height. Thus we set

$$E(t, x, y) = e \left(\frac{h(t, x, y)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(t, x, y)|}{V} \right)^n,$$

where e is the erosion speed in the conditions $h = H$ and $|v| = V$ with $H, V > 0$ that respectively represent a reference fluid height and fluid velocity.

The sedimentation occurs when the concentration of sediments in water is high enough. The sedimentation speed increases with the concentration of sediment in the fluid. For the sake of simplicity, we suppose that this speed is proportional to the concentration and we set:

$$S(t, x, y) = s \frac{c(t, x, y)}{c_{sat}},$$

with s the speed of sedimentation in the reference condition $c = c_{sat}$. Therefore, the soil elevation evolves according to the equation :

$$\partial_t z = K\Delta z - e \left(\frac{h(t, x, y)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(t, x, y)|}{V} \right)^n + s \frac{c(t, x, y)}{c_{sat}}. \quad (2.1)$$

The landscape evolution model. We complete Equation (2.1) with two evolution equations for the fluid height h and sediment concentration c . The mass conservation law for the fluid reads

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r, \quad (2.2)$$

where r is a source term, modeling an incoming flow in a channel or the rain over the bottom. On the other hand, the mass conservation law for the sediment reads

$$\partial_t(hc) + \operatorname{div}(chv) = \rho_s(E - S), \quad (2.3)$$

where ρ_s is the volumetric mass density of the sediments, and is constant. In order to close System (2.1), (2.2), (2.3), we need to write an equation for the fluid velocity. One possibility would be to write a shallow water type model with an evolution equation for the momentum hv . We rather choose the simpler closure

$$v = -\mu \nabla(h + z), \quad (2.4)$$

where $\mu > 0$ is some characteristic fluid velocity and $\nabla(h + z)$ is the gradient of the fluid surface elevation. System (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) is closed and we shall consider its well-posedness in Section 3.

We are also interested in the pattern formation at the surface of the soil. For that purpose, we have chosen to explore the case of water flowing down an inclined plane. This situation was considered experimentally in [36]. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ has length L_x and width L_y : $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Denote θ the inclination of the plane. We can decompose the bottom topography z as $z(t, x, y) = (L_x - x) \tan \theta + \tilde{z}(t, x, y)$ where \tilde{z} is the eroded height of the soil. Thus the fluid velocity is written as $v(t, x, y) = \mu(\tan \theta, 0) - \mu \nabla(\tilde{z} + h)$. Consequently, omitting the tilde over z , System (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) admits the new form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \mu \tan \theta \partial_x h = \mu \operatorname{div}(h \nabla(h + z)) + r, \end{array} \right. \quad (2.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h \partial_t c + \mu h \tan \theta \partial_x c = \mu h \nabla(h + z) \cdot \nabla c + \rho_s e \left(\frac{h}{H} \right)^m \left(\frac{|v|}{V} \right)^n - \rho_s s \frac{c}{c_{sat}}, \end{array} \right. \quad (2.5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t z = K\Delta z - e \left(\frac{h}{H} \right)^m \left(\frac{|v|}{V} \right)^n + s \frac{c}{c_{sat}}. \end{array} \right. \quad (2.5c)$$

3 Well-posedness of the landscape evolution model

In this section, we study the existence and uniqueness of solutions of the system (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), locally in time.

3.1 Hypothesis on the system of equations

We consider System (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) where we set, for simplicity, $\mu = 1$, $\rho_s = 1$, $c_{sat} = 1$ and $H = V = 1$. The choice of these constants does not change anything in the proof Theorem 1.1, we fix them to simplify the notations. Provided that $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, $h(t, x) \geq h_{\min} > 0$, the equations on h and on z are parabolic equations. As long as h does not vanish, the equation on c can be written as

$$\partial_t c + v \cdot \nabla c = e h^{m-1} |v|^m - sc/h - rc/h.$$

Therefore, in order to prove Theorem 1.1, we consider the equivalent following system, composed of two parabolic equations and one transport equation:

$$\begin{cases} \partial_t h - \operatorname{div}(h \nabla h) - \operatorname{div}(h \nabla z) = r(t, x), & (3.1a) \\ \partial_t z = K \Delta z + sc - e h^m |v|^n, & (3.1b) \\ \partial_t c + v \cdot \nabla c = e h^{m-1} |v|^n - sc/h - rc/h, & (3.1c) \end{cases}$$

with the initial conditions $h(0, x) = h^0(x)$, $z(0, x, y) = z^0(x)$ and $c(0, x, y) = c^0(x, y)$, and where $t \in \mathbb{R}^+$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

In Subsection 3.2, we recall some results concerning Sobolev spaces that will be used to prove Theorem 1.1. The well posedness of System (3.1) is proved in Subsections 3.3 - 3.6 by using a fixed point argument and energy inequalities. We first establish an a priori estimate on the solutions of (3.1) in Subsection 3.3. Then, we build a sequence of approximate solutions in Subsection 3.4 and provide uniform estimates on these solutions. We show that it forms a Cauchy sequence and converges to a solution of System (3.1). Finally, we prove the uniqueness of solutions in Subsection 3.6. In these sections, we denote by $\nabla^p f$ the vector made by the partial derivatives of order p of the function f . We also denote $(\nabla f)^2 = (\partial_{x_i} f \partial_{x_j} f, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2)$.

3.2 Sobolev injections

In this section we recall some properties of Sobolev spaces, that will be used in the next sections. The proofs of these properties can be found in [2], and in [26] for Proposition 3.5. The first proposition concerns the imbedding of the Hilbert space $H^k(\mathbb{R}^2)$ into Sobolev spaces with smaller derivation index. The symbol \hookrightarrow indicates that the injection is continuous.

Proposition 3.1. *If $2 < q < +\infty$ and $k \in \mathbb{N}$ then $H^{k+1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathbb{R}^2)$.*

The following proposition gives the imbedding of the Hilbert space $H^k(\mathbb{R}^2)$ into a space of smooth functions.

Proposition 3.2. *If $k \geq 2$ then $H^k(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C^{k-2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, $\forall 0 < \alpha < 1$. In particular, $H^2(\mathbb{R}^2) \subset C_b^0(\mathbb{R}^2)$.*

Proposition 3.3. *If $k > 1$ then $H^k(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{k-2,\infty}(\mathbb{R}^2)$.*

Proposition 3.4 provides a bound on the norm of a power of functions, that will be useful to control non linear terms in the equations.

Proposition 3.4. $H^k(\mathbb{R}^2)$ is an algebra for $k > 1$. Thus if $q \in \mathbb{N}^*$ then $\|f^q\|_{H^k(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}^q$. If $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ and $q > k$, one has $\|f^q\|_{H^k(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}^q$.

Finally, Proposition 3.5 concerns spaces involving time, and gives the continuity in time of a function provided this function and its derivative in time have enough regularity.

Proposition 3.5. If $f \in L_T^2(H^{k+2}(\mathbb{R}^2))$ and $\partial_t f \in L_T^2(H^k(\mathbb{R}^2))$, then $f \in C_T^0(H^{k+1}(\mathbb{R}^2))$.

In what follows, we will denote $H^k(\mathbb{R}^2) = H^k$ for the sake of simplicity.

3.3 An a priori estimate

In this section we give an a priori estimate on solutions of System (3.1), which will be used in the Section 3.5. We fix $k = 3$, and assume $m > 0$, $n > 3$ or $n = 2$ as in the hypothesis of Theorem 1.1.

Proposition 3.6. Let $(h - h_{ref}, z, c) \in (L_T^2(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1}))^2 \times C_T(H^k)$ be a solution of System (3.1). Assume that the hypothesis of Theorem 1.1 are satisfied. Then there exists $T_1 \leq T$ such that $h - h_{ref}$ and z are bounded in $C_{T_1}(H^{k+1}) \cap L_{T_1}^2(H^{k+2})$, c is bounded in $C_{T_1}(H^k)$, and they satisfy the estimate:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\leq e^{Ct} \left(\mathcal{E}(0) + C \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 \right), \\ \int_0^t (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) &\leq C e^{Ct} \left(\mathcal{E}(0) + C \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 \right), \end{aligned}$$

where C is a constant depending on h^0, z^0, c^0, h_{\min} and \mathcal{E} is defined as:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (\|h - h_{ref}\|_{L^2}^2 + \|\nabla h\|_{H^k}^2 + \|z\|_{H^{k+1}}^2 + \|c\|_{H^k}^2).$$

Proof. We first provide Sobolev estimates on the fluid height h . We multiply the equation (3.1a) by $h - h_{ref}$ and integrate it over \mathbb{R}^2 . One obtains:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h - h_{ref}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (h - h_{ref}) \operatorname{div} (h \nabla (h + z)) + \int_{\mathbb{R}^2} (h - h_{ref}) r. \quad (3.2)$$

By integrating by part (3.2), and under the assumption that $h \geq h_{\min}$, we obtain for any $t \geq 0$ fixed:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h - h_{ref}\|_{L^2}^2 + h_{\min} \|\nabla h\|_{L^2}^2 \leq \|r\|_{L^2} \|h - h_{ref}\|_{L^2} + \|h\|_{L^\infty} \|\nabla z\|_{L^2} \|\nabla h\|_{L^2}. \quad (3.3)$$

Then for all $p \in \{1, \dots, k+1\}$, we differentiate p times Equation (3.1a), multiply it by $\nabla^p h$ and integrate it with respect to the space variable:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla^p h\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^{p-1} [\operatorname{div}(h \nabla(h+z))] \nabla^{p+1} h = - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^{p-1} r \nabla^{p+1} h \quad (3.4)$$

We estimate the second term in (3.4). As $H^1 \hookrightarrow L^4$ and $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, we find:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^{p-1} [\operatorname{div}(h \nabla h)] \nabla^{p+1} h \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h |\nabla^{p+1} h|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \nabla^i h \nabla^{p-i+1} h \nabla^{p+1} h + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla h \nabla^p h \nabla^{p+1} h \\ &\geq h_{\min} \|\nabla^{p+1} h\|_{L^2}^2 - C \|\nabla h\|_{H^p}^2 \|\nabla h\|_{H^{k+1}}. \end{aligned}$$

For the third term in (3.4), we proceed similarly:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^{p-1} \operatorname{div}(h \nabla z) \nabla^{p+1} h \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} h \nabla^{p+1} z \nabla^{p+1} h + \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \nabla^i h \nabla^{p-i+1} z \nabla^{p+1} h \right| \\ &\leq \|h\|_{L^\infty} \|\nabla z\|_{H^{k+1}} \|\nabla^{p+1} h\|_{L^2} + C \|\nabla z\|_{H^p} \|\nabla h\|_{H^p} \|\nabla h\|_{H^{k+1}}. \end{aligned}$$

By inserting these two estimates into (3.4), one obtains:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla h\|_{H^k}^2 + h_{\min} \|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 &\leq \|r\|_{H^k} \|\nabla h\|_{H^{k+1}} + \|h\|_{L^\infty} \|\nabla z\|_{H^{k+1}} \|\nabla h\|_{H^{k+1}} \\ &\quad + C (\|\nabla z\|_{H^k} + \|\nabla h\|_{H^k})^2 \|\nabla h\|_{H^{k+1}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Next, we derive an estimate on the bottom topography z . We multiply equation (3.1b) by z and integrate over space \mathbb{R}^2 . We get:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{L^2}^2 + K \|\nabla z\|_{L^2}^2 &= s \int_{\mathbb{R}^2} c z - e \int_{\mathbb{R}^2} h^m |v|^n z \\ &\leq s \|c\|_{L^2} \|z\|_{L^2} + e \|h\|_{L^\infty}^m \|v\|_{L^{2n}}^n \|z\|_{L^2} \\ &\leq s \|c\|_{L^2} \|z\|_{L^2} + C e \|h\|_{L^\infty}^m (\|\nabla h\|_{H^1} + \|\nabla z\|_{H^1})^n \|z\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

The last inequality is a consequence of the injection $H^1 \hookrightarrow L^q$, with $q = 2n \geq 2$. Let us now estimate the derivatives of z of order $p \in \{1, \dots, k+1\}$. We differentiate Equation (3.1b) p times and multiply by $\nabla^p z$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla^p z\|_{L^2}^2 + K \|\nabla^{p+1} z\|_{L^2}^2 &= s \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^p c \nabla^p z - e \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^p (h^m |v|^n) \nabla^p z \\ &= -s \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^{p-1} c \nabla^{p+1} z + e \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^{p-1} (h^m |v|^n) \nabla^{p+1} z \\ &\leq s \|\nabla^{p-1} c\|_{L^2} \|\nabla^{p+1} z\|_{L^2} + e \|\nabla^{p-1} (h^m |v|^n)\|_{L^2} \|\nabla^{p+1} z\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

By adding the estimates (3.6) and (3.7) for $p = 1, \dots, k+1$, we obtain:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla z\|_{H^k}^2 + K \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2 \leq s \|c\|_{H^k} \|\nabla z\|_{H^{k+1}} + e \|h^m |v|^n\|_{H^k} \|\nabla z\|_{H^{k+1}}. \quad (3.8)$$

There remains to estimate the erosion term $h^m |v|^n$ in H^k norm. We assumed that $n > 3$ or $n = 2$, which implies that $v \mapsto |v|^n$ is $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. We estimate successively $\nabla^p(h^m |v|^n)$ for $p = 1, 2, 3 = k$. By using successively the injections $H^1 \hookrightarrow L^q$ for $q \geq 2$ and $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, one finds:

$$\begin{aligned} \|\nabla(h^m |v|^n)\|_{L^2} &\leq \|h^{m-1}\|_{L^\infty} (\|\nabla h\|_{H^2} + \|\nabla z\|_{H^2})^n (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{L^2}), \\ \|\nabla^2(h^m |v|^n)\|_{L^2} &\leq \|h^{m-2}\|_{L^\infty} (\|\nabla h\|_{H^2} + \|\nabla z\|_{H^2})^n (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^1})^2, \\ \|\nabla^3(h^m |v|^n)\|_{L^2} &\leq \|h^{m-3}\|_{L^\infty} (\|\nabla h\|_{H^3} + \|\nabla z\|_{H^3})^n (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^1})^2 \\ &\quad (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^3} + \|\nabla z\|_{H^3}). \end{aligned}$$

We deduce the following estimate on the bottom topography:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla z\|_{H^k}^2 + K \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2 &\leq s \|c\|_{H^k} \|\nabla z\|_{H^{k+1}} \\ &\quad + C \|h^{m-3}\|_{L^\infty} (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^3} + \|\nabla z\|_{H^3})^{n+3} \|\nabla z\|_{H^{k+1}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Finally, we derive a priori estimate for the sediment concentration c : the basic energy estimates reads:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|c\|_{L^2}^2 &\leq (\|\nabla h\|_{H^3} + \|\nabla z\|_{H^3}) \|c\|_{L^2}^2 + e \|h^{m-1}\|_{L^\infty} (\|\nabla h\|_{H^1} + \|\nabla z\|_{H^1})^n \|c\|_{L^2} \\ &\quad + (s + \|r\|_{L^\infty}) \frac{\|c\|_{L^2}^2}{h_{\min}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

The first term on the right hand side of (3.10) is related to the advection, the second term to the erosion and the third one to the sedimentation and the source term. Now, for all $p \in \{1, \dots, k\}$, we differentiate p times Equation (3.1c) and multiply it by $\nabla^p c$. There is no additional issue with respect to the former computations on z and one finds:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|c\|_{H^k}^2 &\leq C (\|\nabla h\|_{H^{k+1}} + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}) \|c\|_{H^k}^2 + (s + \|r\|_{H^k}) \frac{\|c\|_{H^k}^2}{h_{\min}} P \left(\frac{\|\nabla h\|_{H^{k+1}}}{h_{\min}} \right) \\ &\quad + e C \|h^{m-4}\|_{L^\infty} (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^3} + \|\nabla z\|_{H^3})^{n+3} \|c\|_{H^k}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Here P is some polynomial of degree three with positive coefficients. Let us denote

$$\mathcal{Q}_h(a, b) = K a^2 + h_{\min} b^2 - \|h\|_{L^\infty} a b.$$

By combining the estimates (3.3), (3.5), (3.6), (3.9) and (3.11) and the Young inequality on products:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2,$$

one finds that for any $\varepsilon > 0$, there exists $C(\varepsilon)$ such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \mathcal{Q}_h(\|\nabla h\|_{H^{k+1}}, \|\nabla z\|_{H^{k+1}}) \\ \leq \varepsilon (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) + C(\varepsilon) (\|r\|_{H^k}^2 + \mathcal{F}(h, z, c)(t)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h, z, c) = & \|h - h_{ref}\|^2 + \|h\|_{L^\infty} \|\nabla z\|_{L^2} \|\nabla h\|_{L^2} + \|c\|_{L^2} \|z\|_{L^2} \\ & + \|c\|_{H^k}^2 + \|c\|_{H^k}^4 \left(1 + (h_{\min})^{-2} P^2 \left(\frac{\|\nabla h\|_{H^{k+1}}}{h_{\min}} \right) \right) \\ & + \|h\|_{L^\infty}^m (\|\nabla h\|_{H^1} + \|\nabla z\|_{H^1})^n \|z\|_{L^2} + \left(\|\nabla h\|_{H^k} + \|\nabla z\|_{H^k} \right)^4 \\ & + \|h^{m-3}\|_{L^\infty}^2 (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^k} + \|\nabla z\|_{H^k})^{2(n+1)} \\ & + \|h^{m-4}\|_{L^\infty}^2 (\|h\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{H^k} + \|\nabla z\|_{H^k})^{(n+1)} \|c\|_{H^k}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

From (3.13), one easily proves that there exists a constant C depending only on h_{\min} and $\alpha > 0$ such that

$$\mathcal{F}(h, z, c)(t) \leq C (1 + C\mathcal{E}(t)^\alpha) \mathcal{E}(t)$$

Note that we have used the estimate:

$$\|h\|_{L^\infty} \leq h_{ref} + \|h - h_{ref}\|_{L^2} + C\|\nabla h\|_{H^1}, \quad \|h^{m-i}\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty}^m (h_{\min})^{-i}, \quad i = 3, 4.$$

Now, the quadratic form \mathcal{Q}_h is positive semi-definite provided that $Kh_{\min} > \|h\|_{L^\infty}^2/4$. Under the assumption that $\|h^0\|_{L^\infty} < \sqrt{Kh_{\min}}$, there exists a time T^* such that $\sup_{(0, T^*)} \|h\|_{L^\infty} \leq \sqrt{3Kh_{\min}}$. Thus there exists $\varepsilon > 0$ such that $\mathcal{Q}_h(a, b) \geq 2\varepsilon(a^2 + b^2)$. We deduce from (3.12) that for all $t \in (0, T^*)$, one has:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \varepsilon (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) \leq C(\varepsilon)\|r\|_{H^k}^2 + C(1 + C\mathcal{E}(t)^\alpha) \mathcal{E}(t), \quad (3.14)$$

Now, we integrate Equation (3.14) with respect to time: one finds

$$\mathcal{E}(t) + \varepsilon \int_0^t (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) \leq \mathcal{E}(0) + C(\varepsilon) \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 + C \int_0^t (1 + C\mathcal{E}(s)^\alpha) \mathcal{E}(s) ds. \quad (3.15)$$

By applying one more time a continuity argument, there exists $T_1 \leq T^*$, such that $\mathcal{E}(t) \leq 2\mathcal{E}(0)$ for all $t \in [0, T_1]$. This implies that

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) + \varepsilon \int_0^t (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) \\ \leq \mathcal{E}(0) + C(\varepsilon) \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 + C(1 + 2^\alpha C\mathcal{E}(0)^\alpha) \int_0^t \mathcal{E}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

By applying Gronwall lemma, one finds

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) & \leq e^{Ct} \left(\mathcal{E}(0) + C(\varepsilon) \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 \right), \\ \int_0^t (\|\nabla h\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z\|_{H^{k+1}}^2) & \leq C e^{Ct} \left(\mathcal{E}(0) + C(\varepsilon) \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 \right). \end{aligned}$$

This concludes the proof of the energy estimate. \square

3.4 The approximate system

In this section, we prove the existence of a sequence of solutions $(h_i, z_i, c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ to the following linear system:

$$\begin{cases} \partial_t h_{i+1} - \operatorname{div}(h_i \nabla h_{i+1}) - \operatorname{div}(h_{i+1} \nabla z_i) = r(t, x), & (3.17a) \\ \partial_t z_{i+1} = K \Delta z_{i+1} + s c_i - e h_i^m |v_i|^n, & (3.17b) \\ \partial_t c_{i+1} + v_i \cdot \nabla c_{i+1} = e h_i^{m-1} |v_i|^n - s c_i / h_i - r c_i / h_i, & (3.17c) \\ h_i(0, x) = h(0, x), z_i(0, x) = z(0, x), c_i(0, x) = c(0, x). \end{cases}$$

with initial conditions $h_0(t, x) = h^0(x)$, $z_0(t, x) = z^0(x)$ and $c_0(t, x) = c^0(x)$. Then we show that these solutions are uniformly bounded with respect to $i \in \mathbb{N}$ for a suitable Sobolev norm. In what follows, we will denote $h_{\min} = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} (h_0(x))/2$.

The classical theory of parabolic equations and of linear transport equations provides conditions to obtain a well-posed system of equations. For the two parabolic equations (3.17a) and (3.17b), we state the following result (see [13] for more details):

Proposition 3.7. *Assume that $h^0 - h_{ref}, z^0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}^2)$, $r, s c_i - e h_i^m |v_i|^n \in L_T^2(H^k)$, $h_i \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ with $h_i \geq h_{\min}$ and $\nabla h_i, \nabla z_i \in L_T^1(H^k)$. Then there exists a unique solution (h_{i+1}, z_{i+1}) to the equations (3.17a), (3.17b), and $h_{i+1} - h_{ref}, z_{i+1} \in L_T^2(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1}(\mathbb{R}^2))$.*

For the transport equation (3.17c), we use theorem 7.2.2 in [53] to state the result:

Proposition 3.8. *Assume that $c^0 \in H^k(\mathbb{R}^2)$, $\nabla v_i \in L_T^\infty(H^{k-1})$, $e h_i^{m-1} |v_i|^n - s c_i / h_i - r c_i / h_i \in L_T^1(H^k)$ and $v_i \in L_T^1(W^{1, \infty})$. Then there exists a unique solution $c_i \in C_T(H^k)$ to the equation (3.17c).*

We prove by induction that for all $i \in \mathbb{N}$, System (3.17) is well-posed. First, for $i = 0$, the functions of (h_i, z_i, c_i) are time independent and $h^0 \geq h_{\min}$. Thus, as $T_0 = T$ is finite, we have $s c_0 - e h_0^m |v_0|^n \in L_{T_0}^2(H^k)$, $h_0 \in L_{T_0}^\infty(\mathbb{R}^2)$ and $\nabla h_0, \nabla z_0 \in L_{T_0}^1(H^k)$. Then there exists a unique solution $(h_1, z_1) \in L_{T_1}^2(H^{k+2}) \cap C_{T_1}(H^{k+1})$ of (3.17a) and (3.17b) with $0 < T_1 \leq T_0$ such that $h_1 \geq h_{\min}$. Similarly, there exists $c_1 \in C_{T_1}(H^k)$ solution of (3.17c). Now, if we assume that $h_i - h_{ref}, z_i \in L_T^2(H^{k+2}) \cap C_{T_i}(H^{k+1})$ and $c_i \in C_{T_i}(H^k)$ then, one has $h_i \in h_{ref} + C_{T_i}(H^2) \subset L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$. Moreover, we have $\nabla h_i, \nabla z_i \in C_{T_i}(H^k) \subset L_{T_i}^1(H^k)$ and $c_i \in C_{T_i}(H^k) \subset L_{T_i}^2(H^k)$. Finally, one has

$$\begin{aligned} \|h_i^m |v_i|^n\|_{H^k} &\leq C \|h_i^{m-3}\|_{L^\infty} (\|h_i\|_{L^\infty} + \|\nabla h_i\|_{H^k} + \|\nabla z_i\|_{H^k})^{n+3} \\ &\in L_{T_i}^\infty(H^k) \subset L_{T_i}^2(H^k). \end{aligned}$$

Thus, the assumptions of Proposition 3.7 are satisfied and there exists a unique solution h_{i+1}, z_{i+1} of (3.17a, 3.17b) such that $h_{i+1} - h_{ref}, z_{i+1} \in L_{T_{i+1}}^2(H^{k+2}) \cap C_{T_{i+1}}(H^{k+1}(\mathbb{R}^2))$ with $0 < T_{i+1} \leq T_i$ such that $h_{i+1} \geq h_{\min}$. The existence of a solution $c_{i+1} \in C_{T_{i+1}}(H^k)$ follows similarly.

Proposition 3.9 (Uniform bounds). *Denote*

$$\mathcal{E}_i(t) = \|h_i - h_{ref}\|_{L^2} + \|\nabla h_i\|_{H^k} + \|z_i\|_{H^{k+1}} + \|c_i\|_{H^k}.$$

There exists $B > 0$ and $0 < T^* \leq T$ independent of $i \in \mathbb{N}$ such that, for all $i \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t \in [0, T^*]} \mathcal{E}_i(t) \leq B, \quad \text{and} \quad h_i(t, x) \geq h_{\min}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Moreover,

$$\int_0^{T^*} (\|\nabla h_i\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z_i\|_{H^{k+1}}^2) \leq C(T^*)B, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Proof. We proceed by induction. One has easily $\mathcal{E}_0(t) = \mathcal{E}(0) \leq B$ and $h_0 \geq h_{\min}$ since h_0, z_0, c_0 are time independent. Following the strategy used to derive a priori estimates, one can prove that for some $\varepsilon > 0$, for all $t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) + \varepsilon (\|\nabla h_1\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z_1\|_{H^{k+1}}^2) \leq C(\varepsilon) (\|r\|_{H^k}^2 + \mathcal{E}_0(t)^\alpha \mathcal{E}_1(t)). \quad (3.18)$$

for some constant $C(\varepsilon)$ depending only on ε and h^0 . By integrating Equation (3.18) with respect to time, one finds:

$$\mathcal{E}_1(t) + \varepsilon \int_0^t (\|\nabla h_1\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z_1\|_{H^{k+1}}^2) \leq \mathcal{E}(0) + C(\varepsilon) \int_0^t \|r\|_{H^k}^2 + \int_0^t C(\varepsilon) \mathcal{E}_0(s)^\alpha \mathcal{E}_1(s) ds.$$

Denote

$$B = 2 \left(\mathcal{E}(0) + C(\varepsilon) \int_0^T \|r\|_{H^k}^2 \right).$$

We choose \tilde{T}^* such that

$$e^{\tilde{T}^* C(\varepsilon) B^\alpha} \leq 2.$$

Then, by applying Gronwall's lemma, one obtains:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) &\leq B, \quad \forall t \in [0, \tilde{T}^*], \\ \int_0^{\tilde{T}^*} (\|\nabla h_1\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z_1\|_{H^{k+1}}^2) &\leq C(\varepsilon) \frac{1 + \ln(2)}{\varepsilon} B. \end{aligned}$$

Next, we have

$$h_1 = h^0 + \int_0^t \operatorname{div}(h_0 \nabla(h_1) + h_1 \nabla z_0) + r.$$

Thus $\|h_1 - h^0\|_{L^\infty} \leq C(\tilde{B}t + \sqrt{\tilde{B}t})$ for some constant C independent of the problem and related to Sobolev injections whereas $\tilde{B} = B + h_{ref} \sqrt{B}$. Then, there exists $0 < T^* \leq \tilde{T}^*$ such that $C(\tilde{B}t + \sqrt{\tilde{B}t}) \leq h_{\min}$ and we deduce that

$$h_1 \geq h_0 - h_{\min} \geq h_{\min} \quad \forall t \in [0, T^*],$$

because $h^0 \geq 2h_{\min}$ by hypothesis. This proves the initial step for $i = 1$. Now assume that $\mathcal{E}_i(t) \leq B$ and $h_i \geq h_{\min}$ for all $t \in [0, T^*]$. The estimates on h_{i+1} , z_{i+1} and c_{i+1} are a direct consequence of the energy estimate:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{i+1}(t) + \varepsilon (\|\nabla h_{i+1}\|_{H^{k+1}}^2 + \|\nabla z_{i+1}\|_{H^{k+1}}^2) \leq C(\varepsilon)(\|r\|_{H^k}^2 + \mathcal{E}_i(t)^\alpha) \mathcal{E}_{i+1}(t) \quad (3.19)$$

which is proved by following the strategy used to derive the a priori estimates. This completes the proof of the proposition. \square

Proposition 3.10. *The sequences $(\partial_t h_i)$ and $(\partial_t z_i)$ are uniformly bounded in $L_{T^*}^2(H^k)$. The sequence $(\partial_t c_i)$ is uniformly bounded in $L_{T^*}^2(H^{k-1})$.*

Proof. For $p \in \{0, \dots, k\}$ we differentiate p times the equations (3.17a), (3.17b) (3.17b) and multiply it by $\nabla^p \partial_t h_i$, $\nabla^p \partial_t z_i$ and $\nabla^p \partial_t c_i$ respectively, and integrate in space. Using Proposition 3.9, we obtain bounds for $\|\partial_t h_i\|_{L_{T^*}^2(H^k)}$, $\|\partial_t z_i\|_{L_{T^*}^2(H^k)}$ and $\|\partial_t c_i\|_{L_{T^*}^2(H^{k-1})}$. \square

3.5 Convergence of the sequences

In what follows, we denote $T^* = T$ in order to simplify the notations.

Proposition 3.11. *The sequences $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\partial_t h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\partial_t z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ are Cauchy sequences in $L_T^2(L^2)$. The sequences $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(\partial_t c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ are Cauchy sequences in $C_T(L^2)$.*

Proof. In the following we denote the quantities of the form $f_{i+1} - f_i$ by δf_i . For all $i \geq 1$, the equations for δh_i , δz_i , δc_i are written as:

$$\begin{cases} \partial_t \delta h_i - \operatorname{div}(h_i \nabla \delta h_i + \delta h_{i-1} \nabla h_i) - \operatorname{div}(h_{i+1} \nabla \delta z_i + \delta h_i \nabla z_{i-1}) = 0, & (3.20a) \\ \partial_t \delta z_i - K \delta \Delta z_i = s \delta c_i - e(h_i^m (|v_i|^n - |v_{i-1}|^n) + |v_{i-1}|^n (h_i^m - h_{i-1}^m)), & (3.20b) \\ \partial_t \delta c_i + \delta v_{i-1} \nabla c_{i+1} + v_{i-1} \delta \nabla c_i = e(h_i^{m-1} (|v_i|^n - |v_{i-1}|^n) \\ \quad + |v_{i-1}|^n (h_i^{m-1} - h_{i-1}^{m-1})) - (s+r) \left(\frac{c_i}{h_i} - \frac{c_{i-1}}{h_{i-1}} \right). & (3.20c) \end{cases}$$

Bounds on δh_i , δz_i and δc_i : We multiply the equation (3.20a) by δh_i , and integrate over space:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta h_i\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} (h_i \nabla h_{i+1} - h_{i-1} \nabla h_i) \nabla \delta h_i + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla z_i h_{i+1} - \nabla z_{i-1} h_i) \nabla \delta h_i = 0.$$

First, on the one hand, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (h_i \nabla h_{i+1} - h_{i-1} \nabla h_i) \nabla \delta h_i &= \int_{\mathbb{R}^2} h_i (\nabla \delta h_i)^2 + \delta h_{i-1} \nabla h_i \nabla \delta h_i \\ &\geq h_{\min} \|\nabla \delta h_i\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \delta h_{i-1} \nabla h_i \nabla \delta h_i. \end{aligned}$$

On the other hand, we have the estimate:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla z_i h_{i+1} - \nabla z_{i-1} h_i) \nabla \delta h_i &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla z_i \nabla (\delta h_i)^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \delta z_{i-1} h_i \nabla \delta h_i \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta z_i (\delta h_i)^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \delta z_{i-1} h_i \nabla \delta h_i \\
&\leq C \|\delta h_i\|_{L^2}^2 + \|h_i\|_{L^\infty} \|\delta z_{i-1}\|_{L^2} \|\nabla \delta h_i\|_{L^2} \\
&\leq C \|\delta h_i\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2h_{\min}} \|\delta z_{i-1}\|_{L^2}^2 + \frac{h_{\min}}{2} \|\nabla \delta h_i\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Consequently, we obtain:

$$\frac{d}{dt} \|\delta h_i\|_{L^2}^2 + h_{\min} \|\nabla \delta h_i\|_{L^2}^2 \leq C \|\delta h_i\|_{L^2}^2 + C \|\delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + C \|\delta z_{i-1}\|_{L^2}^2. \quad (3.21)$$

We proceed similarly for δz_i . By using Equation (3.20b), one finds:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|\delta z_i\|_{L^2}^2 + 2K \|\nabla \delta z_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq s (\|\delta c_i\|_{L^2}^2 + \|\delta z_i\|_{L^2}^2) + 2e \left| \int_{\mathbb{R}^2} (h_i^m |v_i|^n - h_{i-1}^m |v_{i-1}|^n) \delta z_i \right|.
\end{aligned}$$

In order to bound the right-hand term, we use the inequality $|x|^n - |y|^n \leq n|x - y| \max(|x|, |y|)^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
h_i^m |v_i|^n - h_{i-1}^m |v_{i-1}|^n &= h_i^m (|v_i|^n - |v_{i-1}|^n) + |v_{i-1}|^n (h_i^m - h_{i-1}^m) \\
&\leq n h_i^m |v_i - v_{i-1}| \max(\|v_{i-1}\|_{L^\infty}, \|v_i\|_{L^\infty})^{n-1} \\
&\quad + \frac{m}{h_{\min}} |v_{i-1}|^n |h_i - h_{i-1}| \max(\|h_i\|_{L^\infty}, \|h_{i-1}\|_{L^\infty})^m.
\end{aligned}$$

Consequently, as h_i, h_{i-1} and v_i, v_{i-1} are uniformly bounded in $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (h_i^m |v_i|^n - h_{i-1}^m |v_{i-1}|^n) \delta z_i &\leq C (\|v_i - v_{i-1}\|_{L^2} + \|h_i - h_{i-1}\|_{L^2}) \|\delta z_i\|_{L^2} \\
&\leq C (\|\nabla \delta h_{i-1}\|_{L^2} + \|\nabla \delta z_{i-1}\|_{L^2} + \|\delta h_{i-1}\|_{L^2}) \|\delta z_i\|_{L^2} \\
&\leq C (\|\nabla \delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta z_{i-1}\|_{L^2}^2) + \|\delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\delta z_i\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \|\delta z_i\|_{L^2}^2 + 2K \|\nabla \delta z_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq C (\|\delta c_i\|_{L^2}^2 + \|\delta z_i\|_{L^2}^2) + C (\|\nabla \delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta z_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\delta h_{i-1}\|_{L^2}^2). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Finally, for δc_i , we use the same method as before with the equation (3.20c) and we obtain:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta c_i\|_{L^2}^2 &= - \int (\delta v_{i-1} \nabla c_{i+1} + v_{i-1} \nabla \delta c_i) \delta c_i \\
&\quad + e \int (h_i^{m-1} |v_i|^n - h_{i-1}^{m-1} |v_{i-1}|^n) \delta c_i - (s+r) \int \left(\frac{c_i}{h_i} - \frac{c_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \delta c_i \\
&= - \int \left(\delta v_{i-1} \nabla c_{i+1} \delta c_i - \frac{1}{2} \operatorname{div}(v_{i-1}) (\delta c_i)^2 \right) \\
&\quad + e \int (h_i^{m-1} |v_i|^n - h_{i-1}^{m-1} |v_{i-1}|^n) \delta c_i - (s+r) \int \left(\frac{c_i}{h_i} - \frac{c_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \delta c_i \\
&\leq \|\delta v_{i-1}\|_{L^2} \|\nabla c_{i+1}\|_{L^\infty} \|\delta c_i\|_{L^2} + \|\nabla v_{i-1}\|_{L^\infty} \|\delta c_i\|_{L^2}^2 + C(\|\nabla \delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \|\nabla \delta z_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\delta h_{i-1}\|_{L^2}^2) + \frac{s + \|r\|_{H^2}}{h_{\min}} (\|c_i\|_{L^2} + \|c_{i-1}\|_{L^2}) \|\delta c_i\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Then we add the inequalities (3.21), (3.22) and (3.23) and integrate on $[0, t]$ with $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
&\|\delta h_i\|_{L^2}^2 + \|\delta z_i\|_{L^2}^2 + \|\delta c_i\|_{L^2}^2 + h_{\min} \int_0^t \|\nabla \delta h_i\|_{L^2}^2 dt + 2K \int_0^t \|\nabla \delta z_i\|_{L^2}^2 dt \\
&\leq \|\delta h_0\|_{L^2}^2 + \|\delta z_0\|_{L^2}^2 + \|\delta c_0\|_{L^2}^2 + C \int_0^t (\|\delta h_i\|_{L^2}^2 + \|\delta z_i\|_{L^2}^2 + \|\delta c_i\|_{L^2}^2) dt \\
&\quad + C \int_0^t (\|\delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\delta z_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\delta c_{i-1}\|_{L^2}^2) dt \\
&\quad + C \int_0^t (\|\nabla \delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta z_{i-1}\|_{L^2}^2) dt.
\end{aligned}$$

We apply the Gronwall lemma and obtain, for all $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
&\|\delta h_i\|_{L^2}^2 + \|\delta z_i\|_{L^2}^2 + \|\delta c_i\|_{L^2}^2 + h_{\min} \int_0^t \|\nabla \delta h_i\|_{L^2}^2 dt + 2K \int_0^t \|\nabla \delta z_i\|_{L^2}^2 dt \\
&\leq C \left[\|\delta h_0\|_{L^2}^2 + \|\delta z_0\|_{L^2}^2 + \|\delta c_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\delta z_{i-1}\|_{L^2}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\delta c_{i-1}\|_{L^2}^2) dt + \int_0^t (\|\nabla \delta h_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta z_{i-1}\|_{L^2}^2) dt \right] e^{Ct}.
\end{aligned}$$

With this inequality, we deduce by induction on i that $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\|\delta h_i\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|\delta z_i\|_{L_T^2(L^2)}^2 + \|\delta c_i\|_{L_T^\infty(L^2)}^2 \leq C \frac{(Te^{CT})^i}{i!} (\|\delta h_0\|_{H^1}^2 + \|\delta z_0\|_{H^1}^2 + \|\delta c_0\|_{L^2}^2).$$

Consequently, the series $\sum \|\delta h_i\|_{L_T^2(L^2)}^2$, $\sum \|\delta z_i\|_{L_T^2(L^2)}^2$ and $\sum \|\delta c_i\|_{L_T^\infty(L^2)}^2$ converge, thus the sequences $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ are Cauchy sequences in the required spaces.

Bounds on $\partial_t \delta h_i$, $\partial_t \delta z_i$ and $\partial_t \delta c_i$: Like the estimates in Proposition 3.10, we use the system (3.20) and Proposition 3.9 to obtain the bounds. \square

By Proposition 3.11, there exists $h - h_{ref}, z \in L_T^2(L^2)$ such that $h_i - h_{ref}$ converges to $h - h_{ref}$ and z_i converges to z in $L_T^2(L^2)$. As $(h_i - h_{ref})$ and (z_i) are uniformly bounded in $L_T^2(H^{k+2})$, we obtain by interpolation that $\forall 1/2 < \theta < 1$, $\forall i > j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|h_i - h_j\|_{H^{\theta(k+2)}}^2 dt &\leq \int_0^T \left(\|h_i - h_j\|_{L^2}^{1-\theta} \|h_i - h_j\|_{H^{k+2}}^\theta \right) dt \\ &\leq \|h_i - h_j\|_{C_T(L^2)}^{1-\theta} \int_0^T \|h_i - h_j\|_{H^{k+2}}^\theta dt \\ &\leq \|h_i - h_j\|_{C_T(L^2)}^{1-\theta} T^{2/(2-\theta)} \|h_i - h_j\|_{L_T^2(H^{k+2})}^\theta \\ &\leq \|h_i - h_j\|_{C_T(L^2)}^{1-\theta} T^{2/(2-\theta)} (2C_1)^\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Therefore $\forall k/2 < s < k$, the sequences $(h_i - h_{ref})$ and (z_i) are Cauchy sequences in $L_T^2(H^{s+2})$, thus $h - h_{ref}, z \in L_T^2(H^{s+2})$. Moreover $\partial_t h_i$ converges to $\partial_t h$ in $L_T^2(L^2)$ and $(\partial_t h_i)$ is uniformly bounded in $L_T^2(H^k)$, similarly for $\partial_t z$. Consequently $\forall s < k$, $\partial_t h, \partial_t z \in L_T^2(H^s)$, thus by Proposition 3.5, $h - h_{ref}, z \in C_T(H^{s+1})$. Finally the a priori estimates on h and z allow to conclude that $h - h_{ref}, z \in L_T^2(H^{k+2}) \cap C_T(H^{k+1})$. In particular, as $k + 1 = 4$, $(h_i - h_{ref}), (\nabla h_i), (\nabla^2 h_i), (\partial_t h_i)$ and $(z_i), (\nabla z_i), (\nabla^2 h_i), (\partial_t z_i)$ converges in $C([0, T] \times \mathbb{R}^2)$.

Now we consider $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$. By Proposition 3.11, there exists $c \in C_T(L^2)$ limit of $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in this space. We know that $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is uniformly bounded in $C_T(H^k)$, so by interpolation: $\forall 0 < \theta < 1, \forall i > j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|c_i - c_j\|_{H^{\theta(k)}} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|c_i - c_j\|_{L^2}^{1-\theta} \sup_{t \in [0, T]} \|c_i - c_j\|_{H^k}^\theta \\ &\leq \|c_i - c_j\|_{C_T(L^2)}^{1-\theta} (\|c_i\|_{C_T(H^k)} + \|c_j\|_{C_T(H^k)})^\theta \\ &\leq C \|c_i - c_j\|_{C_T(L^2)}^{1-\theta} \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Therefore $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence, and thus converges to c in the space $C_T(H^s)$, for all $s < k$. Moreover $(\partial_t c_i)$ converges to $\partial_t c$ in $C_T(L^2)$ and is uniformly bounded in $C_T(H^{k-1})$, so it converges to c in $C_T(H^{s-1})$. And we conclude by the a priori estimate on c that $c \in C_T(H^k)$. To conclude, $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\partial_t c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(\nabla c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge in $C_T(\mathbb{R}^2)$ thus we can take the limit in the equations, and (h, z, c) is solutions of System (3.1). This concludes the proof of the existence.

3.6 Uniqueness

Proposition 3.12. *Let (h_1, z_1, c_1) and (h_2, z_2, c_2) be two solutions of System (3.1) satisfying the hypotheses of Theorem 1.1. Then $\forall t \in [0, T]$:*

$$\begin{aligned} \|h_1(t) - h_2(t)\|_{L^2}^2 + \|z_1(t) - z_2(t)\|_{L^2}^2 + \|c_1(t) - c_2(t)\|_{L^2}^2 \\ \leq (\|h_1^0 - h_2^0\|_{L^2}^2 + \|z_1^0 - z_2^0\|_{L^2}^2 + \|c_1^0 - c_2^0\|_{L^2}^2) e^{CT} \end{aligned}$$

In particular, when the initial conditions are the same for both solutions, these solutions are the same. Consequently this proposition shows the uniqueness of the solution (h, z, c) of the theorem.

Proof. We first write the equations verified by $\delta h := h_1 - h_2$, $\delta z := z_1 - z_2$ and $\delta c := c_1 - c_2$:

$$\begin{cases} \partial_t \delta h - \operatorname{div}(h_1 \nabla \delta h + \delta h \nabla h_2) - \operatorname{div}(h_1 \nabla \delta z + \delta h \nabla z_2) = 0 & (3.24a) \\ \partial_t \delta z - K \delta \Delta z = s \delta c - e (h_1^m (|v_1|^n - |v_2|^n) + |v_2|^n (h_1^m - h_2^m)) & (3.24b) \\ \partial_t \delta c + \delta v \nabla c_2 + v_2 \delta \nabla c = e (h_1^{m-1} (|v_1|^n - |v_2|^n) + |v_2|^n (h_1^{m-1} - h_2^{m-1})) \\ \quad - (s + r) \left(\frac{c_1}{h_1} - \frac{c_2}{h_2} \right) & (3.24c) \end{cases}$$

Then the bound is obtained with a similar process as in the proof of Proposition 3.11. \square

4 Spectral stability of constant states

In this section, we consider the flow over a topography that is an inclined plane at time $t = 0$. We assume that $r = 0$ and we study the spectral stability of constant states. We expect that instability will provide a mechanism for pattern formation. We first write System (2.5) in a non-dimensional form and then linearize this system around constant states. Then we explore numerically the stability of the system. Finally, we carry out the spectral stability analysis by using Routh-Hurwitz theorem: this provides necessary and sufficient conditions for constant states to be spectrally stable. However, these conditions do not provide any insight on the nature of the instabilities. We complete this analysis by an asymptotic expansion of the spectrum around the origin and in the high frequency regime.

4.1 Non-dimensionalization and linearization of the system

We write System (2.5) in a non-dimensional form in order to identify the important parameters. We introduce several characteristic quantities : Z is a characteristic eroded height, H a characteristic water height, L a characteristic wavelength and T a characteristic time. We chose T to be the necessary time to erode the soil of a height Z , with an erosion speed e . Thus T verifies $eT = Z$. As $v = \mu \tan \theta e_1 - \mu \nabla(z + h)$, we fix the characteristic water velocity $V = \mu$. We introduce the dimensionless variables :

$$h' := \frac{h}{H}, \quad z' = \frac{z}{Z}, \quad v' := \frac{v}{V}, \quad c' := \frac{c}{c_{sat}} \quad x' := \frac{x}{L}, \quad t' := \frac{e}{Z} t.$$

In order to simplify the notations, we will assume $H = Z$. Then, dropping the primes, System (2.5) is written as:

$$\begin{cases} \partial_t h + \frac{ZV \tan \theta}{eL} \partial_x h = \frac{Z^2 V}{eL^2} \operatorname{div}(h \nabla(h+z)), \\ h \partial_t c + \frac{ZV \tan \theta}{eL} h \partial_x c = \frac{Z^2 V}{eL^2} h \nabla(h+z) \cdot \nabla c + \frac{\rho_s}{c_{sat}} \left(h^m \left| \tan \theta e_1 - \frac{Z}{L} \nabla(h+z) \right|^n - \frac{s}{e} c \right), \\ \partial_t z = \frac{ZK}{eL^2} \Delta z - h^m \left| \tan \theta e_1 - \frac{Z}{L} \nabla(h+z) \right|^n + \frac{s}{e} c. \end{cases}$$

To simplify the equations, we set $\frac{Z}{L} = \frac{e}{V}$, and we define $\alpha := \frac{Z}{L} = \frac{e}{V}$, $K := \frac{ZK}{eL^2} = \frac{K}{LV}$. The system reads :

$$\begin{cases} \partial_t h + \tan \theta \partial_x h = \alpha \operatorname{div}(h \nabla(h+z)), \\ h \partial_t c + \tan \theta h \partial_x c = \alpha h \nabla(h+z) \cdot \nabla c + \frac{\rho_s}{c_{sat}} h^m \left| \tan \theta e_1 - \alpha \nabla(h+z) \right|^n - \frac{\rho_s s}{c_{sat} e} c, \\ \partial_t z = K \Delta z - h^m \left| \tan \theta e_1 - \alpha \nabla(h+z) \right|^n + \frac{s}{e} c. \end{cases} \quad (4.1)$$

The stationary states of Equation (4.1) for a flat surface, denoted by $(\underline{h}, \underline{c}, \underline{z})$ verify:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in \Omega, \quad \begin{cases} h(t, x, y) = \underline{h} > 0, \\ c(t, x, y) = \underline{c} = \frac{e}{s} \underline{h}^m \tan^n \theta > 0, \\ z(t, x, y) = 0. \end{cases}$$

This means that the erosion and the deposition process equilibrate each other and the bottom is not eroded, whereas the fluid height is a constant.

Let $(\underline{h} + \tilde{h}, \underline{c} + \tilde{c}, \tilde{z})$, with $|\tilde{h}|, |\tilde{c}|, |\tilde{z}| \ll 1$, be a small perturbation of the constant state, and solution of System (4.1). Then, at first order, this solution verifies the following linear system:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{h} + \tan \theta \partial_x \tilde{h} = \alpha \underline{h} \Delta (\tilde{h} + \tilde{z}) \\ \partial_t \tilde{c} + \tan \theta \partial_x \tilde{c} = \frac{\rho_s}{c_{sat}} \frac{s}{e} \left(\frac{m \underline{c}}{\underline{h}^2} \tilde{h} - \frac{\alpha n \underline{c}}{\underline{h} \tan \theta} \partial_x (\tilde{h} + \tilde{z}) - \frac{\tilde{c}}{\underline{h}} \right) \\ \partial_t \tilde{z} = K \Delta \tilde{z} - \frac{s}{e} \left(\frac{m \underline{c}}{\underline{h}} \tilde{h} - \frac{\alpha n \underline{c}}{\tan \theta} \partial_x (\tilde{h} + \tilde{z}) - \tilde{c} \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

We denote $f = (\tilde{h}, \tilde{c}, \tilde{z})^T$. Then f verifies the equation $\partial_t f = A_0 f + A_1 \partial_x f + A_2 \Delta f$

with:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{amc}{\hbar} & -a & 0 \\ -\frac{amc}{\bar{\rho}_s} & \frac{a\hbar}{\bar{\rho}_s} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\tan\theta & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha an\bar{c}}{\tan\theta} & -\tan\theta & -\frac{\alpha an\bar{c}}{\tan\theta} \\ \frac{\alpha an\hbar\bar{c}}{\bar{\rho}_s \tan\theta} & 0 & \frac{\alpha an\hbar\bar{c}}{\bar{\rho}_s \tan\theta} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \alpha\hbar & 0 & \alpha\hbar \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix},$$

where we have denoted $a = \frac{s\rho_s}{e\hbar c_{sat}}$ and $\bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{c_{sat}}$.

We apply the Fourier transform in space and the equation verified by \hat{f} , the Fourier transform in space of f , is:

$$\partial_t \hat{f} = (A_0 + i\xi A_1 - (\xi^2 + \eta^2) A_2) \hat{f} := A(\xi, \eta) \hat{f}.$$

Consequently, in order to study the stability of the system, we have to determine the sign of the real part of the eigenvalues of the matrix $A(\xi, \eta)$. These eigenvalues are denoted by $\lambda^i(\xi, \eta)$ with $i \in \{1, 2, 3\}$ and the associated eigenvectors are denoted by $V^i(\xi, \eta)$. The expressions for λ^i are not explicit: in the next Subsection, we compute numerically the stability of the system. Then Subsection 4.3 gives a stability result on the domain. This result is completed with the asymptotic study of the eigenvalues at low ($|\xi|^2 + |\eta|^2 \ll 1$) and high ($|\xi|^2 + |\eta|^2 \gg 1$) frequencies.

4.2 Numerical exploration of stability

In this section, we explore numerically the stability of the system (4.2). For that purpose, we have computed numerically the three eigenvalues of the matrix $A(\xi, \eta)$, and the system is stable if and only if the real parts of these eigenvalues are negative. Since $A(\xi, -\eta) = A(\xi, \eta)$ and $A(-\xi, \eta) = \overline{A(\xi, \eta)}$, the real part of the spectrum remains unchanged under the transformation $\xi \mapsto -\xi$ and $\eta \mapsto -\eta$. Thus, we examine the behavior of the system in the top right quarter of the plane. The choice of parameters for these computations is given in Table 2.1.

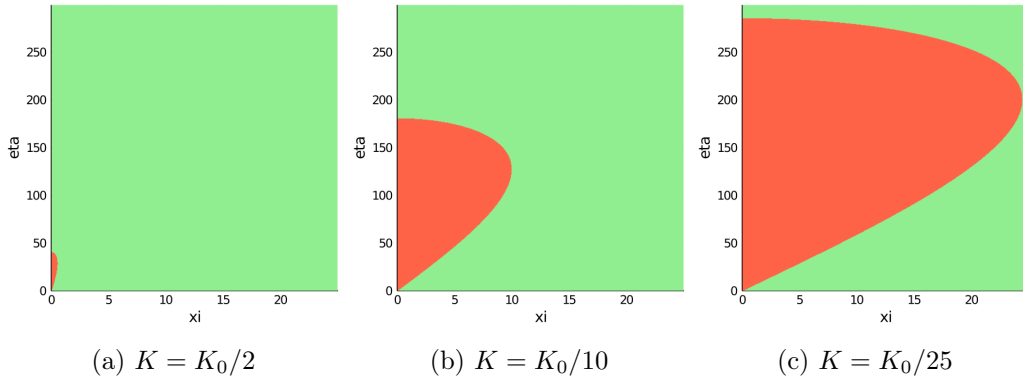
In Figure 4.1, we have represented an illustration of the stability of the system when $0 < K \leq K_0$, where

$$K_0 = \alpha m \hbar c.$$

The domain represented is a bounded subset of the plane $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, and the color represent the stability: the system is stable in the green area, and unstable in the red area. We clearly see the stabilizing effect of the creep effect: when K is higher, the stable area is larger. It seems that the unstable area is bounded. This will be confirmed by Proposition 4.2.

Angle of the plane	θ	20°
Characteristic water height	H	0.5 mm
Characteristic water velocity	V	1 m/s
Ratio between erosion rate and water velocity	$\alpha = e/V$	1
Stationary water height	\underline{h}	1
Exponent of friction over h	m	1,6
Exponent of friction over v	n	3,2
Ratio between sediment density and saturation	ρ_s/c_{sat}	1
Ratio between erosion and sedimentation rate	e/s	2000

Table 2.1 – Parameters for the numerical exploration of stability

Figure 4.1 – Stability diagrams in the plane $(\xi, \eta) \subset \mathbb{R}^2$, for $K > 0$. The system is unstable in the red area, and stable in the green area.

Then, in Figure 4.2 there is no creep effect: $K = 0$, and we represent various stability diagrams for several values of the ratio n/m . The value of m is the same as in Table 2.2: $m = 1.6$, and n vary between $m/2$ and $10m$. We observe that the behavior of the system changes with the ratio m/n , but the unstable area always seems to be unbounded. When $n \gg m$ as in Figure 4.2a, the stable area is bigger than the unstable area, and the system is unstable only for perturbations of transverse dominant direction. When $n \approx m$, as in Figure 4.2c, the system is stable only for longitudinal perturbations. Finally, when $n < m$ the system seems to be unstable at all frequencies, as in Figure 4.2d.

The stability exploration of the system (4.2) should be quantified by theoretical results, in order to identify the types of instabilities and the transitions between stability and instability. This is done in the following Section.

4.3 Stability analysis

The following theorem provides a necessary and sufficient condition for the stability of the system, depending on the parameters of the model.

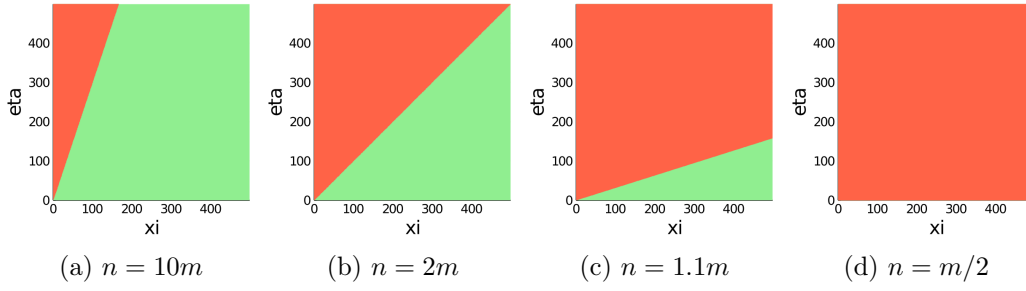


Figure 4.2 – Stability diagrams in the plane $(\xi, \eta) \subset \mathbb{R}^2$, for $K = 0$ and various values of n/m . The system is stable in the green area and unstable in the red area.

Theorem 4.1. *If $K > 0$, there exists a constant $\gamma > 0$ independent of n such that System (4.2) is spectrally stable at all frequencies $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_*^2$ if and only if*

$$K \geq \alpha m h c / \bar{\rho}_s \quad \text{and} \quad n < \gamma.$$

If $K = 0$, System (4.2) is spectrally unstable. More precisely, for $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, the system is stable if and only if*

$$m < \frac{\bar{\rho}_s}{c} \quad \text{and} \quad \eta^2 m < \xi^2 (n - m).$$

In particular, if $n \leq m$ then the system is always unstable.

The proof of Theorem 4.1 is given in Appendix A by using Routh-Hurwitz criterion.

This theorem confirms the prominent role of the creep effect that was already observed for the well-posedness property of System (3.1) since Theorem 1.1 required K to be sufficiently large. Here, it plays a crucial role in the stability of the system. Indeed, the condition $K \geq \alpha m h c / \bar{\rho}_s$ is verified only if the creep effect on the soil is large enough. Therefore, this effect has a stabilising effect on the system, as observed in the previous section where the unstable region shrinks to 0 as the constant $K > 0$ increases. Conversely, the two conditions of Theorem 4.1 mean that the constants α , m and n have a destabilising effect on the system. Recall that α measures the ratio between the erosion speed and the water speed. When α is large, the erosion speed is large compared to the fluid velocity which increases the instability of the bottom surface.

When $K = 0$, the constant m still has a destabilising effect. The other condition implies that arbitrary high frequencies are unstable. When $n < m$ then the system is unstable on the whole domain \mathbb{R}^2 . When $n \geq m$, the system is stable in an unbounded area of the spectrum :

$$\left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}; m \leq \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} n \right\}.$$

This area is delimited by the lines of equation

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{n - m}{m}} \xi,$$

thus increases with n : this confirms the observation made in Figure 4.2. In particular, if $n \gg m$ then the system destabilises only if $\xi \ll \eta$, that is for perturbations transverse to the water flux. Moreover, as long as $n \geq m$, the system is unstable in the transverse direction ($\xi = 0$). This may lead to the formation of rills in the direction of the water flux.

Theorem 4.1 provides a stability criterion but does not give any insight on the nature of the instabilities. The following propositions determine more precisely the spectrum in the small wavenumber regime $\xi^2 + \eta^2 \ll 1$ and in the large wavenumber regime $\xi^2 + \eta^2 \gg 1$. Since the system is spectrally stable if $K \geq \alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s$, we focus on the case

$$K < \frac{\alpha m \underline{hc}}{\bar{\rho}_s}$$

in order to detect low frequency instabilities. The following proposition provides a more complete picture of the stability diagram when $K < \alpha m \underline{hc} / \rho_s$ in the limit $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0$. The expansion of the eigenvalues depends on the relative position of ξ and η^2 . We split the analysis into two cases: $\xi = O(\eta^2)$ and $\eta^2 = o(\xi)$.

Proposition 4.1 (Instabilities at low frequencies). *Assume $K < \alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s$. In the limit $|\xi| + |\eta| \rightarrow 0$, System (4.2) has the following stability properties:*

- When $\xi = O(\eta^2)$ then:
 - Under the assumption $\alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s - \alpha \underline{h} < K < \alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s$, the system is stable if and only if

$$\xi^2 < \frac{K}{\bar{\rho}_s \tan^2 \theta} \frac{(K + \alpha \underline{h} - \alpha m \underline{hc})^2}{\alpha m \underline{hc} - K} \eta^4.$$

- If $K \leq \alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s - \alpha \underline{h}$, the system is unstable for all these frequencies.
- When $\eta^2 = o(\xi)$ then the system is stable if and only if

$$(K \bar{\rho}_s + \alpha \underline{hc}(n - m)) \xi^2 > (\alpha m \underline{hc} - K \bar{\rho}_s) \eta^2.$$

In particular, if $K < \alpha(m - n) \underline{hc} / \rho_s$ the system is unstable at these frequencies. Moreover the most unstable eigenvalue expands as

$$\lambda^1 \underset{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 0}{=} - \left(K + \frac{c_{sat}}{\rho_s} \alpha n \underline{hc} - \frac{c_{sat}}{\rho_s} \alpha m \underline{hc} \right) \xi^2 - \left(K - \frac{c_{sat}}{\rho_s} \alpha m \underline{hc} \right) \eta^2 + o(\xi^2 + \eta^2).$$

Remark 4.1. *This proposition means that the system is stable in all directions at low frequencies if and only if $K \geq \alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s$, and we recover the global criterion.*

The consequences of Proposition 4.1 are fully discussed in Section 4.4. However, we can make some preliminary comments. We first note that when $K \rightarrow \alpha m \underline{hc} / \bar{\rho}_s$ then

$$\frac{K}{\bar{\rho}_s \tan^2 \theta} \frac{(K + \alpha \underline{h} - \alpha m \underline{hc})^2}{\alpha m \underline{hc} - K} \rightarrow +\infty \quad \text{and} \quad \frac{\alpha m \underline{hc} - K \bar{\rho}_s}{K \bar{\rho}_s + \alpha \underline{hc}(n - m)} \rightarrow 0.$$

Consequently, the stable area (the set of frequencies (ξ, η) such that the system is stable at these frequencies) increases with K , until filling all the low frequencies. Conversely, when $K \rightarrow 0$ the stable area decreases, up to the area described in the second part of Theorem 4.1, when $K = 0$. In the unstable regime $K < \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s$, we can precise the instability scenario. In the case $\xi = O(\eta^2)$, the behaviour of the function f defined as

$$f(K) := K \frac{(\alpha \hbar + K - \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s)^2}{\alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s - K}$$

is described in Figure 4.3. On the interval $[m \hbar c / \bar{\rho}_s - \alpha \hbar, \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s]$, the function f is increasing from 0 to $+\infty$, thus for ξ, η fixed there exists a unique $\bar{K}(\xi, \eta)$ such that

$$\xi^2 = \frac{1}{\bar{\rho}_s \tan^2 \theta} f(\bar{K}(\xi, \eta)) \eta^4.$$

If $K \leq \bar{K}(\xi, \eta)$ then the system is unstable at this frequency (ξ, η) , and if $K > \bar{K}(\xi, \eta)$ then the system is stable at this frequency.

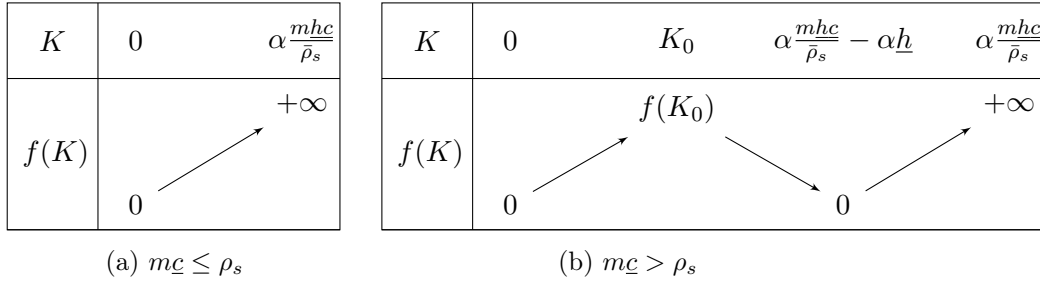


Figure 4.3 – Variations of the function f

In order to prove Proposition 4.1, we compute an asymptotic expansion of the eigenvalues $\lambda^i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2$ of the matrix $A(\xi, \eta)$, as $|\xi| + |\eta|$ goes to 0. Then, we study the sign of their real parts. Note that $A(0, 0) = A_0$, which corresponds to homogeneous in space perturbations, admits $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$ and $\lambda^3 = -a$ as eigenvalues. We focus on the expansion of the eigenvalues λ^1, λ^2 bifurcating from 0 as the third one bifurcates from $\lambda^3(0, 0) = -a < 0$ and its real part remains negative for $|\xi| + |\eta|$ small enough. The matrix $A(0, 0)$ is diagonalizable and the eigenvalue 0 is semi-simple (its algebraic multiplicity, 2, is equal to its geometric multiplicity). Therefore the eigenvalues $\lambda^i(\xi, \eta)$ admit a Taylor expansion with respect to the perturbation parameters ξ and η^2 (see [4]). These expansions depends heavily on the ratio ξ/η^2 : we split the analysis between the case $|\xi|/\eta^2$ bounded by a constant, which is studied in Section B.1, and the case $|\xi|^2/\eta^2 \rightarrow +\infty$, which is studied in Section B.2. The details of the proof of Proposition 4.1 can be found in Appendix B.

The following proposition determine the stability of System (4.2) in the limit $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$.

Proposition 4.2 (Stability analysis at high frequencies). *The stability results for the system at high frequencies are divided in three cases:*

- When $K > 0$ then System (4.2) is stable at high frequencies. The eigenvalues expand as

$$\begin{cases} \lambda_1(\xi, \eta) = -K(\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2) \\ \lambda_2(\xi, \eta) = -\alpha \hbar (\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2) \\ \lambda_3(\xi, \eta) = -i\xi \tan(\theta) - \frac{s\bar{\rho}_s}{e\hbar} + o(1). \end{cases}$$

- If $K = 0$ and $\xi \neq 0$, the Taylor expansion of the eigenvalues when $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$ is given by:

$$\begin{cases} \lambda_1(\xi, \eta) = \frac{s\bar{c}}{e\hbar} \left(m - \frac{\xi^2}{\epsilon^2} n \right) + o(1), \\ \lambda_2(\xi, \eta) = -\alpha \hbar (\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2), \\ \lambda_3(\xi, \eta) = -i\xi \tan \theta - \frac{s\bar{\rho}_s}{e\hbar} + o(1). \end{cases}$$

- If $K = 0$ and $\xi = 0$, the Taylor development of the eigenvalues when $\eta \rightarrow +\infty$ is:

$$\begin{cases} \lambda_1(0, \eta) = 0, \\ \lambda_2(0, \eta) = -\alpha \hbar \eta^2 + o(\eta^2), \\ \lambda_3(0, \eta) = \frac{s\bar{c}}{e\hbar} \left(m - \frac{\bar{\rho}_s}{\bar{c}} \right) + o(1). \end{cases}$$

The proof of this proposition is postponed in Appendix C.

As a consequence of Proposition 4.2, one finds that when $K > 0$, the unstable domain in the spectrum is bounded, as observed in Section 6. Thus, there exists a wave vector associated to an unstable eigenvalue with a maximum real part which may provide a description of the pattern geometry. When $K = 0$, the unstable region is unbounded but there is also a most unstable eigenvalue with its real part bounded by $\frac{s\bar{c}}{e\hbar}m$: this is obtained when $\xi = 0$ for pure transverse perturbations.

4.4 Discussion on the low frequencies stability analysis: form of the spectrum

The stability result on the whole domain Theorem 4.1 does not give an explicit formula for the localization of the stable and unstable areas when $K > 0$. Therefore in this section we interpret the stability analysis at low frequencies Proposition 4.1 to study the form of the limit between stable and unstable areas in the spectrum, at these frequencies, for $K > 0$. As the real part of the spectrum remains unchanged under the transformations $\xi \mapsto -\xi$ and $\eta \mapsto -\eta$, we examine the behavior of the

system in the top right quarter of the plane. When $K \geq \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s$, the system is stable at all low frequencies, thus we focus on the case $K < \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s$.

We first examine the case of the frequencies which verify $\eta^2 = o(\xi)$. If $K \bar{\rho}_s \leq \alpha(m-n)\hbar c$, the system is unstable at these frequencies. When $\alpha(m-n)\hbar c / \bar{\rho}_s \leq K \leq \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s$, the instability comes from the term in η of the first eigenvalue, and:

$$\lambda^1 \geq 0 \iff \frac{\eta^2}{\xi^2} \geq \frac{K \bar{\rho}_s - \alpha(m-n)\hbar c}{\alpha m \hbar c - K \bar{\rho}_s} + o(\xi^2 + \eta^2).$$

Consequently the boundary between the stable and unstable areas of the system is

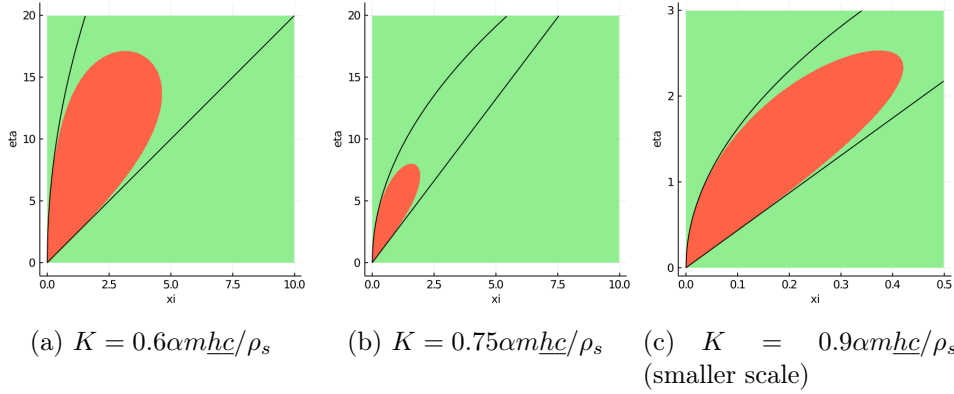


Figure 4.4 – Stability of the system at low frequencies in the plane (ξ, η) , when $K > \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s - \alpha \hbar$. The system is stable in the green area and unstable in the red area. The black curves are the line of slope (4.3) and the curve of Equation (4.4)

close to a straight line, of slope

$$\frac{\eta}{\xi} = \sqrt{\frac{K \bar{\rho}_s - \alpha(m-n)\hbar c}{\alpha m \hbar c - K \bar{\rho}_s}}. \quad (4.3)$$

The system is stable below this line, and unstable above. The other case corresponds to the frequency domain $\xi = O(\eta^2)$. If $K \leq \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s - \alpha \hbar$ the system is unstable. When $\alpha(m-n)\hbar c / \bar{\rho}_s \leq K \leq \alpha m \hbar c / \bar{\rho}_s$ the destabilizing effect is given by the first eigenvalue, and

$$\lambda^1 \geq o(\xi^2 + \eta^2) \iff \frac{\xi^2 \tan^2 \theta}{\eta^4} \leq \frac{K}{\bar{\rho}_s} \frac{(K \bar{\rho}_s + \alpha \hbar \bar{\rho}_s - \alpha m \hbar c)^2}{\alpha m \hbar c - K \bar{\rho}_s} + o(\xi^2 + \eta^2).$$

Therefore the boundary between stable and unstable area in this case is close to the curve of equation

$$\eta = \left(\frac{\bar{\rho}_s}{K} \frac{\alpha m \hbar c - K \bar{\rho}_s}{(K \bar{\rho}_s + \alpha \hbar \bar{\rho}_s - \alpha m \hbar c)^2} \right)^{1/4} \sqrt{\tan \theta} \xi. \quad (4.4)$$

Consequently, when

$$\min(\alpha m \underline{h} c / \bar{\rho}_s - \alpha \underline{h}, \alpha(m-n) \underline{h} c / \bar{\rho}_s) \leq K \leq \alpha m \underline{h} c / \bar{\rho}_s,$$

the system is stable below the line of slope given by (4.3) and above the curve of Equation (4.4), and unstable between these curves. This situation is illustrated in Figure 4.4, for various values of K . The black curves are the boundary curves between stable and unstable areas calculated above, we can see that they fit the calculations. The unstable area are bounded, and this is confirmed by the stability analysis at high frequencies below. Moreover, as K increases, the unstable area decreases.

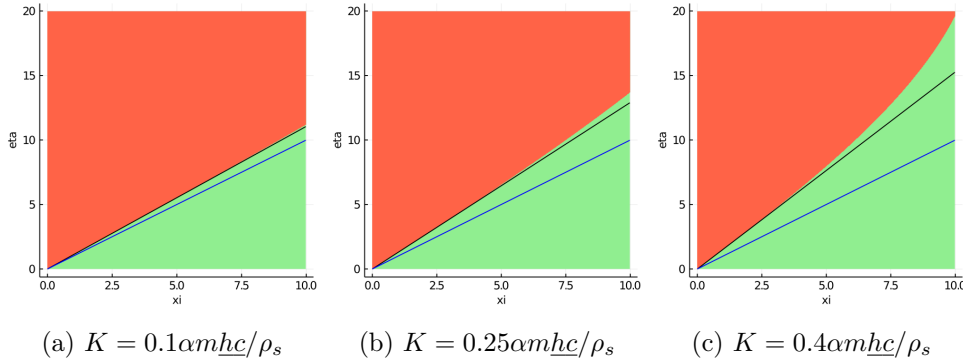


Figure 4.5 – Stability of the system at low frequencies in the plane (ξ, η) , when $K < \alpha m \underline{h} c / \bar{\rho}_s - \alpha \underline{h}$. The system is stable in the green area and unstable in the red area. The black line is the line of slope (4.3), the blue line is the line of slope $\sqrt{\frac{n-m}{m}}$ (the boundary line when $K = 0$).

If K is smaller than $\alpha m \underline{h} c / \bar{\rho}_s - \alpha \underline{h}$ or $\alpha(m-n) \underline{h} c / \bar{\rho}_s$ then one of the curves (or both) of equation (4.3) and (4.4) disappear, and the instability area increases with decreasing K . Figure 4.5 illustrates the case $\alpha(m-n) \underline{h} c / \bar{\rho}_s < K < \alpha m \underline{h} c / \bar{\rho}_s - \alpha \underline{h}$, for various values of K . The only boundary between the stable and unstable areas is the line of slope (4.3). The system is stable below this line and unstable above this line. As K decreases the unstable area increases, and comes closer to the line of slope $\sqrt{\frac{n-m}{m}}$ which is the boundary when $K = 0$, given in Theorem 4.1.

5 Direct numerical simulations

In this section, we present some numerical experiments of the erosion of a tilted plane. The parameters of these experiments come from physical data. The quantities L_x , L_y , V , \underline{h} , ρ_s , c_{sat} , e and θ are chosen according to the laboratory experiment [36], which erodes a block of salt. The choice of values for the exponents m and n has been investigated many times in the literature. The values are chosen between 0 and 3, with an additional relation $n = 2m$, as explained in [12] (here the constant

n corresponds to the constant $m + n$ in the literature). We choose $n = 2m$, with n sufficiently large in order to observe the formation of channels in the simulations. Indeed, we found that the effect of digging in depressions is reinforced when these exponents are larger. The choice of parameters is given in Table 2.2.

Length of the domain	L_x	40 cm
Width of the domain	L_y	10 cm
Characteristic water speed	$V = \mu \tan \theta$	1 m/s
Initial water height	h_0	0.5 mm
Initial sediment concentration	c_0	317 g/m ³
Exponent of friction over h	m	1, 6
Exponent of friction over v	n	3, 2
Density of the sediments	ρ_s	2.17×10^6 g/m ³
Concentration of saturation	c_{sat}	3.17×10^5 g/m ³
Erosion speed	e	0.5 mm/hour
Sedimentation speed	s	$e/2000$
Angle of the plane	θ	39°

Table 2.2 – Parameters of numerical simulations

Once the ratio between the erosion speed and the water speed has been fixed, we assume that the time variations of the water height and concentration are small, consequently we neglect these variations in the simulation. Indeed, in the simulation, the eroded height of the soil is of the order of a millimeter, thus the characteristic time $T = Z/e$ is of the order of an hour. The water crosses the domain in 0.4 seconds, thus there are four orders of magnitude between the characteristic time of the water flow and that of erosion. A direct numerical simulation of the full system, with time derivatives, would impose a severe CFL restriction: indeed, the fluid velocity is about $1m.s^{-1}$ whereas the erosion rate is around $1mm.h^{-1}$ for the block of salt. Since we are interested in the erosion process, the natural time scale is one hour and a typical time step would be a minute. However, the numerical time step δt is driven by a CFL: $\delta t \leq \delta x/v_{water} \approx 0.001s$ if one consider a typical mesh size $\delta x = 1mm$ (for a channel of length 400 mm). This increases the numerical cost of the scheme. Instead, we solve stationary problems at each time steps, where the time step is determined by the erosion time scale. A comparison between the two resolution methods is made in Appendix D, it shows that taking the stationary equation does not affect the results.

The stationary equations for the water height and concentration of sediments in water are discretised with a finite volume method. The scheme is given in Appendix D. The equation (2.5b) on c is a linear equation, and we discretise it with an explicit Euler scheme by considering it as an evolution equation with respect to the variable x , as the water speed in this direction does not vanish:

$$\partial_x c + \frac{v_y}{v_x} \partial_y c = \frac{\rho_s}{h v_x} (E - S), \quad (5.1)$$

where $v = (v_x, v_y)$. The equation (2.5a) on h is non linear, thus it is harder to discretise it. In order to avoid an implicit discretisation of this equation, we made the choice to linearise the equation. Denoting by h^n the solution of the equation at time t^n , we approximate:

$$\operatorname{div}(h\nabla h)(t_n) + \operatorname{div}(h\nabla z)(t_n) \approx \operatorname{div}(h^{n-1}\nabla h^n) + \operatorname{div}(h^n\nabla z^n).$$

As the solution at the previous time step is known, the right hand term is linear in h^n . Thus we can discretise it with a finite volume scheme in two dimensions. The derivation of the quasi-stationary model and the numerical scheme are given in Appendix D.

We have chosen periodic boundary conditions in the transverse direction, therefore in the stability analysis there are only countable frequencies in this direction. The frequencies are the $\eta_n = 2\pi n/L_y$ where L_y is the width of the domain. The boundary conditions at the top of the domain are Dirichlet condition for h , c and z . At the bottom of the domain, z is prescribed by a Dirichlet condition and we suppose that water flows freely. Thus we fix Neumann condition for h and c .

In the simulations, the initial surface is a flat tilted plane with a small random perturbation. This surface is represented in Figure 5.1, and it shows a flat view of the two dimensional plane. The color scale show the height difference between the actual soil, and the flat plane. Thus the yellow areas are the less dug parts.

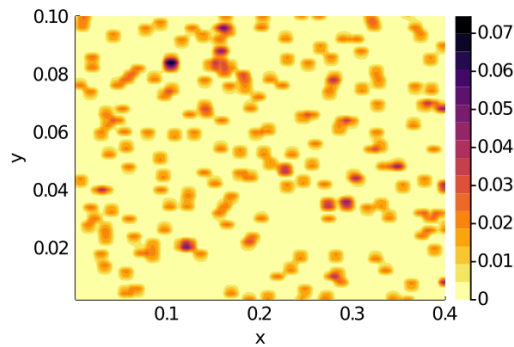


Figure 5.1 – Perturbation of the initial surface, on the domain $[0, L_x] \times [0, L_y]$. The represented quantity is the difference between the flat surface and the perturbed soil, in millimeters. This quantity is zero at yellow points, and increase when color is darker.

5.1 Simulations without source term for water

In this part, we present some results of simulations when $r = 0$, as in the spectral stability analysis. These simulations are compared to the theoretical results of stability. First, in Figure 5.2 we presents results of the simulation of the system,

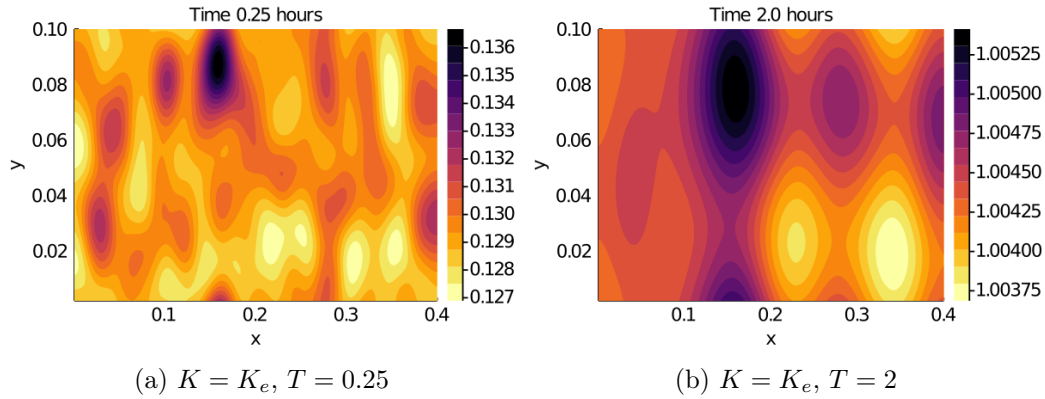


Figure 5.2 – Eroded height of the soil in mm . The darkest areas are the most eroded areas.

when

$$K = K_e = \frac{5 \times 10^{-4}}{3600} m^2 s^{-1}.$$

In this case, the system is spectrally stable at all frequencies $\{(\xi, \eta_n); \xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$. The pictures represent the eroded height $z(T) - z_0$ at time $T = 0.25$ hour and $T = 2$ hours. We observe that surface perturbations are quickly smoothed, and tends to disappear. After 15 minutes, we see in Figure 5.2a that the amplitude of perturbation has not decreased yet, but these perturbations are smoother than initially. After 2 hours, we see in Figure 5.2b that the amplitude of the perturbations has decreased.

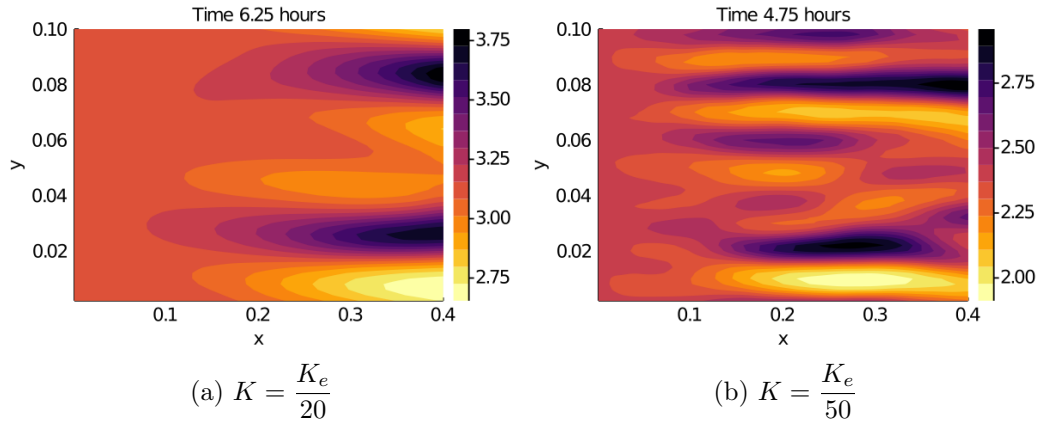


Figure 5.3 – Eroded height of the soil in mm with respect to the flat surface. The darkest areas are the most eroded areas. The widths of the channels are larger for larger values of K

In Figures 5.3 and 5.4, we represent respectively the eroded surface and the fluid height when the system is unstable at some frequencies. In Figure 5.3, we can observe the formation of channels in the soil, in the flow direction. The widths of

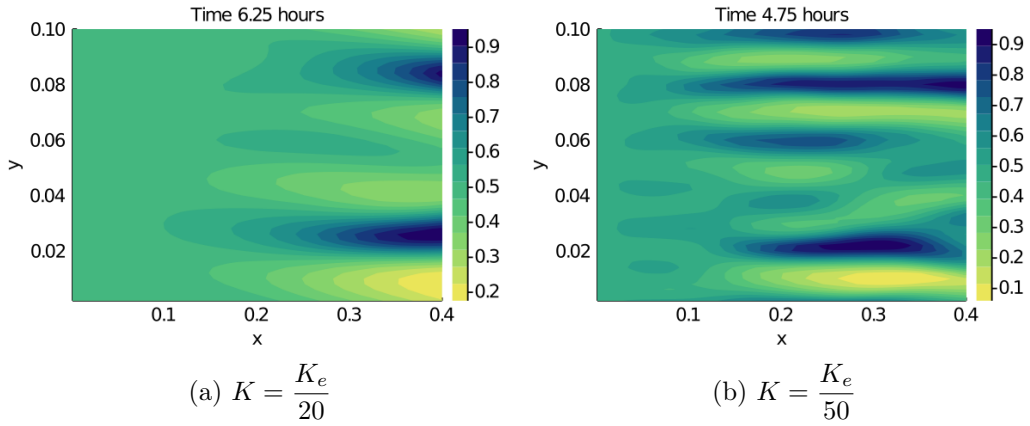


Figure 5.4 – Water height on the domain, in millimeters. The water depth is greater in darker areas.

these channels are larger when K is higher, and they take more time to appear. This can be explained by the stability analysis, as discussed below. Figure 5.4 have some similarities with Figure 5.3 since the water tends to fill the eroded channels ; the water depth is larger in the channels, and smaller between them.

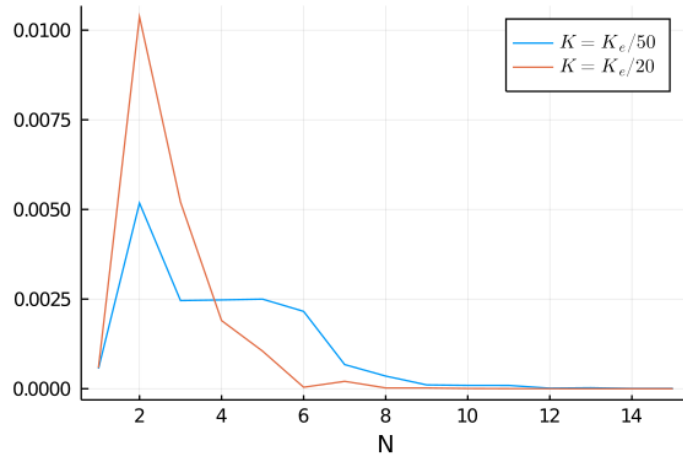


Figure 5.5 – Discrete frequency analysis of the result of the simulation, when $K = K_e/20$ (Figure 5.3a), and $K = K_e/50$ (Figure 5.3b). The quantity represented is the norm of the discrete Fourier transform of the signal in the transverse direction.

We quantify the number of channels generated by the simulations in order to validate the stability analysis. For that purpose, we compute the discrete Fourier transform of the eroded surface at the end of the simulation. As the main direction of perturbations is transverse to the slope, we have calculated this Fourier transform in this direction, at fixed x . In Figure 5.5, we represent the norm of the discrete

Fourier transform (DFT) of the result of the simulations 5.3a, 5.3b in the transverse direction, calculated at the bottom of the plane (for $x = L_x$). The frequencies are the $2\pi N/L_y$, for $N \in \{0, \dots, Ny/2\}$. When $K = K_e/20$, we can see in Figure 5.5 that the dominant frequency is reached when $N = 2$ at the bottom of the tilted plane. When $K = K_e/50$, we have contribution between $N = 2$ and $N = 5$ frequency

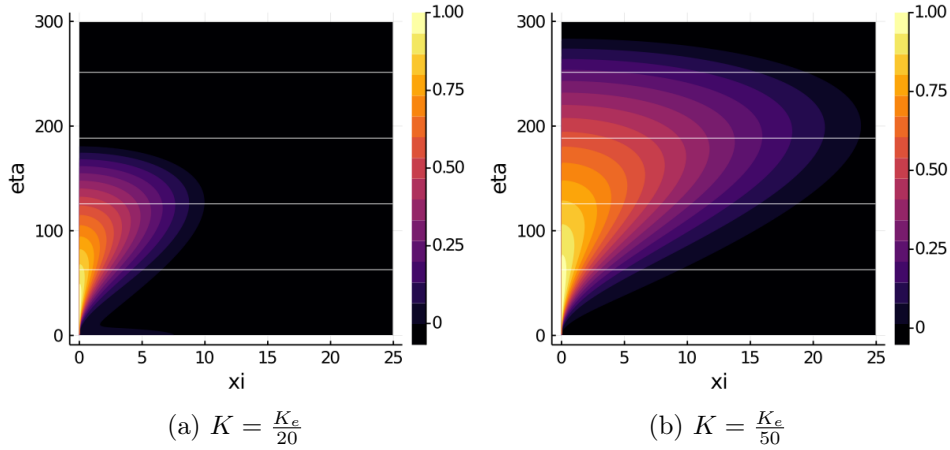


Figure 5.6 – Maximum of the real part of the three eigenvalues, normalised by the higher one, for $(\xi, \eta) \in [0, 20] \times [0, 300]$. The most unstable areas are in yellow, and in the black parts the three eigenvalues have a negative real part, thus the system is stable.

Then, in order to compare this observation with the stability analysis, we compute numerically the frequencies which create the most unstable modes. In Figure 5.6, we present numerical computations of the eigenvalues of the linearised system, depending on the frequencies. The largest real part of the three eigenvalues is represented, for each frequencies ξ and η in a bounded domain. This quantity controls the stability, the system is stable if and only if it is negative. Due to the periodic boundary conditions, the frequencies allowed in the transverse direction are the $\eta_n = 2\pi n/L_y$, where L_y is the width of the domain. In Figure 5.6, the white lines shows these frequencies. For both cases Figure 5.6a and 5.6b, the system is unstable and the maximum of instability is reached at $\xi = 0$, $\eta_1 = 2\pi/L_y$. Thus the system destabilizes in the transverse direction, and the most destabilizing frequency has period one. This is of the same order of magnitude as computed by the DFT of the simulations, where this frequency is $(\xi, \eta) = (0, 2 \times 2\pi/L_y)$. The difference between the period of 1 predicted by the stability analysis and the periods of 2 – 5 obtained in the simulations could come from the non linear effects of the model, that are not taken in account in the stability analysis.

5.2 Simulations including a source term for water

In this part, we present some results of simulations when the source term r is a positive function, to observe the effect of rain in the model. In the following

simulations, $K = K_e/20$, and the initial condition is the same as previously. First,

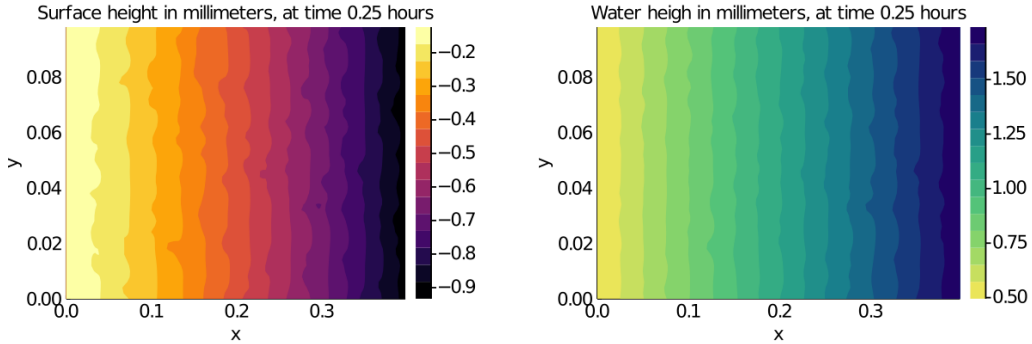


Figure 5.7 – Results of the simulation when $r = r_1$, after 2000 iterations.

we consider a constant in time, and uniform in space source term $r_1 = 0.005\text{mm/s}$. Figure 5.7 shows the surface height (left figure) and water height (right figure) computed by the simulation, at time 0.25 hours. We can observe that the water height is almost four times higher at the bottom of the domain ($x = L_x$), than at the top ($x = 0$). As the erosion rate is proportional to a power of the water height h , the surface erodes faster at the bottom of the domain. Then, Figure 5.8

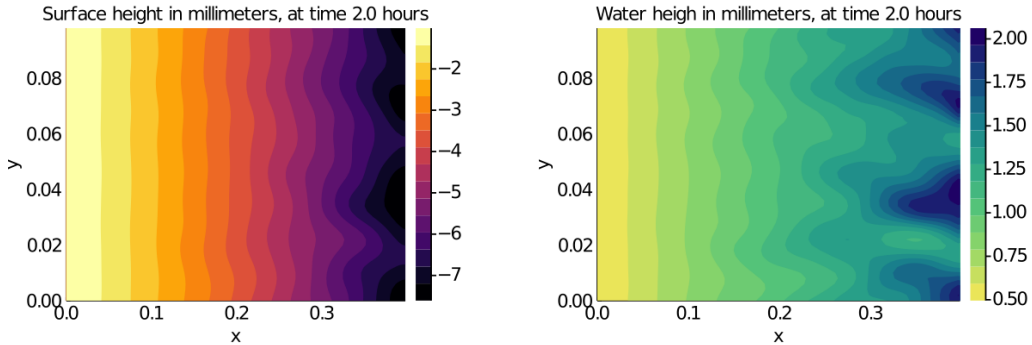


Figure 5.8 – Results of the simulation when $r = r_1$, after 16000 iterations.

shows the results of the same simulation, at time 2 hours. The initial perturbations have almost disappeared, and some transverse perturbations have developed at the bottom of the domain.

Next, we choose a bigger source term: $r_2 = 0.01\text{m/s}$, and results of this simulation are shown in Figure 5.9. We can see that there are bigger perturbations at the bottom of the domain than with the source term r_1 . These perturbations are also not totally transverse: they undulate a little bit in the longitudinal direction, which is a different behaviour from the case without source term.

Now we take a constant non uniform source term:

$$r_3(x, y) = 0.005 \exp\left(-60 * \frac{(y - Ly/2)^2}{Ly^2}\right),$$

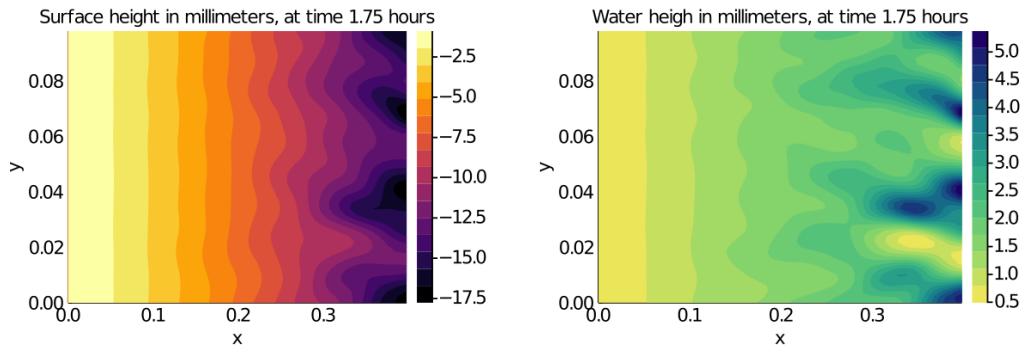


Figure 5.9 – Results of the simulation when $r = r_1$, after 14000 iterations.

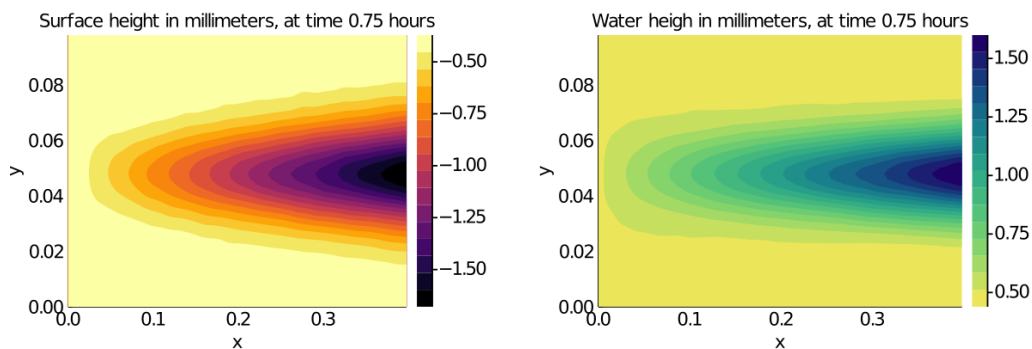


Figure 5.10 – Results of the simulation when $r = r_3$, after 6000 iterations.

that correspond to a positive longitudinal band of rain in the middle of the domain which decrease exponentially fast when approaching $y = 0$ or $y = 0.1$. At time 0.75 hours, the surface is highly eroded at the bottom of the band. Here, the evolution of the system is driven by the source term, the erosion landscape depends mainly on this term.

These simulations show that the source term may quantitatively influence the results, although qualitatively they look similar to the case with no source term.

6 Conclusion and perspectives

In this chapter, we have considered a model for the evolution of landscape subject to water erosion, in order to study the formation of patterns. This model takes into account the water flow, the dissolved sediments and the main effects of erosion and sedimentation, while remaining simple enough to be studied both theoretically and numerically. We proved that under realistic hypotheses, the system is well posed locally in time. Then a complete spectral analysis of a linearization of the system around stationary solutions has been performed. This analysis highlights the various behaviors of the system depending on the parameters and on the frequencies of the perturbations. A very important parameter of the system is the constant of creep

K , which controls the stability. The system can become stable if this constant is large enough, and is unstable if this constant is too small. Moreover, the instabilities in the system appears in the transverse direction, and this leads to the formation of channels parallel to the water flow.

This analysis is a preliminary step in the study of pattern formation on erodible surfaces. We have shown that an instability mechanism can explain the formation of parallel channels at the early stages of erosion. We plan to perform a more complete parametric study of the system, in order to understand the various behaviors of the model. This analysis should be completed by numerical simulation to illustrate these behaviors. There are several interesting direction of research. First, the analysis of this model could be extended to more general landscapes like mountains or valley. In these cases, the well-posedness of the system in short time can be still valid, as long as the water level and the water speed does not vanish. A similar stability analysis could be carried out if steady states exist. One could also consider more involved models. Indeed a lot of factors are not taken into account as weather, vegetation, animal and human activities. It is quite difficult to include these factors in the model, but a possible amelioration would be to include randomness in the equations. A random term could allow to model these factors which fluctuate over time. Moreover, a non constant source term, that would model the variations of rain in time would make the model more realistic. Another potential improvement of the model would be to consider more complex laws for the fluid velocity or even consider shallow water type models for the evolution of the layer of fluids.

A Proof of the stability theorem

This section is devoted to the proof of Theorem 4.1. First we state the Routh Hurwitz criteria for complex polynomial of degree 3, proven in [55]:

Proposition A.1. *Let $P(X) = X^3 + (a_1 + ib_1)X^2 + (a_2 + ib_2)X + a_3 + ib_3$ be a polynomial with complex coefficients. Then the roots of P have a positive imaginary part if and only if the three following conditions are satisfied :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_2 = - \left| \begin{array}{cc} 1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{array} \right| > 0 \\ \Delta_4 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{array} \right| > 0, \quad -\Delta_6 = - \left| \begin{array}{cccccc} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right| > 0 \end{array} \right.$$

This proposition is directly used to prove Theorem 4.1.

Proof of Theorem 4.1. The characteristic polynomial of A , denoted by P , is :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \begin{vmatrix} X + i\xi \tan \theta + \alpha \epsilon^2 \underline{h} & 0 & \frac{\alpha \epsilon^2 \underline{h}}{\tan \theta} \\ -\frac{am\underline{c}}{\underline{h}} + \frac{\alpha i \xi \underline{anc}}{\tan \theta} & X + a + i\xi \tan \theta & \frac{\alpha i \xi \underline{anc}}{\tan \theta} \\ \frac{am\underline{c}}{\bar{\rho}_s} - \alpha i \xi \frac{an\underline{hc}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} & -\frac{a\underline{h}}{\bar{\rho}_s} & X - \alpha i \xi \frac{an\underline{hc}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} + \epsilon^2 K \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X + i\xi \tan \theta + \alpha \epsilon^2 \underline{h} & 0 & \frac{\alpha \epsilon^2 \underline{h}}{\tan \theta} \\ -\frac{am\underline{c}}{\underline{h}} + \frac{\alpha i \xi \underline{anc}}{\tan \theta} & X + a + i\xi \tan \theta & \frac{\alpha i \xi \underline{anc}}{\tan \theta} \\ 0 & \frac{\underline{h}X + i\xi \underline{h} \tan \theta}{\bar{\rho}_s} & X + \epsilon^2 K \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

where we have denoted $\epsilon^2 = \xi^2 + \eta^2$. In order to simplify the computations, we introduce the variables

$$Y := X + i\xi \tan \theta, \quad \bar{\xi} = \xi \tan \theta, \quad \bar{\epsilon}^2 = \alpha \underline{h} \epsilon^2, \quad \bar{K} \alpha \underline{h} = K, \quad \bar{\rho}_s \bar{h} = \underline{h}.$$

We also define the constants $N = \alpha \underline{anc} / \tan^2 \theta$, $M = am\underline{c} / \underline{h}$. Consequently the polynomial writes as:

$$\begin{aligned}
P(Y) &= \begin{vmatrix} Y + \bar{\epsilon}^2 & 0 & \bar{\epsilon}^2 \\ -M + i\xi N & Y + a & i\bar{\xi} N \\ 0 & \bar{h}Y & Y + \bar{\epsilon}^2 K - i\bar{\xi} \end{vmatrix} \\
&= -\bar{h}Y (i\bar{\xi}NY + \bar{\epsilon}^2 M) + (Y + a)(Y + \bar{\epsilon}^2)(Y - i\bar{\xi} + \bar{\epsilon}^2 \bar{K}) \\
&= Y^3 + \left[a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K}) - i\bar{\xi}(1 + N\bar{h}) \right] Y^2 + \left[\bar{\epsilon}^2(a(1 + \bar{K}) - \bar{h}M + \bar{K} \bar{\epsilon}^2) \right. \\
&\quad \left. - i\bar{\xi}(a + \bar{\epsilon}^2) \right] Y + a \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 \bar{K} - i\bar{\xi}).
\end{aligned} \tag{A.1}$$

The system is stable if and only if the roots of $X \mapsto P(X)$ have a negative real part. As Y have the same real part as X , this is equivalent to the fact that the roots of $Y \mapsto P(Y)$ have a negative real part. Denoting $i\lambda := Y$, the system is stable if and only if the roots of $\lambda \mapsto P(i\lambda)$ have a positive imaginary part. Thus we will apply the Routh Hurwitz criteria to the polynomial $\lambda \mapsto Q(\lambda) := iP(i\lambda)$ where $i\lambda := Y$:

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) &= \lambda^3 - \left[\bar{\xi}(1 + N\bar{h}) + i(a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K})) \right] \lambda^2 - \left[\bar{\epsilon}^2(a(1 + \bar{K}) - \bar{h}M + \bar{K} \bar{\epsilon}^2) \right. \\
&\quad \left. - i\bar{\xi}(a + \bar{\epsilon}^2) \right] \lambda + a \bar{\epsilon}^2(\bar{\xi} + i\bar{\epsilon}^2 \bar{K}).
\end{aligned}$$

We denote:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = 1 + N\bar{h}, \\ \bar{b}_1 = a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K}), \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{a}_2 = a(1 + \bar{K}) - \bar{h}M + \bar{\epsilon}^2 \bar{K}, \\ \bar{b}_2 = a + \bar{\epsilon}^2. \end{cases}$$

Thus $Q(\lambda) = \lambda^3 - (\bar{\xi} \bar{a}_1 + i\bar{b}_1) \lambda^2 + (-\bar{\epsilon}^2 \bar{a}_2 + i\bar{\xi} \bar{b}_2) \lambda + a \bar{\epsilon}^2(\bar{\xi} + i\bar{\epsilon}^2 \bar{K})$.

The first condition : The determinant $-\Delta_2$ writes as :

$$-\Delta_2 = - \begin{vmatrix} 1 & -\bar{\xi} \bar{a}_1 \\ 0 & -\bar{b}_1 \end{vmatrix} = \bar{b}_1 = a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K}).$$

Consequently, as $a > 0$ and $K \geq 0$, the condition $-\Delta_2 > 0$ is always satisfied.

The second condition : The determinant Δ_4 is given by :

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} -\bar{b}_1 & \bar{\xi} \bar{b}_2 & \bar{\epsilon}^4 a \bar{K} \\ 1 & -\bar{\xi} \bar{a}_1 & -\bar{\epsilon}^2 \bar{a}_2 \\ 0 & -\bar{b}_1 & \bar{\xi} \bar{b}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\bar{b}_1 & \bar{\xi}(\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) & \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 a \bar{K} - \bar{b}_1 \bar{a}_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{b}_1 & \bar{\xi} \bar{b}_2 \end{vmatrix} \\ &= \bar{\epsilon}^2 \left(\frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\epsilon}^2} \bar{b}_2 (\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) + \bar{b}_1 (\bar{a}_2 \bar{b}_1 - \bar{\epsilon}^2 a \bar{K}) \right). \end{aligned}$$

Let $t = \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\epsilon}^2} \in [0, \frac{\mu \tan^2 \theta}{e\hbar}]$, then one finds that $\Delta_4 > 0 \forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^2)^*$ if and only if

$$t \bar{b}_2 (\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) + \bar{b}_1 (\bar{a}_2 \bar{b}_1 - \bar{\epsilon}^2 a \bar{K}) > 0 \forall t \in [0, \frac{\mu \tan^2 \theta}{e\hbar}], \forall \bar{\epsilon}^2 > 0.$$

The terms \bar{b}_1 and \bar{b}_2 are positive, and :

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2 &= a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K}) + N\hbar(a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K})) - a - \bar{\epsilon}^2 \\ &= \bar{\epsilon}^2 \bar{K} + N\hbar(a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K})) > 0. \end{aligned}$$

Consequently, one has $\Delta_4 > 0, \forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^2)^*$ if and only if

$$\bar{a}_2 \bar{b}_1 - \bar{\epsilon}^2 a \bar{K} \geq 0 \forall \bar{\epsilon}^2 > 0.$$

We compute:

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 \bar{b}_1 - \bar{\epsilon}^2 a \bar{K} &= (a(1 + \bar{K}) - \hbar M + \bar{\epsilon}^2 \bar{K}) (a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K})) - \bar{\epsilon}^2 a \bar{K} \\ &= a(a(1 + \bar{K}) - \hbar M) + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K})(a(1 + \bar{K}) - \hbar M + \bar{\epsilon}^2 \bar{K}) \end{aligned}$$

As a consequence, one has $\Delta_4 > 0 \forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^2)^*$ if and only if $a(1 + \bar{K}) - \hbar M \geq 0$.

This condition is equivalent to:

$$\frac{\bar{\rho}_s}{c} + \frac{K \bar{\rho}_s}{\alpha \hbar c} - m \geq 0.$$

The third condition : The determinant Δ_6 is given by:

$$\begin{aligned} \Delta_6 &= -\bar{b}_1 \begin{vmatrix} \bar{\xi}(\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) & \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 a \bar{K} - \bar{a}_2 \bar{b}_1) & \bar{\xi} \bar{\epsilon}^2 a \bar{b}_1 & 0 \\ -\bar{b}_1 & \bar{\xi} \bar{b}_2 & \bar{\epsilon}^4 a \bar{K} & 0 \\ 1 & -\bar{\xi} \bar{a}_1 & -\bar{\epsilon}^2 \bar{a}_2 & \bar{\xi} \bar{\epsilon}^2 a \\ 0 & -\bar{b}_1 & \bar{\xi} \bar{b}_2 & \bar{\epsilon}^4 a \bar{K} \end{vmatrix} \\ &= -\bar{b}_1^2 \begin{vmatrix} \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 a \bar{K} - \bar{a}_2 \bar{b}_1) + \bar{\xi}^2 \bar{a}_1(\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) & \bar{\xi}(\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) & -\bar{b}_1 \\ \bar{\xi} \bar{\epsilon}^2 a \bar{b}_1 + \bar{\xi} \bar{\epsilon}^2 \bar{a}_2(\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) & \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 a \bar{K} - \bar{a}_2 \bar{b}_1) & \bar{\xi} \bar{b}_2 \\ -\bar{\xi}^2 \bar{\epsilon}^2 a(\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) & \bar{\xi} \bar{\epsilon}^2 a \bar{b}_1 & \bar{\epsilon}^4 a \bar{K} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

We can factorize out the term $\bar{\epsilon}^2$ in the first column. Then we develop this expression with respect to the third row. One has:

$$\Delta_6 = -\bar{\epsilon}^6 \bar{b}_1^2 (T_0 + tT_1 + t^2T_2)$$

with

$$\begin{aligned} T_0 &= \bar{\epsilon}^2 a\bar{K} (\bar{\epsilon}^2 a\bar{K} - \bar{a}_2 \bar{b}_1)^2 > 0, \\ T_1 &= \bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \left[\bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \bar{a}_1 (\bar{b}_2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1) + (\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) (a\bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2) - a\bar{b}_1 \bar{b}_2 \right. \\ &\quad \left. + a\bar{b}_1 (\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) \right] + a\bar{a}_2 \bar{b}_1^2 \bar{b}_2 - a^2 \bar{b}_1^3 \\ &= \bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \left[(\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) (2a\bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2 - \bar{\epsilon}^2 a\bar{a}_1 \bar{K}) - a\bar{b}_1 \bar{b}_2 \right] + a\bar{b}_1^2 (\bar{a}_2 \bar{b}_2 - a\bar{b}_1), \\ T_2 &= a\bar{b}_2^2 (\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) > 0. \end{aligned}$$

We thus have to determine the sign of T_1 . First, one finds that

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \bar{b}_2 - a\bar{b}_1 &= (a(\mathcal{X} + \bar{K}) - \bar{h}M + \bar{\epsilon}^2 \bar{K}) (a + \bar{\epsilon}^2) - a(\mathcal{A} + \bar{\epsilon}^2 (\mathcal{X} + \bar{K})) \\ &= (a\bar{K} - \bar{h}M + \bar{\epsilon}^2 \bar{K}) (a + \bar{\epsilon}^2) - \bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \\ &= a(a\bar{K} - \bar{h}M) + \bar{\epsilon}^2 (a\bar{K} - \bar{h}M) + \bar{\epsilon}^4 \bar{K}. \end{aligned}$$

The constant term in T_1 is $a^4 (a\bar{K} - \bar{h}M)$. When $\bar{\epsilon}^2 = o(t)$, that is $\epsilon^4 = o(\xi^2)$, the dominant term in $\bar{\Delta}_6$ is the constant term of T_1 times t , that is $a^4 (a\bar{K} - \bar{h}M) t$. Thus a necessary condition for the positivity of $\bar{\Delta}_6$ is $a\bar{K} \geq \bar{h}M$. We can write $-\frac{\bar{\Delta}_6}{\bar{b}_1^2 \bar{\epsilon}^6} := -\bar{\Delta}_6$ as a polynomial of degree two in a_1 , with a negative coefficient in front of a_1^2 :

$$\begin{aligned} -\bar{\Delta}_6 &= -\epsilon^4 a^2 K^2 \bar{b}_1 t \bar{a}_1^2 + \left[\bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \bar{b}_1 t (2\bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2) + \bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \bar{b}_2 \right] + a\bar{b}_1 \bar{b}_2^2 t^2 \bar{a}_1 \\ &\quad + a\bar{b}_1^2 (\bar{a}_2 \bar{b}_2 - a\bar{b}_1) t - \bar{\epsilon}^2 a\bar{K} \left[\bar{b}_2 (2a\bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2) + a\bar{b}_1 \bar{b}_2 \right] t - a\bar{b}_2^3 t^2 \\ &\quad + \bar{\epsilon}^2 aK (\bar{a}_2 \bar{b}_1 - \bar{\epsilon}^2 aK)^2. \end{aligned}$$

The term \bar{a}_1 writes as $\bar{a}_1 = 1 + N\bar{h} \geq 1$. When $N = 0$ and $a\bar{K} \geq \bar{h}M$, we can verify that $\forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^2)^*$, $-\bar{\Delta}_6 > 0$. Consequently when $a\bar{K} \geq \bar{h}M$ the polynomial $-\bar{\Delta}_6(\bar{a}_1)$ has two roots, the first one $x_1 < 1$ and the second one $x_2 > 1$. Now we suppose that $a\bar{K} \geq \bar{h}M$, and we define

$$\delta = \inf\{x_2(\xi, \eta); (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^2)^*\} \geq 1.$$

According to the asymptotic calculus of stability, when $a\bar{K} \geq \bar{h}M$ the system is stable near 0 and $+\infty$. Consequently δ is an infimum of a continuous function on a compact set of \mathbb{R}^2 , thus it admits a minimum. To conclude, $\Delta_6 > 0 \forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^2)^*$ if and only if $\bar{a}_1 < \delta$ and $a\bar{K} \geq \bar{h}M$. That is, denoting $\gamma = \tan^2 \theta(\delta - 1)/(\alpha n \hbar c)$, this condition reduces to

$$n < \gamma \quad \text{and} \quad \alpha m \hbar c \leq \bar{\rho}_s K.$$

The third condition when $K = 0$: In this case, the computations on Δ_6 are fully explicit. The third determinant reads:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta_6}{\bar{b}_1^2 \bar{\epsilon}^6} &= ta \bar{b}_1^2 (\bar{a}_2 \bar{b}_2 - a \bar{b}_1) + t^2 a \bar{b}_2^2 (\bar{a}_1 \bar{b}_1 - \bar{b}_2) \\ &= ta \bar{h} (a + \bar{\epsilon}^2)^3 (-M + tN). \end{aligned}$$

Thus the stability is directly related to the sign of $tN - M$. As $t = \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\epsilon}^2} = \frac{\tan^2 \theta}{\alpha \underline{h}} \frac{\xi^2}{\epsilon^2}$, and $M = \frac{amc}{\underline{h}}$, $N = \alpha \frac{anc}{\tan^2 \theta}$, then this condition reads

$$m < \frac{\xi^2}{\epsilon^2} n.$$

This concludes the proof of Theorem 4.1. \square

B Proof of the stability results at low frequencies

In this section we prove Proposition 4.1.

B.1 The first case

In this part, we consider the case $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ with $\xi = O(\eta^2)$. We write the characteristic polynomial of the matrix $A(\xi, \eta)$, and use the fact that $\lambda^i(0, 0) = 0$ ($i = 1, 2$) to calculate the two roots of this polynomial bifurcating from zero. As in the proof of Theorem 4.3, we define the variables $Y := X + i\xi \tan \theta$, $\bar{\xi} = \xi \tan \theta$, $\bar{\epsilon}^2 = \alpha \underline{h} \epsilon^2$, $\bar{K} \alpha \underline{h} = K$, and $\bar{\rho}_s \bar{h} = \underline{h}$. We also define the constants $N = \alpha anc / \tan^2 \theta$, $M = amc / \underline{h}$. We recall that the characteristic polynomial of A , denoted by P is given by Equation (A.1) :

$$\begin{aligned} P(Y) &= Y^3 + \left[a + \bar{\epsilon}^2(1 + \bar{K}) - i\bar{\xi}(1 + N\bar{h}) \right] Y^2 + \left[\bar{\epsilon}^2(a(1 + \bar{K}) - \bar{h}M + \bar{K} \bar{\epsilon}^2) \right. \\ &\quad \left. - i\bar{\xi}(a + \bar{\epsilon}^2) \right] Y + a \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 \bar{K} - i\bar{\xi}). \end{aligned}$$

The zero order term of the eigenvalues λ^1 and λ^2 is zero, thus $\lambda^i = O(\eta^2)$ for $i = 1, 2$. Consequently λ^1 and λ^2 are solution of the approximate equation:

$$Y^2 + \left[-i\bar{\xi} + \bar{\eta}^2(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a) \right] Y + \bar{\eta}^2(\bar{\eta}^2 \bar{K} - i\bar{\xi}) = O(\eta^6),$$

where $\bar{\eta}^2 = \alpha \underline{h} \eta^2$. Therefore, one has

$$\begin{cases} \lambda^1(\xi, \eta) = -\frac{i\bar{\xi} + \bar{\eta}^2(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} + O(\eta^3), \\ \lambda^2(\xi, \eta) = -\frac{i\bar{\xi} + \bar{\eta}^2(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} + O(\eta^3), \\ \Delta = -\bar{\xi}^2 + 2i\bar{\xi}\bar{\eta}^2(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a) + \bar{\eta}^4((1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 - 4\bar{K}) + O(\eta^6). \end{cases}$$

When ξ is of the order of η^2 , we can write $\bar{\xi} = q\bar{\eta}^2$ with $q \neq 0$. Thus,

$$\Delta = (-q^2 + 2iq(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a) + ((1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 - 4\bar{K}))\bar{\eta}^4 + O(\eta^6).$$

Therefore we cannot compute explicitly the expression of its square roots, neither directly determine the sign of the real part of the eigenvalues. Consequently, we compute their sign. First, the real part of the square root of the discriminant Δ is given by:

$$Re(\sqrt{\Delta}) = \sqrt{\frac{Re(\Delta) + |\Delta|}{2}},$$

$$\text{where: } |\Delta|^2 = \bar{\xi}^4 + 2\bar{\xi}^2\bar{\eta}^4 (2(1 - \bar{K} + \bar{h}M/a)^2 - (1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 + 4\bar{K}) \\ + \bar{\eta}^8 ((1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 - 4\bar{K})^2 + O(\eta^{12}).$$

We study the sign of $Re(\lambda^1)$: since $Re(\lambda^1) \geq \Re(\lambda^2)$, this will determine the spectral stability of the system. One has:

$$Re(\lambda^1) = -\frac{\bar{\eta}^2(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Re(\Delta) + |\Delta|}{2}} + O(\eta^3) > 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{Re(\Delta) + |\Delta|}{2}} > \bar{\eta}^2(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a) + O(\eta^3).$$

We then study two cases, depending on the sign of $1 + \bar{K} - \bar{h}M/a$:

- If $0 \leq \bar{K} \leq \bar{h}M/a - 1$, that is $1 + \bar{K} - \bar{h}M/a \leq 0$, then $Re(\lambda^1) + O(\eta^3) > 0$. This situation can occur only if $\bar{h}M \geq a$.
- If $\bar{K} > \bar{h}M/a - 1$, then

$$Re(\lambda^1) > 0 \Leftrightarrow Re(\Delta) + |\Delta| > 2\bar{\eta}^4(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 + O(\eta^6) \\ \Leftrightarrow -\bar{\xi}^2 - 4\bar{\eta}^4\bar{K} + |\Delta| > \bar{\eta}^4(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 + O(\eta^6) \\ \Leftrightarrow |\Delta|^2 > (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^4((1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 + 4\bar{K}))^2 + O(\eta^{12}) \\ \Leftrightarrow \bar{\xi}^2(\bar{h}M/a - \bar{K}) > \bar{\eta}^4\bar{K}(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2 + O(\eta^8).$$

Consequently, if $\bar{K} \geq \bar{h}M/a$ then $Re(\lambda^1) + O(\eta^3) < 0$, and if $\bar{h}M/a - 1 \leq \bar{K} < \bar{h}M/a$ then $Re(\lambda^1) + O(\eta^3) > 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\eta}^4} + O(\eta^4) > f(\bar{K})$, with

$$f(\bar{K}) = \bar{K} \frac{(1 + \bar{K} - \bar{h}M/a)^2}{\bar{h}M/a - \bar{K}}. \quad (\text{B.1})$$

B.2 The second case

In this section, we consider values of ξ and η which go to zeros, with $\eta^2 = o(\xi)$. The matrix A has no zero order terms in ξ and η , and no first order terms in η so we can write the Taylor expansion of the eigenvalues as $\lambda(\xi, \eta) = \lambda_0 + \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi^2, \eta^2) + o(\xi^2, \eta^2)$. The method of the previous section gives only the first order terms of the expansion, but in this case they are imaginary. Consequently, we need to calculate

the second order terms and the previous method is much more complicated in this case, so we proceed differently. The equation satisfied by λ and V is

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad A(\xi, \eta)V(\xi, \eta) = \lambda(\xi, \eta)V(\xi, \eta).$$

We compute the terms of the Taylor expansion of λ and V step by step using this equation and identifying the terms of same order. The Taylor expansion of V is written as $V(\xi, \eta) = V_0 + V_1(\xi) + V_2(\xi, \eta) + o(\xi^2 + \eta^2)$ (up to a multiplicative constant). For the following calculations we will solve equations of the form $A_0 X = Y$ where $Y \in \text{Im}(A_0)$. The matrix A_0 has a one dimensional image, generated by the vector X^3 (which is defined below). Consequently, the solutions X are of the form $\alpha X^3 + K$, where $K \in \ker A_0$. We also need to compute the eigenvalues and the eigenvectors of A_0 . The eigenvalues are 0, 0, $-a$, and the associated eigenvectors are

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X^2 = \begin{bmatrix} \underline{h} \\ m\underline{c} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\rho}_s \\ -\underline{h} \end{bmatrix}.$$

Moreover, the two left eigenvectors of A_0 associated to the eigenvalue 0 are used to cancel some terms in the calculus. These vectors are:

$$X_1^* = [1, 0, 0], \quad X_2^* = [0, \underline{h}, \bar{\rho}_s].$$

Order 0 : When $\xi = \eta = 0$ the system $AV = \lambda V$ reduces to $A_0 V_0 = \lambda_0 V_0$, so λ and V are respectively the eigenvalues and the eigenvectors of A_0 . Consequently $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 0$ and $V_0^1, V_0^2 \in \text{vect}(X^1, X^2)$.

Order 1 : We identify the first order terms of the equation $AV = \lambda V$:

$$A_0 V_1 + i\xi A_1 V_0 = \lambda_1 V_0, \tag{B.2}$$

because $\lambda_0 = 0$. In order to compute λ_1^1 and λ_1^2 we multiply the system (B.2) by X_1^* and X_2^* . We obtain the following system, denoting $V_0 = uX^1 + vX^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 + i\xi \tan \theta \\ \lambda_1 & m\underline{c}(\lambda_1 + \alpha \frac{i\xi}{\tan \theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v\underline{h} \end{pmatrix} = 0.$$

This system admits two solutions up to a multiplying factor :

$$\lambda_1^1 = 0, \quad V_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \lambda_1^2 = -i\xi \tan \theta, \quad V_0^2 = \begin{bmatrix} \underline{h} \\ m\underline{c} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Then, using Equation (B.2) we compute V_1^2 and V_1^1 :

$$V_1^1 = -i\xi \frac{\alpha n\underline{c}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} X^3 + K^1, \quad V_1^2 = -i\xi \frac{\alpha n\underline{h}\underline{c}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} X^3 + K^2,$$

with $K^1, K^2 \in \ker A_0 = \text{vect}(X^1, X^2)$. As X^1 appears in the leading order of V^1 , we can suppose (up to renormalisation of V^1) that $K^1 = k_1 X^2$ with $k_1 \in \mathbb{R}$. Consequently,

$$V_1^1 = -i\xi \frac{\alpha n \underline{c}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} X^3 + k_1 X^2.$$

Similarly, as $V^2 = X^2 + V_2^1 + o(\xi, \eta)$ we can write

$$V_1^2 = -i\xi \frac{\alpha n \underline{h} \underline{c}}{\bar{\rho}_s \tan \theta} X^3 + k_2 X^1, \quad \text{with } k_2 \in \mathbb{R}.$$

Order 2 : The second order terms of the system $AV^i = \lambda^i V^i$ for $i \in \{1, 2\}$ are:

$$A_0 V_2 + i\xi A_1 V_1 - (\xi^2 + \eta^2) A_2 V_0 = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_0. \quad (\text{B.3})$$

For $i = 1$, we multiply System (B.3) by the two left eigenvectors of A_0 associated to the eigenvalue 0 and we obtain the system :

$$\begin{pmatrix} i\xi \tan \theta \underline{h} & 0 \\ i\xi \tan \theta m \underline{h} \underline{c} & \bar{\rho}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \lambda_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\xi^2 + \eta^2) \alpha \underline{h} \\ -\xi^2 \alpha n \underline{h} \underline{c} - (\xi^2 + \eta^2) K \bar{\rho}_s \end{pmatrix}.$$

Consequently $\lambda_1^2 = -(K + \alpha \frac{n \underline{h} \underline{c}}{\bar{\rho}_s} - \alpha \frac{m \underline{h} \underline{c}}{\bar{\rho}_s}) \xi^2 - (K - \alpha \frac{m \underline{h} \underline{c}}{\bar{\rho}_s}) \eta^2$.

For the second eigenvalue we multiply System (B.3) by X_1^* and X_2^* , and we obtain :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \underline{h} \\ -i\xi \bar{\rho}_s & m \underline{h} \underline{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 \\ \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\xi^2 + \eta^2) \underline{h}^2 \\ -\xi^2 \alpha n \underline{h} \underline{c} \end{pmatrix}.$$

One finds $\lambda_2^2 = -\alpha \underline{h} (\xi^2 + \eta^2)$.

Conclusion : Finally, the three eigenvalues of $A(\xi, \eta)$ when $\xi, \eta \rightarrow 0$ and $\xi/\eta^2 \rightarrow +\infty$ are :

$$\begin{cases} \lambda^1 = - \left(K + \frac{c_{sat}}{\rho_s} \alpha n \underline{h} \underline{c} - \frac{c_{sat}}{\rho_s} \alpha m \underline{h} \underline{c} \right) \xi^2 - \left(K - \frac{c_{sat}}{\rho_s} \alpha m \underline{h} \underline{c} \right) \eta^2 + o(\xi^2 + \eta^2), \\ \lambda^2 = -i\xi \tan \theta - \alpha \underline{h} (\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2), \\ \lambda^3 = -\frac{s \rho_s}{e \underline{h} c_{sat}} + o(1). \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Consequently, at low frequencies when $\eta^2 = o(\xi)$, the eigenvalues λ^2 and λ^3 have a negative real part. Thus the instability is given by λ_1 , and depends on the parameters. When $K \bar{\rho}_s > m \underline{h} \underline{c}$ then λ^1 has a negative real part so System (4.2) is stable around the stationary solution $(\underline{h}, \underline{c}, \underline{z})$. When $\underline{h} \underline{c} (m - n) < K \bar{\rho}_s < m \underline{h} \underline{c}$ then the system is stable in the longitudinal direction but not in the transverse direction. In the last case, when $K \bar{\rho}_s < \underline{h} \underline{c} (m - n)$ then the system is unstable. \square

C Proof of the stability results at high frequencies

In this Appendix, we prove the stability result at high frequencies, Proposition 4.2. We use the same method as in Subsection B.2.

Proof of Proposition 4.2. The system $AV = \lambda V$ is written as

$$\left(A_2 - \frac{i\xi A_1 + A_0}{\xi^2 + \eta^2} \right) V(\xi, \eta) = -\frac{\lambda(\xi, \eta)}{\xi^2 + \eta^2} V(\xi, \eta). \quad (\text{C.1})$$

We can suppose, up to renormalisation that $V(\xi, \eta) = O_{+\infty}(1)$. We calculate a Taylor expansion of

$$\frac{\lambda(\xi, \eta)}{\xi^2 + \eta^2} = \Lambda_0 + \Lambda_1(\xi, \eta) + \Lambda_2(\xi, \eta) + o(1),$$

and of

$$V(\xi, \eta) = V_0 + V_1(\xi, \eta) + V_2(\xi, \eta) + o\left(\frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Order 0 : When $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$, System (C.1) becomes $A_2 V_0 = -\Lambda_0 V_0$. Its solutions are the eigenvalues and eigenvectors of $-A_2$, so $\Lambda_0^1 = -K$, $\Lambda_0^2 = -\alpha \underline{h}$ and $\Lambda_0^3 = 0$. The associated eigenvectors are

$$X^1 = \begin{bmatrix} \alpha \underline{h} \\ 0 \\ K - \alpha \underline{h} \end{bmatrix}, \quad X^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

When $K > 0$ there is one eigenvalue bifurcating from zero, Λ^3 , and two other eigenvalues have negative real parts. When $K = 0$ the two eigenvalues Λ^1 and Λ^3 are bifurcating from zero. Consequently we will study these two cases.

C.1 The case $K > 0$

In this part, we continue the asymptotic expansion of the eigenvalue Λ^3 . The zero order terms of the eigenvectors are $V_0^1 = X^1$, $V_0^2 = X^2$ and $V_0^3 = X^3$.

We calculate the first order term of Λ_3 . The first order terms of System (C.1) when $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$ depends on the asymptotic behaviour of $i\xi$. If $\xi \rightarrow +\infty$ then the first order terms of the system are:

$$A_2 V_1^3 - \frac{i\xi A_1}{\xi^2 + \eta^2} V_0^3 = -\Lambda_1^3 V_0^3. \quad (\text{C.2})$$

And if ξ is bounded, $i\xi A_1$ and A_0 are of the same order, thus the first order terms are:

$$A_2 V_1^3 - \frac{i\xi A_1 + A_0}{\xi^2 + \eta^2} V_0^3 = -\Lambda_1^3 V_0^3. \quad (\text{C.3})$$

To compute Λ_1^3 we multiply the equations by the left eigenvector of A_2 associated to the eigenvalue 0, $X^* = X^3$. Then, after some computations:

$$\begin{aligned} \text{If } \xi \rightarrow +\infty, \quad \Lambda_1^3 &= -\frac{i\xi \tan \theta}{\xi^2 + \eta^2}, & V_1^3 &= \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \text{If } \xi \text{ bounded, } \Lambda_1^3 &= -\frac{i\xi \tan \theta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{s\rho_s}{e\hbar c_{sat}} \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

When ξ is bounded we already computed the second order term of Λ^3 . When $\xi \rightarrow +\infty$, the second order terms of the system are:

$$A_2 V_2^3 - \frac{i\xi A_1}{\xi^2 + \eta^2} V_1^3 - \frac{A_0}{\xi^2 + \eta^2} V_0^3 = -\Lambda_1^3 V_1^3 - \Lambda_2^3 V_0^3.$$

Then, one finds:

$$\Lambda_2^3 = -\frac{s\rho_s}{e\hbar c_{sat}} \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Finally, the asymptotic expansion of the eigenvalues of $A(\xi, \eta)$ when $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$ and $K > 0$ is:

$$\begin{cases} \lambda_1(\xi, \eta) = -K(\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2), \\ \lambda_2(\xi, \eta) = -\alpha\hbar(\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2), \\ \lambda_3(\xi, \eta) = -i\xi \tan \theta - \frac{s\bar{\rho}_s}{e\hbar} + o(1). \end{cases}$$

C.2 The case $K = 0$

When $K = 0$, the zero order terms of the eigenvalues Λ_1 and Λ_3 vanish. Thus, in order to prove the second point of Proposition 4.2, we need to compute the next order terms of these two eigenvalues. The eigenvectors associated to the two zero eigenvalues of $-A_2$ are

$$X^1 = \begin{bmatrix} \alpha\hbar \\ 0 \\ -\alpha\hbar \end{bmatrix}, \quad X^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Thus, there exist constants u_1, v_1, u_3, v_3 such that $V_0^1 = u_1 X^1 + v_1 X^3$ and $V_0^3 = u_3 X^1 + v_3 X^3$. The left eigenvectors associated to the zeros eigenvalues of $-C$ are:

$$X_1^* = [0 \ 0 \ 1], \quad X_3^* = [0 \ 1 \ 0].$$

If $\xi \rightarrow +\infty$ then the first order terms of System (C.1) are:

$$A_2 V_1^3 - \frac{i\xi A_1}{\xi^2 + \eta^2} V_0^3 = -\Lambda_1^3 V_0^3. \quad (\text{C.4})$$

If $\xi \neq 0$ is fixed, the first order terms are:

$$A_2 V_1^3 - \frac{i\xi A_1 + A_0}{\xi^2 + \eta^2} V_0^3 = -\Lambda_1^3 V_0^3. \quad (\text{C.5})$$

To compute Λ_1^1 and Λ_1^3 , we multiply the equations (C.4) and (C.5) by X_1^* and X_3^* . Then, when $\xi \rightarrow +\infty$, one has:

$$\begin{cases} \Lambda_1^1 = 0, & V_0^1 = X^1, \\ \Lambda_1^3 = -\frac{i\xi \tan \theta}{\xi^2 + \eta^2}, & V_0^3 = X^3. \end{cases}$$

And when $\xi \neq 0$ is fixed,

$$\begin{cases} \Lambda_1^1 = \frac{s\underline{c}m}{e\underline{h}}, \\ \Lambda_1^3 = -\left(i\xi \tan \theta + \frac{s\bar{\rho}_s}{e\underline{h}}\right) \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}. \end{cases}$$

When $\xi \rightarrow +\infty$, the second order terms of System (C.1) are:

$$A_2 V_2 - \frac{i\xi A_1}{\xi^2 + \eta^2} V_1 - \frac{A_0}{\xi^2 + \eta^2} V_0 = -\Lambda_1 V_1 - \Lambda_2 V_0.$$

Then, one obtains:

$$\Lambda_2^1 = \frac{s\underline{c}}{e\underline{h}} \left(m - \frac{\xi^2}{\epsilon^2} n\right), \quad \Lambda_2^3 = -\frac{s\bar{\rho}_s}{e\underline{h}} \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}.$$

As a conclusion, the asymptotic expansion of the eigenvalues of $A(\xi, \eta)$, when $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$ and $\xi \neq 0$, $K = 0$ is:

$$\begin{cases} \lambda_1(\xi, \eta) = \frac{s\underline{c}}{e\underline{h}} \left(m - \frac{\xi^2}{\epsilon^2} n\right) + o(1), \\ \lambda_2(\xi, \eta) = -\alpha\underline{h}(\xi^2 + \eta^2) + o(\xi^2 + \eta^2), \\ \lambda_3(\xi, \eta) = -i\xi \tan \theta - \frac{s\bar{\rho}_s}{e\underline{h}} + o(1). \end{cases}$$

Finally, when $\xi = 0$ the characteristic polynomial P can be factorised:

$$P(X) = X \left(X^2 + (a + \alpha\epsilon^2\underline{h})X + \alpha\epsilon^2 a\underline{h} \left(1 - \frac{m\underline{c}}{\bar{\rho}_s}\right) \right).$$

Thus it has a zero root, $\lambda_1 = 0$, and the two other roots are

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\alpha\epsilon^2\underline{h} - a \pm \sqrt{(a - \alpha\epsilon^2\underline{h})^2 + 4\alpha\epsilon^2 \frac{am\underline{h}\underline{c}}{\bar{\rho}_s}}}{2}.$$

Consequently the asymptotic development of the eigenvalues of the system when $\eta^2 \rightarrow +\infty$ and $\xi = 0$, $K = 0$ are

$$\begin{cases} \lambda_1(0, \eta) = 0, \\ \lambda_2(0, \eta) = -\alpha\underline{h}\eta^2 + o(\eta^2), \\ \lambda_3(0, \eta) = \frac{s\bar{\rho}_s}{e\underline{h}} \left(\frac{m\underline{c}}{\bar{\rho}_s} - 1\right) + o(1). \end{cases}$$

This achieves the proof of Proposition 4.2. \square

D Numerical scheme

In this appendix, we give the numerical scheme used for the simulations of the system.

Stationary regime for the water The ratio between the erosion speed and the fluid velocity is small and we will suppose that the time derivatives of c and h are small. In order to justify this assumption, we rescale the equations by introducing the characteristic variables Z the eroded height, L the characteristic length, and $T = Z/e$ the characteristic time. We define the dimensionless variables:

$$\begin{aligned} h' &:= \frac{h}{H}, & z' &= \frac{z}{Z}, & v' &:= \frac{v}{V}, & c' &:= \frac{c}{c_{sat}}, \\ x' &:= \frac{x}{L}, & t' &:= \frac{e}{Z}t. \end{aligned}$$

Therefore, dropping the primes, System (2.5) is written as:

$$\begin{cases} \partial_t h + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(hv) = \frac{r}{e}, \\ \partial_t(ch) + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(chv) = \frac{\rho_s}{c_{sat}} \left(h^m |v|^n - \frac{s}{e} c \right), \\ \partial_t z = \tilde{K} \Delta z - h^m |v|^n + \frac{s}{e} c, \\ v = -\frac{\mu}{V} \nabla(h + z). \end{cases}$$

Here, we defined $\epsilon := \frac{Le}{HV}$. If $\epsilon \ll 1$, as generally $\rho_s \gg c_{sat}$, we can neglect the terms $\partial_t h$ and $\partial_t(ch)$ in the equation h et ch . Thus, assuming enough regularity on the solutions, we can write $\operatorname{div}(chv) = hv \cdot \nabla c + c \operatorname{div}(hv) = hv \cdot \nabla c$. Moreover we fix $V = \mu$ for simplicity. We obtain:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(hv) = \tilde{r}, \\ hv \cdot \nabla c = \frac{\rho_s}{c_{sat}} \left(h^m |v|^n - \frac{s}{e} c \right), \\ \partial_t z = \tilde{K} \Delta z - h^m |v|^n + \frac{s}{e} c, \\ v = -\nabla(h + z). \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Discretisation of the equations The constraint on h at each time $\operatorname{div}(h \nabla(h + z)) = 0$ leads to a fully nonlinear problem that may be hard to solve numerically. Instead, we discretize this equation as

$$\operatorname{div}(h^{n-1} \nabla h^n) + \operatorname{div}(h^n \nabla z^n) = -r, \quad (\text{D.2})$$

where h^n represents the fluid height at time $t_n = n dt$ whereas the surface height at time n , z^n , has been calculated by an explicit Euler method, using the solutions at time $n-1$, h^{n-1} and c^{n-1} : $\forall 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y$,

$$\frac{z_{i,j}^n - z_{i,j}^{n-1}}{dt} = K \frac{z_{i+1,j}^{n-1} - 2z_{i,j}^{n-1} + z_{i-1,j}^{n-1}}{dx} + K \frac{z_{i,j+1}^{n-1} - 2z_{i,j}^{n-1} + z_{i,j-1}^{n-1}}{dy} - (E - S)_{i,j}^n.$$

We discretise the equation on h^n by a centered finite volume scheme, which writes:

$$\begin{aligned} -r_{i,j} = & \frac{h_{i+1/2,j}^{n-1}(h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n) - h_{i-1/2,j}^{n-1}(h_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n)}{dx^2} \\ & + \frac{h_{i,j+1/2}^{n-1}(h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n) - h_{i,j-1/2}^{n-1}(h_{i,j}^n - h_{i,j-1}^n)}{dy^2} \\ & + \frac{h_{i+1/2,j}^n(z_{i+1,j}^n - z_{i,j}^n) - h_{i-1/2,j}^n(z_{i,j}^n - z_{i-1,j}^n)}{dx^2} \\ & + \frac{h_{i,j+1/2}^n(z_{i,j+1}^n - z_{i,j}^n) - h_{i,j-1/2}^n(z_{i,j}^n - z_{i,j-1}^n)}{dy^2}, \end{aligned}$$

where $h_{i+1/2,j}^{n-1} = \frac{h_{i,j}^{n-1} + h_{i+1,j}^{n-1}}{2}$. Finally, Equation (5.1) on c is discretised by an upwind finite volume scheme, considering the variable x as a time variable. The time discretisation is an explicit Euler scheme.

$$\begin{aligned} & \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{dx} + \frac{\max(v_x[i,j], 0)}{v_y[i,j]} \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{dy} + \frac{\min(v_x[i,j], 0)}{v_y[i,j]} \frac{c_{i,j} - c_{i,j+1}}{dy} \\ & = -\frac{\rho_s}{h_{i,j} v_x[i,j]} (E - S)_{i,j}. \end{aligned}$$

Boundary conditions We choose periodic boundary conditions in the y direction. There remains two boundaries, the top and the bottom of the tilted plane. The boundary conditions for the soil height are Neumann conditions: $\forall 1 \leq j \leq N_y$,

$$z_{0,j}^n = z_{1,j}^n, \quad z_{N_x,j}^n = z_{N_x+1,j}^n.$$

The boundary conditions for the water height and for the concentration of sediments are a Dirichlet condition at the top because the incoming flow is fixed, and a free flow Neumann condition at the bottom.

$$\begin{cases} h_{0,j}^n = h_0, & h_{N_x,j}^n = h_{N_x+1,j}^n, \\ c_{0,j}^n = c_0, & c_{N_x,j}^n = c_{N_x+1,j}^n. \end{cases}$$

Comparison with a scheme that solves the non stationary system In this paragraph, we drop the stationary assumption for the water height and sediment concentration, and compare the results to those where the stationary assumption is made. We solve System (2.5), with a finite volume scheme. A fully explicit scheme fails to solve the system, because the computed solution quickly blows up, even with a time step smaller than the one given by the CFL condition:

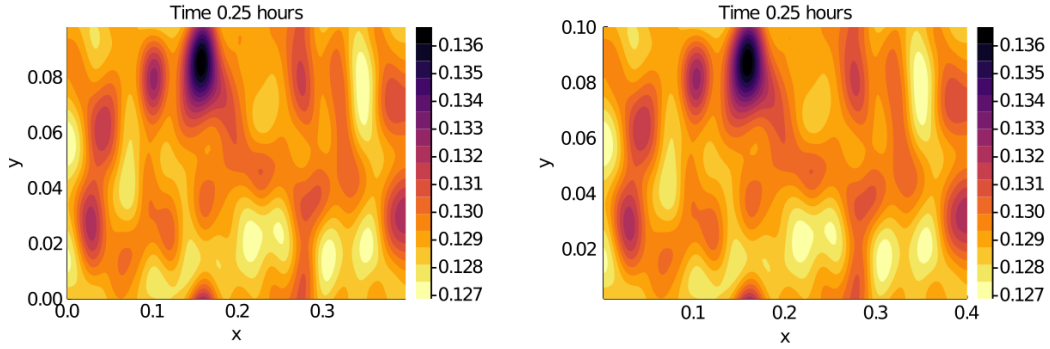
$$dt \leq \frac{dx}{v_{water}}.$$

Therefore, we use a semi-explicit scheme: linear terms of the water height and sediment concentration equations are implicit, and we explicit a part of the non

linear terms. The discretisation in time of equations on h and c is given by:

$$\begin{cases} \frac{h^{k+1} - h^k}{dt} + \mu \operatorname{div}(h^k \nabla h^{k+1} + h^{k+1} \nabla z^{k+1}) = r^k, \\ h^{k+1} \frac{c^{k+1} - c^k}{dt} + h^{k+1} v^{k+1} \cdot \nabla c^{k+1} = e \left((h^{k+1})^m |v^{k+1}|^n \right) - \rho_s s \frac{c^{k+1}}{c_{sat}}, \\ v^k = -\mu \nabla (h^k + z^k). \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Discretisation in space is done by a finite volume scheme, the same as for the



(a) Non stationary scheme, 9000 iterations. (b) Stationary scheme, 2000 iterations.

Figure D.1 – Eroded height of the soil in mm , for $K = K_e$, at $T = 2s$.

stationary System (D.1). The numerical parameters are given by Table 2.2, and $\delta t = 0.1s$. Figure D.1 shows the results of two simulations with the same parameters, the non stationary System (2.5) in Figure D.1a and the stationary System (D.1) in Figure D.1b. At $T = 0.25$ hours, we can observe that these two simulations are almost the same: the l^∞ norm of the difference between these two results is $2.10^{-5}mm$. This result supports the fact that the approximation of the complete System (2.5) by System (D.1), where water is in a stationary regime is valid.

A stationary particle method for a class of hyperbolic equations

Résumé

Dans ce chapitre, on développe et étudie une méthode particulière pour résoudre la version stationnaire de certaines équations de transport. Cette méthode s'inspire des méthodes particulières non-stationnaires, la variable de temps étant remplacée par la direction des courbes caractéristiques. La trajectoire des particules est calculée en utilisant l'équation dépendant du temps, et la méthode d'approximation est basée sur une formule de quadrature, utilisant la position des particules comme points de quadrature. On démontre la convergence du schéma sous certaines hypothèses, et on donne une estimation d'erreur. Ensuite, cette méthode est appliquée au modèle d'évolution du paysage, quand la topographie évolue sous les effets de l'érosion par l'eau et de la sédimentation.

Abstract

We present and study a particle method for stationary solutions of a class of transport equations. This method is inspired by non-stationary particle methods, the time variable being replaced by the direction of the characteristic curves. Particles trajectories are computed using the time-dependent equations, and then the approximation method is based on a quadrature method using the particles locations as quadrature points. We prove the convergence of the scheme under some hypotheses, and give an error estimate. Then this method is applied to a landscape evolution model, where the topography evolves under the effects of water erosion and sedimentation.

Contents

1	Introduction	90
2	A representation formula for the solution using characteristics	92
3	The discretization method	96
3.1	The smoothed particle formalism	96
3.2	Quadrature formula and semi discretization	99
3.3	Discretization of the particle trajectories and the fully discrete scheme	101
3.4	The main theorem	105
3.5	Discussions about the method	112
4	Numerical tests	113
4.1	Practical implementation of the scheme	113
4.2	Numerical simulations	116
4.3	Application to the landscape evolution model	122
5	Conclusion and perspectives	127

1 Introduction

In this chapter, we introduce and analyze a particle method for first order equations in divergence form and with a source term:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}u)(x) + a_0(x)u(x) = S(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^d := (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad (1.1)$$

with $d \geq 2$. We assume that the functions \mathbf{a} , a_0 , S are defined on an open set $U \subset \mathbb{R}^d$ containing $\mathbb{R}_+^d := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$, and $\mathbf{a} : U \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ whereas $a_0, S : U \rightarrow \mathbb{R}$. We complement system (1.1) with the following boundary condition:

$$u(0, \xi) = g(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad (1.2)$$

where we decompose $x \in \mathbb{R}^d$ into $x = (x_1, \xi)$ with $x_1 \in \mathbb{R}$ and $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$. We set $\xi = (x_2, \dots, x_d) = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$. The problem originates from the numerical simulation of landscape evolution models. A landscape represented by the altitude z is eroded by a water stream of height h . The sediments created by erosion are transported by the fluid and the sediment density in the fluid is denoted by c . The quantity (z, h, c) is a function of the horizontal coordinates x and time t . The evolution system for (z, h, c) , introduced and described in [11, 12], studied in [6], is written:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h\mathbf{v}) = r, \\ \operatorname{div}(ch\mathbf{v}) = \rho_s e \left(\frac{h}{H}\right)^m \left(\frac{|\mathbf{v}|}{V}\right)^n - \rho_s s \frac{c}{c_{sat}}, \\ \partial_t z = K\Delta z - e \left(\frac{h}{H}\right)^m \left(\frac{|\mathbf{v}|}{V}\right)^n + s \frac{c}{c_{sat}}, \end{cases} \quad (1.3)$$

Here, ρ_s represents the sediment volumetric mass, e is an erosion coefficient, s a sediment redeposition coefficient and K is a diffusion constant, that represents the soil creep effect. r is a source term representing precipitation, evaporation or infiltration. The fluid velocity is written $\mathbf{v} = V(\tan\theta, 0) - V\nabla(h+z)$ with V a characteristic velocity of the fluid. Usually, the fluid velocity $|\mathbf{v}|$ is much larger than the erosion speed $|\partial_t z|$. In order to focus on the erosion phenomenon, one has to consider large time scales. Thus the time variation of the fluid height and sediment concentration become negligible: one is left with the equations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h\mathbf{v}) = r, \\ \operatorname{div}(ch\mathbf{v}) = \rho_s e \left(\frac{h}{H}\right)^m \left(\frac{|\mathbf{v}|}{V}\right)^n - \rho_s s \frac{c}{c_{sat}}, \end{cases} \quad (1.4)$$

supplemented with the equation for z (unchanged). One problem of interest is the erosion of an inclined plane: this can be carried out experimentally [36] and from a theoretical point of view, and this amounts to prescribe the fluid height on one side of the plane: $h(t, 0, \xi) = h_{\text{ref}}(t, \xi)$ with $\xi \in \mathbb{R}$. In order to simplify the discussion, we assume $\mathbf{a} = -\mu\nabla(h+z)$ is given in order to linearize the equation. We expect that the nonlinear problem is solved through an iterative scheme. We are thus left with a problem similar to the linear problem (1.1)-(1.2). Eq. (1.1) can be written as

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{a}_1 u)(x_1, \xi) + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\mathbf{a}_{j+1} u)(x_1, \xi) + a_0(x_1, \xi)u(x_1, \xi) = S(x_1, \xi), \quad (1.5)$$

$\forall x_1 > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}$. It can be seen as a first order partial differential equation where x_1 plays the role of time. Eq. (1.5) can be solved by a classical finite volume scheme: however some CFL type condition should be imposed to preserve the positivity of u . Moreover it may be difficult to design the mesh of the computational domain in the presence of complex or moving boundaries. Instead, we consider in this chapter a mesh-free particle method.

Particle methods are mesh-free numerical methods, that are mostly used to solve fluid dynamics problems. The principle of such methods is to consider the fluid as a combination of smooth particles. These particles have a mass distribution, represented by a kernel function. They move in the domain, using the Lagrangian description of fluid flow, and transport some quantities which evolve according to suitable laws. Smoothed particle hydrodynamics, vortex methods and particle in cell method are example of such particle methods. The Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) was initially introduced to solve numerically problems in astrophysics. It was first designed by Gingold and Monaghan in [35], and by Lucy in [49]. The numerical resolution of astrophysical problems, in three dimensions, by a finite difference schemes requires a very large number of grid points. On the other hand, the SPH method allows reasonable accuracy with a comparatively smaller number of particles. Since then, this method was used in various fields, such as oceanography or dynamic structural mechanics. In plasma physics, the Particles in Cell method

(PIC) is used to solve Vlasov-Poisson or Vlasov-Maxwell equations. These equations are given in a 6 dimensional space, thus would be very costly to solve with a classical scheme. Therefore the PIC method, which is a particle method, allows to decrease this computational cost.

The theoretical analysis of the particle methods began in the 1980s, and was initiated by Raviart and coworkers. In 1987, Mas-Gallic and Raviart [51] gave an analysis of a particle method for a class of first order linear hyperbolic systems. They proved the convergence of the time continuous scheme in L^2 . The convergence of the SPH method had been widely studied for various types of equations, in the linear and in the non linear case [5].

Due to the presence of \mathbf{a}_1 in the derivative with respect to x_1 , Eq. (1.1) is not, strictly speaking, an evolution equation and classical particle methods do not apply to it directly. In this chapter, we introduce a modified particle method to solve the stationary Eq. (1.1), together with boundary condition (1.2). This method is based on non-stationary particle methods, and we prove the convergence of the numerical scheme under some appropriate assumptions. The idea of the method, and a part of the proof of convergence is inspired from [60], which analyses a particle method for linear hyperbolic equations of the first order.

First, in Sect. 2 we introduce a representation formula for the solution u of Eq. (1.1)-(1.2). This solution is computed along the characteristics curves. Then, in Sect. 3 we introduce the numerical method, and provide a result of convergence of the scheme, under suitable assumptions. This result is completed in Sect. 4 by numerical tests of the particle scheme, and finally by an application to the landscape evolution model (1.3).

2 A representation formula for the solution using characteristics

In this section, we solve Eq. (1.1) together with Boundary Condition (1.2), with the method of characteristics. This provides an integral representation of the solution u along the characteristic curves of the vector field \mathbf{a} , and we will use this representation to introduce our numerical scheme. We suppose that the boundary $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ is non characteristic, and that \mathbf{a} is bounded on $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$, that is there exist two positive constants α and β such that

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad 0 < \alpha \leq \mathbf{a}_1(0, \xi), \quad |\mathbf{a}(0, \xi)| \leq \beta. \quad (2.1)$$

This is consistent with the original problem where water is injected in the domain: the fluid flux is positive on the boundary \mathbb{R}^{d-1} of \mathbb{R}_+^d . We further assume that the function $\mathbf{a} \in C^1(U)$ so that the Cauchy-Lipschitz theorem applies, and we introduce the characteristic curves x_ξ defined as the maximal solutions of

$$x'_\xi(s) = \mathbf{a}(x_\xi(s)), \quad \text{with} \quad x_\xi(0) = (0, \xi) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad (2.2)$$

and defined on $(T_{\min}(\xi), T_{\max}(\xi))$ with $T_{\min}(\xi) < 0 < T_{\max}(\xi)$. We also introduce the flow function Φ associated to the vector field \mathbf{a} defined on

$$\Omega = \{(s, \xi); \xi \in \mathbb{R}^{d-1}, s \in (T_{\min}(\xi), T_{\max}(\xi))\}$$

as

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ (s, \xi) &\mapsto \Phi(s, \xi) = x_\xi(s). \end{aligned} \tag{2.3}$$

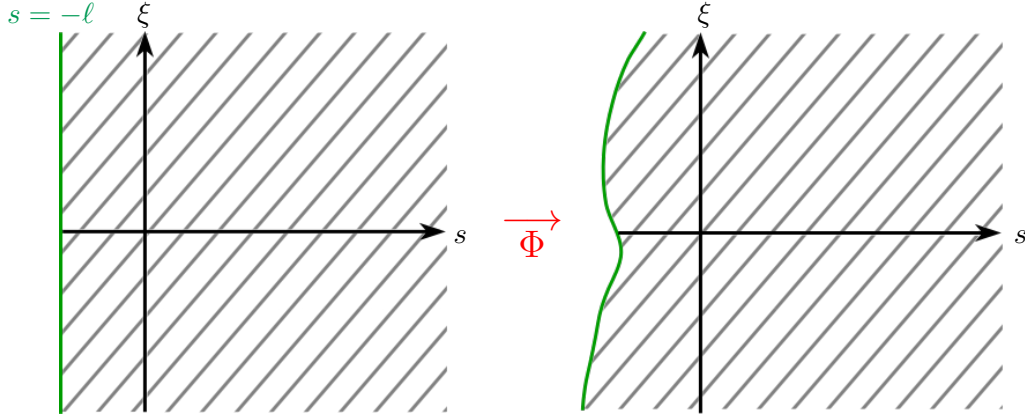


Figure 2.1 – Domains Ω_ℓ and $\Phi(\Omega_\ell) = \tilde{U}_\ell$.

We then have the following representation formula for the solution u of System (1.1)-(1.2) along the characteristics.

Lemma 2.1. *Assume $\mathbf{a} \in C^2(U)$, $a_0, S \in C^1(U)$, then the solution u of (1.1)-(1.2) satisfies*

$$\begin{aligned} \forall (s, \xi) \in \Omega, \quad u(\Phi(s, \xi)) &= \left[g(\xi) + \int_0^s S(\Phi(t, \xi)) \exp(I(t)) dt \right] \exp(-I(s)), \tag{2.4} \\ \text{where } I(s) &= \int_0^s (\operatorname{div}(\mathbf{a}(\Phi(\tau, \xi))) + a_0(\Phi(\tau, \xi))) d\tau. \end{aligned}$$

We want to solve System (1.1)-(1.2) on the domain \mathbb{R}_+^d : because of (2.1) this domain is positively invariant under the flow of the differential system (2.2):

$$\Phi(s, \xi) \in \mathbb{R}_+^d, \quad \forall s \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

We make further assumptions on the flow Φ :

Assumption 2.1.

- (i) *The flow Φ is defined on a domain $\Omega_\ell = (-\ell, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$ with $\ell > 0$ and $\Phi : \Omega_\ell \rightarrow \Phi(\Omega_\ell) = \tilde{U}_\ell \subset U$ is a C^1 diffeomorphism. That is, any point $x \in \tilde{U}_\ell$ belongs to a trajectory $x_\xi(s)$ where $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$ and $s > -\ell$. This is illustrated in Fig.2.1.*

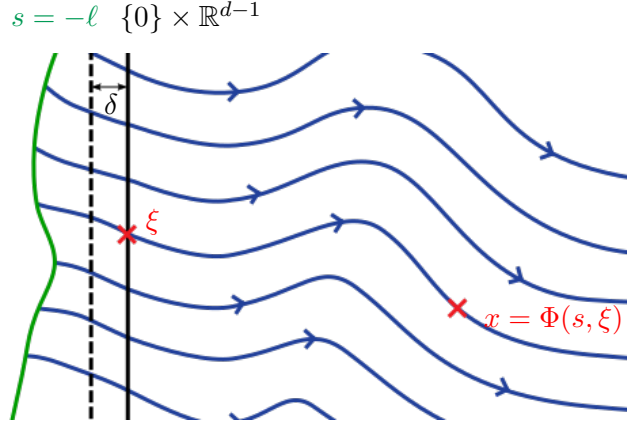


Figure 2.2 – Characteristic curves on the domain \tilde{U}_ℓ and definition of U_δ .

- (ii) $\tilde{U}_\ell \subset U$ contains a domain $U_\delta = (-\delta, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \tilde{U}_\ell$ with $\delta > 0$. This is illustrated in Fig. 2.2.

Under Assumption 2.1, the solution u of (1.1), (1.2) is defined on the domain U_δ and Lemma 2.1 provides an explicit formula for u .

Remark 2.1. The second assumption on the flow Φ postulates that each point $x \in (-\delta, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$ has an inverse by the flow Φ .

Now, let us prove that under suitable assumptions on the vector field \mathbf{a} the flow Φ satisfies the assumptions formulated above. This shows that the set of functions Φ which satisfy Assumption 2.1 is not empty.

Proposition 2.1. Let $L > 0$, and assume that $U \supset U_L = (-L, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Suppose that the function \mathbf{a} is globally Lipschitz continuous on U and satisfies (2.1). Then,

- (i) For all $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, Eq. (2.2) admits a unique maximal solution x_ξ , and this solution is such that: $T_{\min}(\xi) < 0$, $T_{\max}(\xi) = +\infty$. The solution x_ξ belongs to $C^1((T_{\min}(\xi), +\infty))$, and the flow Φ belongs to $C^1(\Omega)$.
- (ii) For all $\xi \neq \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ the curves $s \mapsto x_\xi(s)$ and $s \mapsto x_\eta(s)$ do not intersect each other.
- (iii) There exists $\ell > 0$ such that Φ verifies the first item of Assumption 2.1.
- (iv) If in addition $\mathbf{a}_1(x) \geq \alpha > 0$ for all $x \in U$, then Φ verifies the second assumption of 2.1.

Proof. Items (i) and (ii) of the theorem are proved by a direct application of the Cauchy-Lipschitz theorem. Then we prove Item (iii). First, as \mathbf{a} is P -Lipschitz

continuous, by (2.1) and the fact that $\Phi(0, \xi) = (0, \xi)$, we have for $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\Phi(s, \xi) - \Phi(0, \xi)| &\leq \int_0^s |\mathbf{a}(\Phi(t, \xi))| dt \leq s\beta + \int_0^s |\mathbf{a}(\Phi(t, \xi)) - \mathbf{a}(\Phi(0, \xi))| dt \\ &\leq s\beta + P \int_0^s |\Phi(t, \xi) - \Phi(0, \xi)| dt. \end{aligned}$$

A similar inequality can be shown for $s \leq 0$. Then, by Gronwall's lemma, denoting by $\Phi_1(s, \xi)$ the first component of $\Phi(s, \xi)$, and using that $\Phi_1(0, \xi) = 0$ we get:

$$|\Phi_1(s, \xi)| \leq \frac{\beta}{P} \left(e^{P|s|} - 1 \right).$$

Thus for all $|s| \leq \ell := \frac{1}{P} \ln(1 + \frac{LP}{\beta})$, we have $|\Phi_1(s, \xi)| \leq L$. This implies that $\Phi_1(s, \xi) \geq -L$ for $s \in (-\ell, 0]$. Then for $s > 0$ we show that $\Phi_1(s, \xi) > 0$. Indeed, because of (2.1) we have $\Phi_1(s, \xi) > 0$ for $s \in (0, \varepsilon_0]$ with $\varepsilon_0 > 0$ small. By contradiction, suppose that $s_1 > 0$ is the smallest time such that $\Phi_1(s_1, \xi) = 0$. So we have $\Phi_1(s, \xi) > 0$ for $s \in [s_1 - \varepsilon_1, s_1)$ with $\varepsilon_1 > 0$ small enough. This contradict the fact that

$$\partial_t \Phi_1(s_1, \xi) = \mathbf{a}_1(\Phi(s_1, \xi)) = \mathbf{a}_1(0, \Phi_2(s_1, \xi), \dots, \Phi_d(s_1, \xi)) > 0,$$

by (2.1). Hence $\Phi_1(s, \xi) > -L, \forall (s, \xi) \in (-\ell, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$. This shows the item (iii) (which is also Assumption 2.1 (i)).

Finally we prove Item (iv). We first show that with the sole property (2.1), there exists $\delta > 0$ such that $(-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \Phi(\Omega_\ell)$. Indeed, since \mathbf{a} is P -Lipschitz continuous and with (2.1), setting $\delta = \frac{\alpha}{2} \min(\frac{1}{P}, \ell)$ we have:

$$\mathbf{a}_1(x_1, \eta) \geq \alpha - P|x_1| > \frac{\alpha}{2}, \quad \forall (x_1, \eta) \in (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

Now, for such (x_1, η) , define $\chi(t)$ as the solution of

$$\chi'(t) = \mathbf{a}(\chi(t)), \quad \chi(0) = (x_1, \eta). \tag{2.5}$$

Without lost of generality, suppose $x_1 \in (-\delta, 0)$. We have

$$\chi_1(t_1) - \chi_1(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}_1(\chi(s)) ds \geq \frac{\alpha}{2} (t_1 - t_0) > 0, \tag{2.6}$$

for all $t_1 > t_0 > 0$ provided that $\chi_1(s) \in (-\delta, \delta), \forall s \in [0, t_1]$. Therefore χ_1 is strictly increasing on some interval $(0, T_1]$, with $T_1 > 0$. Since $0 \in (-\delta, \delta)$, there exists a time $t_2 > 0$ such that $0 < t_2 < T_1$ and $\chi_1(t_2) = 0$. Furthermore, using (2.6) with $(t_0, t_1) = (0, t_2)$, t_0 satisfies

$$\delta > -x_1 = \int_0^{t_2} \mathbf{a}_1(\chi(s)) ds > \frac{\alpha t_2}{2},$$

hence $t_2 < 2\delta/\alpha \leq \ell$. We denote $\chi(t_2) = (0, \xi)$. Then, by the uniqueness in the Cauchy-Lipschitz theorem we have $\Phi(t - t_2, \xi) = \chi(t)$ for all $t \in (0, t_2)$. Thus for

$t = 0$, one has: $\Phi(-t_2, \xi) = \chi(0) = (x_1, \eta)$. This shows that $(-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \Phi(\Omega_\ell)$. Now we assume that $\mathbf{a}_1(x_1, \xi) \geq \alpha > 0$ for all $(x_1, \xi) \in U$ and consider $(x_1, \eta) \in [\delta, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Let us consider the solution $\chi(t)$ of (2.5). For $t > 0$, we have:

$$\begin{aligned} |\chi(-t) - \chi(0)| &= \left| \int_0^t (\mathbf{a}(x_1, \eta) + \mathbf{a}(\chi(-s)) - \mathbf{a}(\chi(0))) ds \right| \\ &\leq |\mathbf{a}(x_1, \eta)|t + P \int_0^t |\chi(-s) - \chi(0)| ds. \end{aligned}$$

Hence by Gronwall's lemma,

$$|\chi(-t) - \chi(0)| \leq \frac{|\mathbf{a}(x_1, \eta)|}{P} (e^{Pt} - 1).$$

This shows that $\chi(-t)$ is defined for all $t > 0$ as long as $\chi(-t) \geq -L$. Thus, there exists $t_0 > 0$ such that $\chi_1(-t_0) = 0$. Setting $\chi(-t_0) = (0, \xi)$, we have $\Phi(t_0, \xi) = (x_1, \eta)$ which finishes the proof of Assumption (2.1) (ii). \square

We summarize the various considered domains for the reader's convenience:

- U is the domain of definition of \mathbf{a} .
- Ω is the domain of definition of Φ , and $\Phi(\Omega) \subset U$.
- $\Omega_\ell = (-\ell, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \Omega$.
- $\tilde{U}_\ell = \Phi(\Omega_\ell) \subset U$.
- $U_\delta = (-\delta, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \tilde{U}_\ell$.

Next, we consider the regularity of the solution u : in order to derive error estimates for our numerical scheme, we will need additional regularity on the solution u . This is obtained by using more regularity on \mathbf{a} , a_0 , S and g .

Proposition 2.2. *Let $m \in \mathbb{N}$, and suppose that $\mathbf{a} \in C^{m+1}(U)$, $g \in C^m(\mathbb{R}^{d-1})$ whereas $a_0, S \in C^m(U)$. Then, one has:*

1. $\Phi : \Omega_\ell \rightarrow \tilde{U}_\ell \subset U$ is a C^{m+1} diffeomorphism.
2. The system (1.1)-(1.2) is well-posed on \tilde{U}_ℓ and the solution u belongs to $C^m(\tilde{U}_\ell)$.

3 The discretization method

In this section, we describe the particle method, and provide a proof of convergence of the numerical scheme.

3.1 The smoothed particle formalism

In this part, we introduce the first ingredient of the particle scheme, the approximation of the solution u by a quadrature formula. This technique is similar to the method of smoothed particle hydrodynamics for evolution problems. In what follows we will assume that $x \in \mathbb{R}_+^d := (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$, and we want to compute

an approximation of $u(x)$. For that purpose, we define the kernel function ζ^h , to be an approximation of the Dirac delta distribution:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \zeta^h(x) = \frac{1}{h^d} \zeta\left(\frac{|x|}{h}\right), \quad (3.1)$$

with $\zeta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ a function supported in $[0, 1]$ which verifies:

$$\text{meas}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 \zeta(t) dt = 1, \quad (3.2)$$

where $\text{meas}(\mathbb{S}^{d-1})$ is the $d-1$ dimensional measure of the $d-1$ dimensional sphere. The support of ζ^h is included into $\overline{B}_d(0, h)$, where, for $m \in \mathbb{N}$:

$$B_m(x, h) := \{y \in \mathbb{R}^m; |x - y| < h\}, \quad (3.3)$$

$$\overline{B}_m(x, h) := \{y \in \mathbb{R}^m; |x - y| \leq h\}. \quad (3.4)$$

Then, for any $f \in C^m(U)$ and $x \in \mathbb{R}_+^d$, the function $y \mapsto f(y)\zeta^h(x-y)$ is compactly supported in U_δ provided that $0 < h < \delta$. This function can be extended by 0 to the domain \tilde{U}_ℓ . We get the approximation formula:

$$f(x) \approx \int_{U_\delta} f(y)\zeta^h(x-y)dy = \int_{\tilde{U}_\ell} f(y)\zeta^h(x-y)dy, \quad (3.5)$$

Next we use the fact that the solution u is known on the characteristic curves of the vector field \mathbf{a} and that the flow Φ is a C^1 diffeomorphism, so that we can perform a change of variable in the formula (3.5). Let us denote by J_Φ the Jacobian matrix of Φ , given by:

$$J_\Phi(t, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_d}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_d}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial \xi_{d-1}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

As Φ is invertible, $\det J_\Phi$ does not vanish. Moreover, for all $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, $(\det J_\Phi)(0, \xi) = \partial_t \Phi_1(0, \xi) = \mathbf{a}_1(0, \xi) \geq \alpha > 0$, because the Jacobian matrix

$$\frac{\partial(\Phi_2, \dots, \Phi_d)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})}$$

is the identity, given that $\Phi(0, \xi) = (0, \xi)$. Therefore,

$$\forall s \geq -\ell, \forall \xi \in \mathbb{R}^{d-1}, (\det J_\Phi)(s, \xi) > 0.$$

Then if $f \in C^0(\tilde{U}_\ell)$, by the change of variables formula, we get:

$$\int_{\tilde{U}_\ell} f(x) dx = \int_{-\ell}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(\Phi(s, \xi)) (\det J_\Phi)(s, \xi) d\xi ds. \quad (3.7)$$

Consequently, an integral on \tilde{U}_ℓ can be converted into an integral on $(-\ell, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$. It is easier to make computations on this domain, and to create a mesh on it. Now we can apply the approximation (3.5) to the solution u of Eq. (1.1). By using the change of variables (3.7), we have:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^d, \quad u(x) &\approx \int_{\tilde{U}_\ell} u(y) \zeta^h(x-y) dy \\ &= \int_{-\ell}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\Phi(s, \xi)) \zeta^h(x - \Phi(s, \xi)) (\det J_\Phi)(s, \xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

We end this section with an error estimate on $u - u * \zeta^h$.

Lemma 3.1. *Let $u \in C^2(\tilde{U}_\ell)$, $\delta > 0$ such that $\overline{U_\delta} \subset \tilde{U}_\ell$ and $x \in \mathbb{R}_+^d$. Then there exists $C(x, \delta) > 0$ such that for any $0 < h < \delta$, one has*

$$|u(x) - u * \zeta^h(x)| \leq C(x, \delta) h^2. \quad (3.9)$$

Proof. Let $x \in \mathbb{R}_+^d$: we expand the function u at order 2. As u is $C^2(\tilde{U}_\ell)$, for all $y \in \overline{U_\delta}$, one has:

$$u(x) - u(y) = (x - y) \cdot \nabla u(x) + R(x, y),$$

where R is a reminder which verifies:

$$|R(x, y)| \leq |x - y|^2 \sup_{z \in [x, y]} |H(u)(z)|.$$

Here $|H(u)(z)|$ denotes an appropriate matrix norm of the Hessian matrix of u at point z . Thus, as the integral of ζ^h is equal to 1, one finds

$$\begin{aligned} u(x) - \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \zeta^h(x-y) dy &= \int_{\mathbb{R}^d} (u(x) - u(y)) \zeta^h(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x-y) \zeta^h(x-y) dy \cdot \nabla u(x) + \int_{\mathbb{R}^d} R(x, y) \zeta^h(x-y) dy. \end{aligned}$$

As ζ^h is a radial function, we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} (x-y) \zeta^h(x-y) dy = 0.$$

Moreover, the support of the function $y \mapsto \zeta^h(x-y)$ is contained in $\overline{B_d}(x, h) \subset \overline{B_d}(x, \delta) \subset \tilde{U}_\ell$. Consequently, we have

$$|u(x) - u * \zeta^h(x)| \leq \sup_{y \in \overline{B_d}(x, h)} |R(x, y)| \leq C(d) h^2 \sup_{\substack{y \in \overline{B_d}(x, \delta) \\ 1 \leq i, j \leq d}} |\partial_{ij}^2 u(y)| = C(x, \delta) h^2,$$

where $C(d)$ is a constant which only depends on of the dimension d and

$$C(x, \delta) = C(d) \sup_{\substack{y \in \overline{B_d}(x, \delta) \\ 1 \leq i, j \leq d}} |\partial_{ij}^2 u(y)| < +\infty, \quad (3.10)$$

because $\overline{B_d}(x, \delta)$ is compact. This completes the proof of the lemma. \square

Remark 3.1. *To obtain the bound (3.9) on \mathbb{R}_+^* , we need to suppose that u is defined and smooth on the larger domain U_δ (see formula (3.10) for the bound $C(x, \delta)$).*

3.2 Quadrature formula and semi discretization

In this section we introduce a discretization of the integral approximation of u (3.8). For that purpose we recall a theorem from [60], which provides a quadrature formula and an error estimate for functions in Sobolev spaces.

Theorem 3.1. *Let m be an integer such that $m > d$. Then there exists $C > 0$ such that, $\forall f \in W^{m,1}(\mathbb{R}^d)$ and $\forall \varepsilon > 0$:*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx - \varepsilon^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x_k) \right| \leq C \varepsilon^m \|f\|_{W^{m,1}(\mathbb{R}^d)}, \quad (3.11)$$

where $(x_k)_i = k_i \varepsilon$, $\forall i = 1, \dots, d$.

Remark 3.2. *The condition $m > d$ is used to get the continuous embedding $W^{m,1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^d)$, which permits to give a meaning to the point values $f(x_k)$.*

Now we discretize the integral (3.8) with respect to $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$: this yields the following approximation of u

$$u(x) \approx \varepsilon^{d-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \int_{-\ell}^{\infty} u(\Phi(s, \xi_k)) \zeta^h(x - \Phi(s, \xi_k)) (\det J_{\Phi})(s, \xi_k) ds, \quad (3.12)$$

with $(\xi_k)_i = k_i \varepsilon$, $\forall i = 1, \dots, d-1$. Introduce $x_k(s) = \Phi(s, \xi_k)$, $\omega_k(s) = \varepsilon^{d-1} (\det J_{\Phi})(s, \xi_k)$ and $u_k(s) = u(x_k(s))$. Then, the approximation (3.12) reads

$$u(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \int_{-\ell}^{\infty} \omega_k(s) u_k(s) \zeta^h(x - x_k(s)) ds.$$

Thereafter we derive evolution equations for the quantities x_k , u_k and ω_k : this will provide a natural way to compute these quantities on a mesh discretizing the interval $(-\ell, +\infty)$.

Proposition 3.1. *Let u be the solution of Eq. (1.1), with Boundary Condition (1.2). Let $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$. Then, the quantities $x_k(s) = \Phi(s, \xi_k)$, $u_k(s) = u(x_k(s))$ and $\omega_k(s) = \varepsilon^{d-1} (\det J_{\Phi})(s, \xi_k)$ are solutions of, $\forall s > -\ell$:*

$$\begin{cases} x'_k(s) = \mathbf{a}(x_k(s)), & (3.13a) \\ \omega'_k(s) = (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s)) \omega_k(s), & (3.13b) \\ u'_k(s) = -u_k(s) [(\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s)) + a_0(x_k(s))] + S(x_k(s)), & (3.13c) \\ x_k(0) = (0, \xi_k), \quad \omega_k(0) = \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k), \quad u_k(0) = g(\xi_k). & (3.13d) \end{cases}$$

Proof. Eq. (3.13a) follows from the definition of characteristic curves (2.2).

Then, by Liouville's formula, one finds

$$\frac{d}{ds} (\det J_{\Phi})(s, \xi) = (\operatorname{div} \mathbf{a})(\Phi(s, \xi)) (\det J_{\Phi})(s, \xi),$$

which leads to Eq. (3.13b).

Next, we prove (3.13c): as $x'_k(s) = \mathbf{a}(x_k(s))$, we use the chain rule and Equation (1.1) to obtain:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(u(x_k(s))) &= x'_k(s) \cdot \nabla u(x_k(s)) = \mathbf{a}(x_k(s)) \cdot \nabla u(x_k(s)) \\ &= -u(x_k(s)) [(\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s)) + a_0(x_k(s))] + S(x_k(s)), \end{aligned}$$

which ends the proof. \square

We consider an additional quantity $\rho_k = \omega_k u_k$: as a consequence of Proposition (3.1), the function ρ_k satisfies the following proposition.

Corollary 3.1. $\forall k \in \mathbb{Z}^{d-1}$, the function $\rho_k(s)$ is the solution of:

$$\begin{cases} \rho'_k(s) + a_0(x_k(s))\rho_k(s) = \omega_k(s)S(x_k(s)), & \forall s > -\ell, \\ \rho_k(0) = \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k)g(\xi_k). \end{cases} \quad (3.14a)$$

$$(3.14b)$$

Systems (3.13) and (3.14) are the same as for non stationary particles schemes, in \mathbb{R}^{d-1} . The difference here is that variable s is not a time variable but rather a mere parametrisation of the characteristics. We end this section by a priori estimates on the unknowns ρ_k and ω_k that will be useful in the proof of convergence of our numerical scheme. For this, we make the following additional assumption:

Assumption 3.1. We suppose that

$$\mathbf{a} \in C^1(\tilde{U}_\ell) \cap W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell), \quad g \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1}), \quad a_0, S \in C^1(\tilde{U}_\ell) \cap W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell).$$

Lemma 3.2. Suppose that Assumption 3.1 is satisfied. Let $(t, T) \in \mathbb{R}^2$ such that $-\ell < t < 0 < T < +\infty$. Then there exist constants $C_0(t, T)$, $C_1(t, T)$, $C_2(t, T)$, $C_3^0(t, T)$, $C_3^2(t, T) > 0$ independent of ε and h such that, $\forall k \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $\forall s \in [t, T]$:

$$C_0(t, T)\varepsilon^{d-1} \leq \omega_k(s) \leq C_1(t, T)\varepsilon^{d-1}, \quad (3.15)$$

$$|\omega_k''(s)| \leq C_2(t, T)\varepsilon^{d-1}, \quad (3.16)$$

$$|\rho_k(s)| \leq C_3^0(t, T)\varepsilon^{d-1}, \quad |\rho_k''(s)| \leq C_3^2(t, T)\varepsilon^{d-1}. \quad (3.17)$$

Proof. Let us fix $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$ and $s \in [t, T]$. Then, by Equation (2.1) one finds

$$\alpha\varepsilon^{d-1} \leq \omega_k(0) = \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi) \leq \beta\varepsilon^{d-1}.$$

so

$$\begin{aligned} \omega_k(s) &= \omega_k(0) \exp\left(\int_0^s (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(t)) dt\right) \\ &\leq \beta\varepsilon^{d-1} \exp\left((T-t) \|\operatorname{div} \mathbf{a}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}\right) = C_1(t, T)\varepsilon^{d-1}, \end{aligned}$$

and,

$$\omega_k(s) \geq \alpha \varepsilon^{d-1} \exp\left((t-T)\|\operatorname{div} \mathbf{a}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}\right) = C_0(t, T) \varepsilon^{d-1}. \quad (3.18)$$

By (3.13b) and (3.18) we get

$$\begin{aligned} |\omega_k''(s)| &= |(\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s))^2 \omega_k(s) + \mathbf{a}(x_k(s)) \cdot \nabla(\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s)) \omega_k(s)| \\ &\leq 2\|a\|_{W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell)^d}^2 \omega_k(s) \leq C_2(t, T) \varepsilon^{d-1}, \end{aligned}$$

with $C_2(t, T) = 2\|a\|_{W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell)^d}^2 C_1(t, T)$.

Next we show the first inequality of (3.17). Using (3.14), we have, for $t \leq s \leq T$:

$$\begin{aligned} |\rho_k(s)| &= \left| \left[\varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k) g(\xi_k) + \int_0^s (\omega_k(\mu) S(x_k(\mu))) \exp\left(\int_0^\mu a_0(x_k(\tau)) d\tau\right) d\mu \right] \right. \\ &\quad \left. \exp\left(-\int_0^s a_0(x_k(\mu)) d\mu\right) \right| \leq \varepsilon^{d-1} \exp\left((T-t)\|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}\right) \\ &\quad \left(\|g\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \|a\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} + (T-t) C_1(t, T) \|S\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \right) := C_3^0(t, T) \varepsilon^{d-1}, \end{aligned}$$

Then by (3.14) and using the bound on ρ_k , one finds:

$$\begin{aligned} |\rho_k'(s)| &= |-a_0(x_k(s)) \rho_k(s) + \omega_k(s) S(x_k(s))| \\ &\leq \varepsilon^{d-1} \left(\|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} C_3^0(t, T) + \|S\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} C_1(t, T) \right) := C_3^1(t, T) \varepsilon^{d-1}. \end{aligned}$$

Finally, differentiating (3.14) with respect to s gives:

$$\begin{aligned} |\rho_k''(s)| &= \left| -x_k'(s) \cdot \nabla a_0(x_k(s)) \rho_k(s) - a_0(x_k(s)) \rho_k'(s) + \omega_k'(s) S(x_k(s)) \right. \\ &\quad \left. + \omega_k(s) x_k'(s) \cdot \nabla S(x_k(s)) \right| \\ &\leq \varepsilon^{d-1} C(d) \left(\|a_0\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} \left(\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} C_3^0(t, T) + C_3^1(t, T) \right) \right. \\ &\quad \left. + C_1(t, T) \|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} \|S\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} \right) := C_3^2(t, T) \varepsilon^{d-1}. \end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma. \square

3.3 Discretization of the particle trajectories and the fully discrete scheme

In this section, we introduce the discretization with respect to $s \in (-\ell, +\infty)$. Indeed, since the particle method amounts to a quadrature formula for the integral defining $u * \zeta^h$, we need to introduce a discretization of the domain Ω_ℓ and not only of Ω . This is why the discretization points in s starts from $-\ell$ instead of 0. We denote $n_\ell \in \mathbb{Z}$ such that $(n_\ell - 1)\Delta s < -\ell \leq n_\ell \Delta s$, where $\Delta s > 0$. We will

reconstruct u through the approximation

$$\begin{aligned}
u(x) &\approx \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \int_{-\ell}^{+\infty} \omega_k(s) u_k(s) \zeta^h(x - x_k(s)) ds, \\
&\approx \Delta s \sum_{i=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \omega_k(s_i) u_k(s_i) \zeta^h(x - x_k(s_i)), \\
&= \sum_{i=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \tilde{\omega}_k(s_i) u_k(s_i) \zeta^h(x - x_k(s_i)) \\
&= \sum_{i=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \tilde{\rho}_k(s_i) \zeta^h(x - x_k(s_i)) := \Pi_h^{\varepsilon, \Delta s}(u)(x), \tag{3.19}
\end{aligned}$$

where $s_i = i\Delta s$ and $\forall i \geq n_\ell$, $\tilde{\omega}_k(s_i) = \Delta s \omega_k(s_i)$ and $\tilde{\rho}_k(s_i) = \Delta s \rho_k(s_i)$. Note that $\tilde{\rho}_k$ and $\tilde{\omega}_k$ satisfy the same ODE as ρ_k and ω_k : the only difference is in the initial conditions that are multiplied by a factor Δs . In what follows, we will remove the tilde for $\tilde{\rho}_k$ and $\tilde{\omega}_k$ and simply assume that ρ_k, ω_k satisfy (3.13b), (3.14a) with the initial conditions

$$\omega_k(0) = \Delta s \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k), \quad \rho_k(0) = \Delta s \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k) g(\xi_k).$$

Next we compute an approximation of $x_k(s_i), u(x_k(s_i)), \omega_k(s_i)$ and $\rho_k(s_i)$ through the discretization of the ODE system (3.13), (3.14) by an explicit Euler scheme:

$$\begin{cases} x_k^{j+1} = x_k^j + \Delta s \mathbf{a}(x_k^j), & (3.20a) \\ \omega_k^{j+1} = \omega_k^j \left(1 + \Delta s (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^j) \right), & (3.20b) \\ \rho_k^{j+1} = \rho_k^j - \Delta s a_0(x_k^j) \rho_k^j + \Delta s \omega_k^j S(x_k^j), & (3.20c) \\ x_k^0 = (0, \xi_k), \quad u_k^0 = g(\xi_k), \quad \omega_k^0 = \Delta s \varepsilon^{d-1} \mathbf{a}_1(0, \xi_k), \quad \rho_k^0 = u_k^0 \omega_k^0. & (3.20d) \end{cases}$$

We supposed for simplicity that the function $\operatorname{div} \mathbf{a}$ is computed exactly. Now, we can define the particle approximation of the function u through a fully discrete scheme:

$$\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x) := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ n_\ell \leq j < +\infty}} \omega_k^j u_k^j \zeta^h(x - x_k^j) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{d-1} \\ n_\ell \leq j < +\infty}} \rho_k^j \zeta^h(x - x_k^j). \tag{3.21}$$

The sum is finite and is only composed of the $(j, k) \in [n_\ell, +\infty[\times \mathbb{Z}^{d-1}$ such that $x_k^j \in \bar{B}_d(x, h)$. We end up this section by computing an error estimate associated to the Euler scheme for x_k, ω_k, ρ_k .

Lemma 3.3. *Let $-\ell < t < 0 < T$ and $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$. If $\mathbf{a} \in C^1(\tilde{U}_\ell) \cap W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)$ then there exist a constant $C_\Phi(t, T) > 0$ such that:*

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N} \text{ such that } n_t := \left\lfloor \frac{t}{\Delta s} \right\rfloor \leq i \leq n_T := \left\lfloor \frac{T}{\Delta s} \right\rfloor, \quad \forall k \in E, \\
|x_k(s_i) - x_k^i| \leq C_\Phi(t, T) \Delta s, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the floor function, that is $n = \lfloor t \rfloor$ if and only if $n \in \mathbb{Z}$ and $n \leq t < n + 1$. If in addition \mathbf{a} , a_0 and S satisfy Assumption 3.1, then there exist constants $C_\omega(t, T) > 0$, $C_\rho(t, T) > 0$ independent of Δs , ε and h such that:

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ such that } n_t \leq i \leq n_T, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^{d-1}, \quad \begin{cases} |\omega_k(s_i) - \omega_k^i| \leq C_\omega(t, T) \Delta s^2 \varepsilon^{d-1}, \\ |\rho_k(s_i) - \rho_k^i| \leq C_\rho(t, T) \Delta s^2 \varepsilon^{d-1}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Moreover, there exist constants $C_\omega^0(t, T)$ and $C_\rho^0(t, T)$ such that:

$$|\omega_k^i| \leq C_\omega^0(t, T) \Delta s \varepsilon^{d-1}, \quad (3.24)$$

$$|\rho_k^i| \leq C_\rho^0(t, T) \Delta s \varepsilon^{d-1}. \quad (3.25)$$

Proof. We first assume that $\mathbf{a} \in C^1(\tilde{U}_\ell) \cap W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)$. By Eq. (2.2),

$$x_k''(s) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}(x_k(s)), \quad |x_k''(s)| \leq \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \|\nabla \mathbf{a}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)},$$

where $\mathbf{a} \cdot \nabla = \sum_{i=1}^d \mathbf{a}_i \partial_{x_i}$. We use Taylor's expansion on the interval $[s_j, s_{j+1}]$ and get:

$$x_k(s_{j+1}) = x_k(s_j) + \Delta s \mathbf{a}(x_k(s_j)) + \int_{s_j}^{s_{j+1}} x_k''(t)(s_{j+1} - t) dt$$

This yields

$$|x_k(s_{j+1}) - x_k^{j+1}| \leq \left(1 + \Delta s C(d) \|\mathbf{a}\|_{W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)}\right) |x_k(s_j) - x_k^j| + C(d) \|\mathbf{a}\|_{W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)}^2 \frac{\Delta s^2}{2}$$

Assume $0 \leq j \leq n_T$ and $x_k^0 = x_k(0)$: one has

$$\max_{0 \leq j \leq n_T} |x_k(s_j) - x_k^j| \leq C(d) \|\mathbf{a}\|_{W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)} \frac{e^{C(d) \|\mathbf{a}\|_{W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)} T} - 1}{2} \Delta s.$$

The same holds for $n_t \leq j \leq 0$: we get error estimate (3.22) by setting

$$C_\Phi(t, T) = C(d) \|\mathbf{a}\|_{W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)} \frac{e^{C(d) \|\mathbf{a}\|_{W^{1, \infty}(\tilde{U}_\ell)} (T-t)} - 1}{2}. \quad (3.26)$$

Next, we compute an error estimate on $e_k^j := \omega_k(s_j) - \omega_k^j$, for $n_t \leq j \leq n_T$. Using Eq. (3.13b) and Taylor's theorem, we have:

$$\omega_k(s_j) = \omega_k(s_{j-1})(1 + \Delta s (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s_{j-1}))) \quad (3.27)$$

By applying lemma 3.2, one obtains

$$\int_0^1 (1-t) \omega_k''(s_{j-1} + t \Delta s) dt := E_k^{j-1} \leq \sup_{u \in [t, T]} |\omega_k''(u)| \leq C_2(t, T) \Delta s \varepsilon^{d-1}.$$

Then, combining Eq. (3.20b) and (3.27) we have:

$$\begin{aligned}
e_k^j &= e_k^{j-1} + \Delta s \left((\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s_{j-1}))\omega_k(s_{j-1}) - (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^{j-1})\omega_k^{j-1} \right) + \Delta s^2 E_k^{j-1} \\
&= e_k^{j-1} + \Delta s \left[\left((\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s_{j-1})) - (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^{j-1}) \right) \omega_k(s_{j-1}) \right. \\
&\quad \left. - (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^{j-1}) \left(\omega_k(s_{j-1}) - \omega_k^{j-1} \right) \right] + \Delta s^2 E_k^{j-1} \\
&= e_k^{j-1} (1 - \Delta s (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^{j-1})) + \Delta s \left((\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k(s_{j-1})) - (\operatorname{div} \mathbf{a})(x_k^{j-1}) \right) \omega_k(s_{j-1}) \\
&\quad + \Delta s^2 E_k^{j-1}.
\end{aligned}$$

Therefore, by Lemma 3.2

$$\begin{aligned}
|e_k^j| &\leq |e_k^{j-1}| \left(1 + \Delta s \|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} \right) \\
&\quad + \left(C_\Phi(t, T) C_1(t, T) \|\mathbf{a}\|_{W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell)} + C_2(t, T) \right) \Delta s^3 \varepsilon^{d-1}.
\end{aligned}$$

Consequently, by induction for $0 \leq j \leq n_T$ and since $e_k^0 = 0$ we obtain:

$$|e_k^j| \leq \left(C_\Phi(t, T) C_1(t, T) \|\mathbf{a}\|_{W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell)} + C_2(t, T) \right) \Delta s^2 \varepsilon^{d-1} \frac{e^{\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} T} - 1}{\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)}}.$$

We proceed similarly for $n_t \leq j \leq 0$ and we obtain the estimate on e_k^j , $n_t \leq j \leq n_T$ by setting

$$C_\omega(t, T) = \left(C_\Phi(t, T) C_1(t, T) \|\mathbf{a}\|_{W^{2,\infty}(\tilde{U}_\ell)} + C_2(t, T) \right) \frac{e^{\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)}(T-t)} - 1}{\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)}}$$

Then, we compute an error estimate $l_k^j := \rho_k(s_j) - \rho_k^j$, for $n_t \leq j \leq n_T$. By using Eq. (3.14a) and a Taylor's expansion, we find:

$$\begin{aligned}
\rho_k(s_j) &= \rho_k(s_{j-1}) - \Delta s a_0(x_k(s_{j-1}))\rho_k(s_{j-1}) + \Delta s \omega(x_k(s_{j-1}))S(x_k(s_{j-1})) \\
&\quad + \Delta s^2 \int_0^1 (1-t)\rho_k''(s_{j-1} + t\Delta s) dt. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

By Lemma 3.2,

$$\left| \int_0^1 \rho_k''(s_{j-1} + t\Delta s) dt \right| := L_k^{j-1} \leq \sup_{s \in [t, T]} |\rho_k''(s)| \leq C_3^2(t, T) \Delta s \varepsilon^{d-1}.$$

Then, combining Eq. (3.20c) and (3.28) we have:

$$\begin{aligned}
|l_k^j| &\leq \left| l_k^{j-1} - \Delta s \left(a_0(x_k(s_{j-1}))\rho_k(s_{j-1}) - a_0(x_k^{j-1})\rho_k^{j-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \Delta s \left(S(x_k(s_{j-1}))\omega_k(s_{j-1}) - S(x_k^{j-1})\omega_k^{j-1} \right) \right| + \Delta s^2 L_k^{j-1} \\
&\leq |l_k^{j-1}| \left(1 + \Delta s \|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \right) + \Delta s^2 C_\Phi(t, T) \|\nabla a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} |\rho_k(s_{j-1})| + \Delta s^2 C_\Phi(t, T) \\
&\quad |\omega_k(s_{j-1})| \|\nabla S\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} + \Delta s |\omega_k(s_{j-1}) - \omega_k^{j-1}| \|S\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} + C_3^2(t, T) \Delta s^3 \varepsilon^{d-1} \\
&\leq \left(1 + \Delta s \|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \right) |l_k^{j-1}| + \left(C_\Phi(t, T) \|a_0\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} C_3^0(t, T) \right. \\
&\quad \left. + \|S\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} (C_\Phi(t, T) C_1(t, T) + C_\omega(t, T)) + C_3^2(t, T) \right) \Delta s^3 \varepsilon^{d-1}.
\end{aligned}$$

Consequently, by the same computations as above, and assuming $l_k^0 = 0$, one obtains $|l_k^j| \leq C_\rho(t, T) \Delta s^2 \varepsilon^{d-1}$, with

$$C_\rho(t, T) = \left(\|a_0\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} C_\Phi(t, T) C_3^0(t, T) + \|S\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} \right. \\ \left. \times (C_\Phi(t, T) C_1(t, T) + C_\omega(t, T)) + C_3^2(t, T) \right) \frac{e^{\|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}(T-t)} - 1}{\|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}}. \quad (3.29)$$

Finally, we estimate ω_k^j and ρ_k^j : it is a straightforward computation to show that

$$|\omega_k^{j+1}| \leq \left(1 + \Delta s \|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)} \right) |\omega_k^j|.$$

As a result, one obtains:

$$|\omega_k^j| \leq \exp\left((T-t)\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)}\right) \omega_k^0 \leq \exp\left((T-t)\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\tilde{U}_\ell)}\right) \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \Delta s \varepsilon^{d-1} \\ := C_\omega^0(t, T) \Delta s \varepsilon^{d-1}.$$

We finish the proof with an estimate on ρ_k^j : one has

$$\rho_k^{j+1} \leq (1 + \Delta s \|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}) \rho_k^j + \|S\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} C_\omega^0(t, T) \Delta s^2 \varepsilon^{d-1}.$$

By induction, one obtains $\rho_k^j \leq C_\rho^0(t, T) \Delta s \varepsilon^{d-1}$ with

$$C_\rho^0(t, T) = \|S\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} C_\omega(t, T) \frac{e^{\|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}(T-t)-1}}{\|a_0\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}}. \quad (3.30)$$

□

3.4 The main theorem

In this section, we prove the convergence of our numerical scheme.

Theorem 3.2. *Let $d \in \mathbb{N}$ such that $d \geq 2$. Suppose that the following conditions are satisfied:*

1. $\mathbf{a} \in C^{d+1}(\tilde{U}_\ell)$, $g \in C^d(\tilde{U}_\ell)$, $a_0, S \in C^d(\tilde{U}_\ell)$ and $\zeta \in C^d(\mathbb{R})$,
2. Assumption 3.1 is verified,
3. $0 < h \leq \delta$ where δ is defined in Assumption 2.1 and $\Delta s, \varepsilon > 0$,
4. There exists a constant $A > 0$ such that $\Delta s < A\varepsilon$.
5. There exists a constant $B > 0$ such that $\varepsilon < Bh$.
6. $\nabla(\Phi^{-1}) \in L^\infty(\tilde{U}_\ell)$.

Then, for all compact set $X \in \mathbb{R}_+^d$, there exist $t_X < 0 < T_X$ and $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}, r > 0$, such that $\cup_{x \in X} \bar{B}_d(x, \delta) \subset \Phi((t_X, T_X) \times \bar{B}_{d-1}(\xi, r))$. Moreover, there exists constants $C_X^{(0)}, \dots, C_X^{(3)} > 0$ which do not depend on $h, \varepsilon, \Delta s$ such that, if $C_X^{(0)} \Delta s \leq h$, the approximation $\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}$ defined by Eq. (3.21) verifies:

$$\sup_{x \in X} |u(x) - \tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x)| \leq C_X^{(1)} h^2 + C_X^{(2)} \frac{\varepsilon^d}{h^d} + C_X^{(3)} \frac{\Delta s}{h}. \quad (3.31)$$

Remark 3.3. *The first term of the estimate (3.31) is an interpolation error, coming from the convolution of u with the kernel ζ^h . The second term is the quadrature error, caused by the discretization of the integral in the variables ξ and s . The last term is the discretization error in time, coming from the time discretization in the variable s of the ordinary differential equations on ρ_k and x_k .*

The first assumption of the theorem implies that the flow $\Phi \in C^d(\Omega_\ell)$ and that the solution $u \in C^d(\tilde{U}_\ell)$. Let us first prove that $\bar{B}_d(x, \delta) \subset \Phi([t_x, T_x] \times \bar{B}_{d-1}(\xi, \gamma))$ for some suitable $t_x < 0 < T_x$ and $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\gamma > 0$.

Lemma 3.4. *Let $x \in \mathbb{R}_+^d$, and suppose that $U_\delta = (-\delta, \infty) \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \Phi(\Omega_\ell)$. Then there exists $-\ell < t_x < T_x$, and $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\gamma > 0$ such that*

$$\bar{B}_d(x, \delta) \subset \Phi([t_x, T_x] \times \bar{B}_{d-1}(\xi, \gamma)),$$

(see Fig. 3.1 for an illustration).

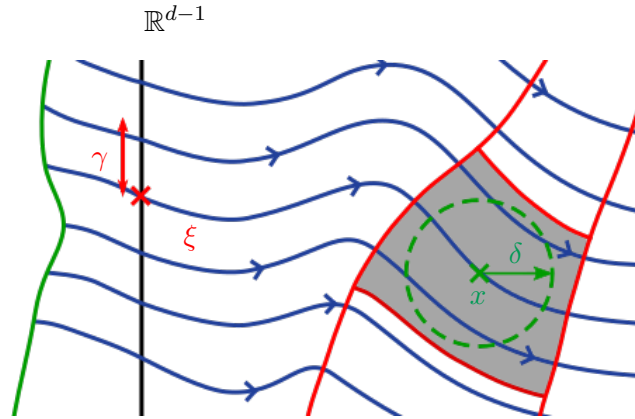


Figure 3.1 – Illustration of Lemma 3.4. The set $\bar{B}_d(x, \delta)$ is represented by the green circle. The set $\Phi([t_x, T_x] \times \bar{B}_{d-1}(\xi, r))$ is in grey.

Proof. The set $\bar{B}_d(x, \delta)$ is a compact subset of \mathbb{R}^d included in $\tilde{U}_\ell = \Phi(\Omega_\ell)$, and $\Phi : \Omega_\ell \rightarrow \tilde{U}_\ell$ is continuous. Thus $\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta))$ is a compact subset of \mathbb{R}^d included in Ω_ℓ . As a consequence there exists $-\ell < t_x < T_x$, and $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\gamma > 0$ such that:

$$\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta)) \subset [t_x, T_x] \times \bar{B}_{d-1}(\xi, \gamma).$$

Since Φ is bijective, this shows the result. \square

Let us now start the proof of convergence.

Proof. Let $x \in \mathbb{R}_+^d$. We first split the difference $u(x) - \tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x)$ into four terms:

$$\begin{aligned} u(x) - \tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x) &= u(x) - (u * \zeta^h)(x) \\ &\quad + (u * \zeta^h)(x) - \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \rho_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)) \\ &\quad + \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} (\rho_k(s_j) - \rho_k^j) \zeta^h(x - x_k(s_j)) \\ &\quad + \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \rho_k^j (\zeta^h(x - x_k(s_j)) - \zeta^h(x - x_k^j)) \\ &:= I_h(x) + Q_{h, \varepsilon, \Delta s}(x) + F_{h, \Delta s}^\rho + F_{h, \Delta s}^\zeta(x). \end{aligned}$$

As explained in Remark 3.3, I_h is the interpolation error, $Q_{h, \varepsilon, \Delta s}(x)$ is the quadrature error, $F_{h, \Delta s}^\rho$ and $F_{h, \Delta s}^\zeta$ are discretization errors of the EDO's.

We first consider the interpolation error $I_h(x)$. By applying Lemma 3.1, one has

$$|I_h(x)| = |u(x) - u * \zeta^h(x)| \leq C(x, \delta) h^2.$$

So we get the first error term with $C_X^{(1)} = \max_{x \in X} C(x, \delta)$ which is finite thanks to (3.10).

Next, we focus on the quadrature error $Q_{h, \varepsilon, \Delta s}(x)$. By using (3.8) and the change of variables $s = \frac{\Delta s}{\varepsilon} t$ we get:

$$\begin{aligned} (u * \zeta^h)(x) &= \int_{-\ell}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\Phi(s, \xi)) (\det J_\Phi)(s, \xi) \zeta^h(x - \Phi(s, \xi)) d\xi ds \\ &= \frac{\Delta s}{\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{\Delta s} \ell}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u\left(\Phi\left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} t, \xi\right)\right) (\det J_\Phi)\left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} t, \xi\right) \zeta^h\left(x - \Phi\left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} t, \xi\right)\right) d\xi dt. \end{aligned}$$

The term $Q_{h, \varepsilon, \Delta s}(x)$ is the error caused by the approximation of this integral in time by

$$\sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \rho_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)).$$

We apply Theorem 3.1 to the function

$$(t, \xi) \mapsto f(t, \xi) := \frac{\Delta s}{\varepsilon} u\left(\Phi\left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} t, \xi\right)\right) (\det J_\Phi)\left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} t, \xi\right) \zeta^h\left(x - \Phi\left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} t, \xi\right)\right),$$

with a mesh of size ε . This function is $C^d(\Omega_\ell)$ (\mathbf{a} is $C^{d+1}(U)$), thus $\Phi \in C^{d+1}(\Omega_\ell)$ and $\det J_\Phi \in C^d(\Omega_\ell)$, consequently, we have:

$$|Q_{h, \varepsilon, \Delta s}(x)| \leq C(d) \varepsilon^d \|f\|_{W^{d,1}(\Omega_\ell)}.$$

We introduce $g(t, \xi) = (\frac{\Delta s}{\varepsilon}t, \xi)$, and $K_x := g^{-1}(\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta)))$. For $\alpha \in \mathbb{N}^d$ we introduce the differential

$$D_{t, \xi}^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{d-1}} \right)^{\alpha_d}.$$

As $\text{supp}(f) \subset K_x$, and by the change of variables $s = \frac{\Delta s}{\varepsilon}dt$ we get

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{d,1}(\Omega_\ell)} &= \|f\|_{W^{d,1}(K_x)} = \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=p}} \int_{K_x} |D_{t, \xi}^\alpha f(t, \xi)| d\xi dt \\ &= \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=p}} \int_{\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta))} \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} \right)^{\alpha_1} \left| D_{s, \xi}^\alpha \left(u(\Phi(s, \xi)) (\det J_\Phi)(s, \xi) \zeta^h(x - \Phi(s, \xi)) \right) \right| d\xi ds \\ &\leq \| \det J_\Phi \|_{W^{d, \infty}(\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta)))} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=p}} \int_{\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta))} \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} \right)^{\alpha_1} \left| D_{t, \xi}^\alpha \left(u(\Phi(s, \xi)) \zeta^h(x - \Phi(s, \xi)) \right) \right| d\xi ds. \end{aligned}$$

Then, by performing the change of variable associated to Φ^{-1} , one obtains:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=p}} \int_{\Phi^{-1}(\bar{B}_d(x, \delta))} \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} \right)^{\alpha_1} \left| D_{t, \xi}^\alpha \left(u(\Phi(s, \xi)) \zeta^h(x - \Phi(s, \xi)) \right) \right| d\xi ds \\ &\leq \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=p}} \left(\frac{\Delta s}{\varepsilon} \right)^{\alpha_1} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d; \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \int_{\bar{B}_d(x, \delta)} \left| D_y^\beta \left(u(y) \zeta^h(x - y) \right) \right| \\ &\quad \times P_{\alpha\beta} \left(|D\Phi|, \dots, |D^{|\alpha|}\Phi| \right) (\Phi^{-1}(y)) |\det J_\Phi^{-1}(y)| dy \end{aligned} \tag{3.32}$$

where $P_{\alpha\beta}$ are polynomials with positive coefficients, and $D^k\Phi(y)$ is a vector containing all the partial derivatives $D^\alpha\Phi(y)$ with $|\alpha| = k$. Then, by rearranging the terms and as using the fourth condition in Theorem 3.2, we get:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\leq \| \det J_\Phi^{-1} \|_{L^\infty(\bar{B}_d(x, \delta))} \sum_{p=0}^d \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta|=p}} \int_{\bar{B}_d(x, \delta)} \left| D_y^\beta \left(u(y) \zeta^h(x - y) \right) \right| \\ &\quad \times \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leq |\alpha| \leq p}} A^{\alpha_1} P_{\alpha\beta} \left(|D\Phi|, \dots, |D^{|\alpha|}\Phi| \right) (\Phi^{-1}(y)) dy \\ &\leq \| \det J_\Phi^{-1} \|_{L^\infty(\bar{B}_d(x, \delta))} C \left(\| \Phi \|_{W^{d, \infty}(\tilde{U}_\ell)} \right) \| u \|_{W^{d, \infty}(\bar{B}_d(x, \delta))} \| \zeta^h \|_{W^{d,1}(\bar{B}_d(x, \delta))}, \end{aligned}$$

where C is a bounded function on any compact set of $[0, +\infty)$. By definition of ζ^h , for $p \in \mathbb{N}$ we have:

$$\|(\zeta^h)^{(p)}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \frac{\text{meas}(\mathbb{S}^{d-1}) \|\zeta^{(p)}\|_{L^1([0, +\infty), t^{d-1}dt)}}{h^p} := \frac{C_p}{h^p}.$$

With the third condition in Theorem 3.2, we get $1/h^p \leq \delta^{d-p}/h^d$. This leads to

$$|Q_{h,\varepsilon,\Delta s}(x)| \leq C_x \frac{\varepsilon^d}{h^d}, \quad (3.33)$$

where C_x is a constant independent of ε , Δs , h . So, we get the second error term with $C_X^{(2)} = \max_{x \in X} C_x$, which is finite thanks to the first condition in Theorem 3.2.

Finally, we focus on the error terms $F_{h,\Delta s}^\rho(x)$ and $F_{h,\Delta s}^\zeta(x)$. By Lemma 3.4, there exists $n_x < N_x \in \mathbb{N}$ and $\xi_x \in \mathbb{R}^d$, $\gamma_x > 0$ such that

$$\overline{B}_d(x, \delta) \subset \Phi([n_x \Delta s, N_x \Delta s] \times \overline{B}_{d-1}(\xi_x, \gamma_x)).$$

We note $t_x = n_x \Delta s$ and $T_x = N_x \Delta s$. Using Lemma 3.3, we have for $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $n_x \leq j \leq N_x$:

$$|\rho_k(s_j) - \rho_k^j| \leq C_\rho(t_x, T_x) \Delta s^2 \varepsilon^{d-1}.$$

Moreover, by Lemma 3.2 (applied to $\tilde{\omega}_k = \Delta s \omega_k$ that we now denote by ω_k), $\omega_k(s_j) \geq C_0(t_x, T_x) \Delta s \varepsilon^{d-1}$. Consequently,

$$\begin{aligned} |F_{h,\Delta s}^\rho(x)| &= \left| \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \frac{\rho_k(s_j) - \rho_k^j}{\omega_k(s_j)} \omega_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)) \right| \\ &\leq \frac{C_\rho(t_x, T_x)}{C_0(t_x, T_x)} \Delta s \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \omega_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Now, we can write:

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \omega_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)) &= \int_U \zeta^h(x - y) dy \\ &+ \left| \int_U \zeta^h(x - y) dy - \sum_{j=n_\ell}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{d-1}} \omega_k(s_j) \zeta^h(x - x_k(s_j)) \right| \\ &\leq 1 + C(d) \|\zeta\|_{W^{d,1}([0, +\infty), t^{d-1}dt)} \frac{\varepsilon^d}{h^d} \leq 1 + C(d) B^d \|\zeta\|_{W^{d,1}([0, +\infty), t^{d-1}dt)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

The first inequality is obtained by applying the same strategy as for the estimation of Q above, namely using Theorem 3.1. The second inequality follows from the fifth condition in Theorem 3.2. By combining estimates (3.34) and (3.35), one obtains:

$$|F_{h,\Delta s}^\rho(x)| \leq C_x \Delta s \leq C_x \delta \frac{\Delta s}{h},$$

for some constant C_x independent of $\Delta s, \varepsilon$ and h . The second inequality is obtained by using $h \leq \delta$. Next, we define $C_X^{(3,1)} = \max_{x \in X} \delta C_x$ which is finite thanks to the expressions (3.18) and (3.29) of $C_0(t_x, T_x)$ and $C_\rho(t_x, T_x)$. We deduce that

$$\sup_{x \in X} |F_{h, \Delta s}^\rho(x)| \leq C_X^{(3,1)} \frac{\Delta s}{h}. \quad (3.36)$$

Next, we compute the estimate of $F_{h, \Delta s}^\zeta(x)$. For all $n_x \leq j \leq N_x$, using Lemma 3.3, we have:

$$|x_k(s_j) - x_k^j| \leq C_\Phi(t_x, T_x) \Delta s.$$

Then, one finds:

$$\begin{aligned} \left| \zeta^h(x - x_k(s_j)) - \zeta^h(x - x_k^j) \right| &\leq \frac{|x_k(s_j) - x_k^j|}{h^{d+1}} \sup_{y \in [0,1]} |\zeta'(y)| \\ &\leq C_\Phi(t_x, T_x) \|\zeta'\|_{L^\infty([0,1])} \frac{\Delta s}{h^{d+1}} := C_\zeta(x) \frac{\Delta s}{h^{d+1}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

We use Lemma 3.3 to bound ρ_k^j and we find:

$$\begin{aligned} \left| F_{h, \Delta s}^\zeta(x) \right| &= \left| \sum_{(k,j) \in E_h(x)} \rho_k^j \left(\zeta^h(x - x_k(s_j)) - \zeta^h(x - x_k^j) \right) \right| \\ &\leq C_\zeta(x) C_\rho^0(t_x, T_x) \frac{\Delta s^2}{h^{d+1}} \varepsilon^{d-1} |E_h(x)|, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$(3.39)$$

where, since the support of $y \mapsto \zeta^h(x - y)$ is located in $\overline{B}_d(x, h)$, $E_h(x)$ is the set of pairs (k, j) such that the particles $x_k(s_j)$ or the points x_k^j belong to $\overline{B}_d(x, h)$:

$$E_h(x) = \left\{ (k, j) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \{n_\ell, \dots, +\infty\}; x_k(s_j) \text{ or } x_k^j \in \overline{B}_d(x, h) \right\},$$

and $|E_h(x)|$ denotes the cardinal of $E_h(x)$. To compute the cardinal of $E_h(x)$, first we introduce the set $E_{2h}^1(x)$, consisting of pairs (k, j) such that $x_k(s_j)$ belongs to the larger set $\overline{B}_d(x, 2h)$:

$$E_{2h}^1(x) = \left\{ (k, j) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \{n_\ell, \dots, +\infty\}; x_k(s_j) \in \overline{B}_d(x, 2h) \right\}.$$

Let us show that

$$\Phi^{-1}(\overline{B}_d(x, 2h)) \subset \overline{B}_d\left((\sigma, \xi), 2h \|(\nabla \Phi)^{-1}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}\right).$$

We denote by $(\sigma, \xi) := \Phi^{-1}(x)$, and let $(\sigma', \xi') \in \Phi^{-1}(\overline{B}_d(x, 2h))$. Then, by the sixth condition of Theorem 3.2, we can write:

$$\begin{aligned} |(\sigma', \xi') - (\sigma, \xi)| &= |\Phi^{-1}(\Phi(\sigma', \xi')) - \Phi^{-1}(x)| \\ &\leq |\Phi(\sigma', \xi') - x| \|(\nabla \Phi)^{-1}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)} \leq 2h \|(\nabla \Phi)^{-1}\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}, \end{aligned}$$

because $\Phi(\sigma', \xi') \in \bar{B}_d(x, 2h)$. Now, we define by $F_{2h}(x) \supset E_{2h}^1(x)$ the set:

$$F_{2h}(x) = \left\{ (k, j) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \{-n_\ell, \dots, +\infty\}; (s_j, \xi_k) \in \bar{B}_d\left((\sigma, \xi), 2h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}\right) \right\},$$

with ξ_k being such that $\Phi(s_j, \xi_k) = x_k(s_j)$. We have:

$$F_{2h}(x) \subset G_{2h}(x) := \left[\left\lfloor \frac{\sigma - 2h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}}{\Delta s} \right\rfloor, \left\lceil \frac{\sigma + 2h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}}{\Delta s} \right\rceil \right] \\ \times \prod_{1 \leq i \leq d-1} \left[\left\lfloor \frac{\xi_i - 2h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}}{\varepsilon} \right\rfloor, \left\lceil \frac{\xi_i + 2h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}}{\varepsilon} \right\rceil \right],$$

where $\lfloor \cdot \rfloor$ is the floor function and $\lceil \cdot \rceil$ is the ceiling function, i.e. $n = \lceil t \rceil \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ and $n < t \leq n + 1$. By the fourth and fifth conditions of Theorem 3.2 we have

$$|G_{2h}(x)| \leq \left(\frac{4h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}}{\varepsilon} + 2 \right)^{d-1} \left(\frac{4h\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1}}{\Delta s} + 2 \right) \\ \leq \left(4\|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\tilde{U}_\ell)}^{-1} + 2B \max(A, 1) \right)^d \frac{h^d}{\Delta s \varepsilon^{d-1}} = C(x) \frac{h^d}{\Delta s \varepsilon^{d-1}}.$$

As a consequence:

$$|E_{2h}^1(x)| \leq |F_{2h}(x)| \leq |G_{2h}(x)| \leq C(x) \frac{h^d}{\Delta s \varepsilon^{d-1}}. \quad (3.40)$$

Now, let $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $n_x \leq j \leq N_x$. We have:

$$|x_k^j - x| \geq |x_k(s_j) - x| - |x_k^j - x_k(s_j)| \geq |x_k(s_j) - x| - C_\Phi(t_x, T_x)\Delta s.$$

Now, suppose that $C_\Phi(t_x, T_x)\Delta s \leq h$. Then, if $x_k(s_j) \notin \bar{B}_d(x, 2h)$, we have $x_k^j \notin \bar{B}_d(x, h)$. Indeed:

$$|x_k^j - x| \geq 2h - C_x(t_x, T_x)\Delta s \geq h.$$

As a result, $E_h(x) \subset E_{2h}^1(x)$. Thus we apply Eq. (3.40) and deduce that

$$|E_h(x)| \leq C(x) \frac{h^d}{\Delta s \varepsilon^{d-1}}.$$

We define $C_X^{(0)} = \max_{x \in X} C_\Phi(t_x, T_x)$ and $C_X^{(3,2)} = \max_{x \in X} C(d)C_\zeta(x)C_\rho^0(t_x, T_x)$. These maxima are finite thanks to (3.26), (3.37), (3.30). Then, if $C_X^{(0)}\Delta s \leq h$, using (3.39) we have

$$\sup_{x \in X} |F_{h, \Delta s}^\zeta(x)| \leq C_X^{(3,2)} \frac{\Delta s}{h}. \quad (3.41)$$

By combining (3.36) and (3.41), and letting $C_X^{(3)} = C_X^{(3,1)} + C_X^{(3,2)}$, we obtain

$$\sup_{x \in X} |F_{h, \Delta s}^\rho(x)| + \sup_{x \in X} |F_{h, \Delta s}^\zeta(x)| \leq C_X^{(3)} \frac{\Delta s}{h},$$

which leads to the last error term in Theorem 3.2 and ends the proof. \square

3.5 Discussions about the method

Extension to domain with "dry areas" In the case of Proposition 2.2, trajectories cover the entire domain, that means that there are no "dry areas" in the domain. Here, we discuss about the extension of this proposition to more general hypotheses.

Definition 3.1. *A dry area is a connecting component of $\tilde{U}_\ell \setminus \overline{\Phi(\Omega_\ell)}$. That is, it is a sets of points that does not belong to a characteristic curve issued from the boundary $x_1 = 0$. We denote by $D_{\tilde{U}_\ell}$ the union of all the dry areas of \tilde{U}_ℓ , that is:*

$$D_{\tilde{U}_\ell} = \tilde{U}_\ell \setminus \overline{\Phi(\Omega_\ell)}.$$

In the case of dry areas we assume that the source term S of (1.1) vanishes on $D_{\tilde{U}_\ell}$. We then consider the solution, given by:

- Eq. (2.4) in $\text{Int}(\Phi(\Omega_\ell))$,
- $u = 0$ in $D_{\tilde{U}_\ell}$.

It may be discontinuous on $\partial(\Phi(\Omega_\ell)) = \partial(D_{\tilde{U}_\ell})$ and we do not define it on this set. Fig. 3.2 gives an example of such kind of situation. The dashed area is not reached by characteristic curves. It can be seen as a hill, whose top is the red cross. The left pointed edge of the dashed area is a mountain pass, and \mathbf{a} vanishes at this point.

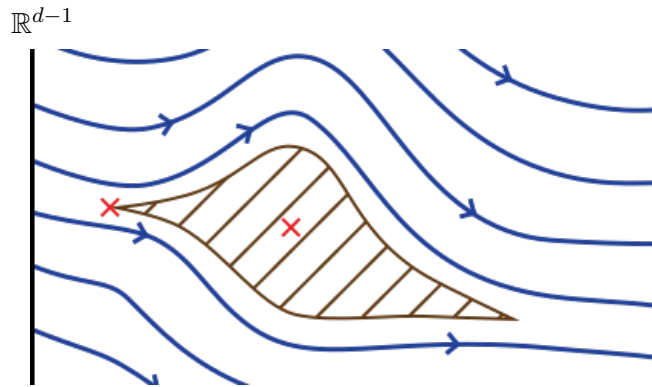


Figure 3.2 – Characteristic curves on the domain $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$. The vector field \mathbf{a} vanishes at points indicated by red crosses.

Note that it is possible to define the solution u when $S \neq 0$ on the unbounded connected component of $D_{\tilde{U}_\ell}$. This require to define a characteristic flow on such connected components. Specifically, S may be non zero on the union of the unbounded characteristics originating from a point of this connected component. This definition of the flow may be delicate and case-by-case dependent. We will defer the investigation of this question to future work.

4 Numerical tests

4.1 Practical implementation of the scheme

We solve the equation on a bounded domain of \mathbb{R}_+^2 , $\Omega := [0, L_x] \times [0, L_y]$. The objective is to observe numerically that the approximation $u_h^{\varepsilon, \Delta s}$ converges to the solution u of Eq. (1.1).

The kernel function ζ We choose the cubic spline kernel, commonly used in the SPH method, as in [54]. For $x \in \mathbb{R}^2$, $h > 0$, this function is given by:

$$\zeta^h(x) = \frac{10}{7\pi h^2} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{if } 0 \leq q \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q^3) & \text{if } 1 \leq q \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.1)$$

where $q = |x|/(4h)$. This kernel function has compact support, is positive and belongs to $C^2(\mathbb{R}^2)$,

Boundary conditions We suppose that Ω is periodic in the transverse direction, that is

$$\forall (x, y) \in \Omega, \forall n \in \mathbb{Z}, (x, y + n L_y) = (x, y).$$

Therefore, this domain has two boundaries:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{0\} \times [0, L_y], \\ \Gamma_2 &:= \{L_x\} \times [0, L_y]. \end{aligned}$$

To initialize the scheme, the particles $(\xi_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ are positioned at the boundary Γ_1 . Then, we compute the positions of particles x_k^j for $-1 \geq j \geq m_k^0$ with System (3.20), where:

$$m_k^0 := \max\{j \leq -1; (x_k^j)_1 < -h\} + 1.$$

That is, we compute the position of particles outside Ω that are located at a distance smaller than h to Γ_1 . Consequently, the domain $[-h, 0] \times [0, L_y]$ contains particles. After that, we compute the position of the particles inside Ω : the particles x_k^j , for $0 \leq j \leq m_k^1$, where

$$m_k^1 := \min\{j \geq 1; (x_k^j)_1 > L_x\} - 1.$$

Finally, we fill the domain $]L_x, L_x + h] \times [0, L_y]$, located to the right of the right boundary Γ_2 . Therefore, let $m_k^2 \geq m_k^1$ be defined by:

$$m_k^2 := \min\{j \geq 1; (x_k^j)_1 > L_x + h\} - 1,$$

and x_k^j the associated particles positions for $m_k^1 < j \leq -k^2$.

Eq (3.19) and System (3.20) enable the computation of u in the domain Ω , and in its extension $[-h, 0[\times [0, L_y]$ and $]L_x, L_x + h] \times [0, L_y]$. We denote by $\tilde{\Omega} := [-h, L_x + h] \times [0, L_y]$. We refer to Fig 4.1 for an illustration of how the particles are positioned.

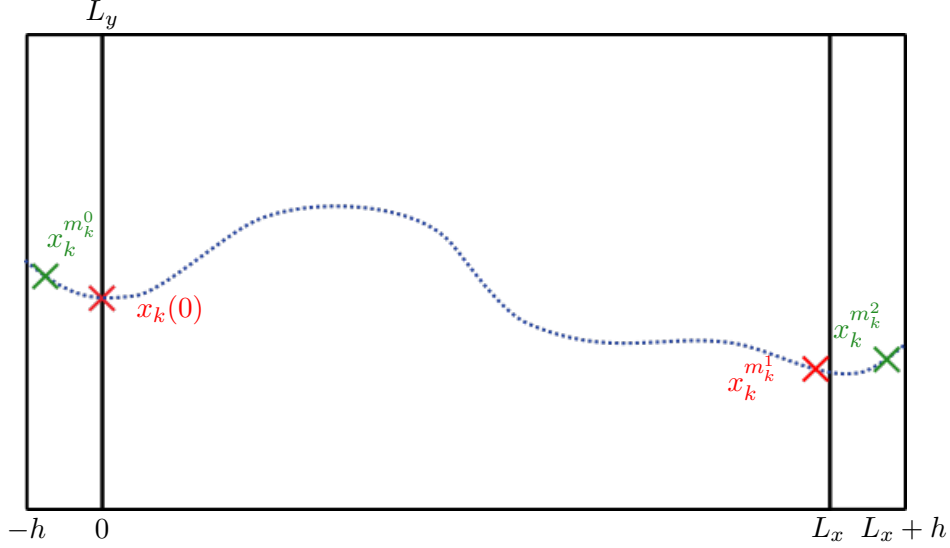


Figure 4.1 – Illustration of the positioning of particles in the scheme. Particles are generated along the time-discretization of the blue dotted curve (a characteristic curve). The red points are the extremal particles inside the domain, and the green one are the extremal particles outside it.

Computation of the weights ω_k For $1 \leq k \leq n$, ω_k^j verifies (3.20b). The function $\text{div } \mathbf{a}$ is not analytically known, so it needs to be approximated numerically. Consequently, we create a rectangular mesh of $\tilde{\Omega}$, and compute the derivatives of \mathbf{a} by a finite difference scheme.

Reduction of the computational cost After the computations of the particle positions and weights, we need to compute the approximate solution $\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}$ on the domain. For $x \in \Omega$, it is given by:

$$\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=m_k^0}^{m_k^2} \rho_k^j \zeta^h(x - x_k^j). \quad (4.2)$$

In this sum, only a few terms are not zero, as the support of ζ^h is much smaller than the domain. Therefore, the basic technique consisting of the computation of every quantity $\zeta^h(x - x_k^j)$ for all values of k and j is time consuming, and can be improved. With this aim, we have used the cell linked-lists method [24]. This method has two steps:

1. First, a grid of size h is created in the domain, together with an array representing this grid. Each particle is positioned in its corresponding cell inside this grid.
2. If $x \in \Omega$, the particles that interact with this point (i.e., corresponding to a non-zero term in the sum (4.2)) are located in the cell containing x and its eight neighbours. Therefore, the sum is computed only on the particles that belongs to these nine cells, using the previous array.

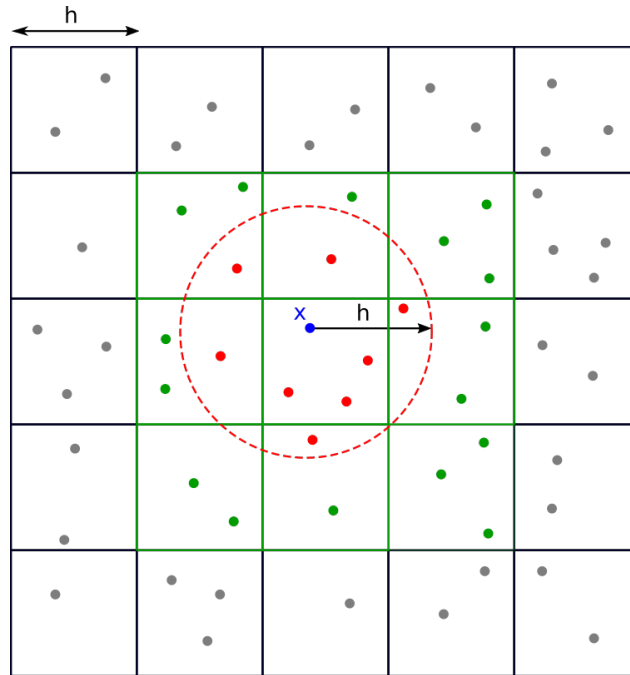


Figure 4.2 – Grid of the linked-list method, of size h . The particles in the nine green neighboring cells of the blue point x are in color. The red particles are located in the support of $y \mapsto \zeta^h(x - y)$ (represented by the red circle), the green particles are inside the green cells but outside this support.

The array that represents the positions of particles in the grid needs to be computed only once. Fig. 4.2 represents the grid and the particles in the domain. The red particles interact with the point x , the green domain is composed of the nine neighboring cells. Green particles add unnecessary computations, but are not too many compared to the total number of particles in the domain.

A direct implementation of (4.2) would require N operation, where N is the number of particles on the domain. Using the cell linked-list method, the computation of the sum requires a number of operations equals to the number of particles in the nine neighboring cells to the point x . This method requires to compute the position of each particle in the grid first, which takes N operations. Consequently, if we need to compute $\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}$ at more than one point, the cell linked-list method is faster.

Computation of the approximate solution When each particle position x_k^j and associate quantity ρ_k^j are known, we compute the approximate solution at points x on a grid, using Eq (4.2). This grid has to be fine enough to provide a good insight into the variations of the approximate solution $\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}$.

4.2 Numerical simulations

In this section, we present some numerical experiments using the particle scheme in the domain Ω . We consider the following linear system:

$$\forall (x, y) \in \tilde{\Omega}, \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{a}u) = r, \\ u(0, y) = u_0(y). \end{cases} \quad (4.3)$$

where we denote $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y)$. For $(x, y) \in \Omega$, it is given by:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x(x, y) = \tan \theta - \partial_x z(x, y), \\ \mathbf{a}_y(x, y) = -\partial_y z(x, y). \end{cases} \quad (4.4)$$

And for $(x, y) \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega$, the vector field \mathbf{a} is given by:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x(x, y) = \tan \theta, \\ \mathbf{a}_y(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

The function $\tan \theta(L_x - x) + z$ represents the surface height. When $z = 0$ this surface is a tilted plane, θ being the angle formed by this plane with the horizontal plane. This system corresponds to a simple equation of water motion, and u represents the water height. A water particle follows the vector field \mathbf{a} , which correspond to the gravity force acting along the bottom surface.

Length of the domain	L_x	1
Width of the domain	L_y	0.25
Angle of the plane	θ	39°
Water height at the boundary	$u_0(y)$	10^{-3}
Source term	$r(x, y)$	Variable
Surface perturbation	$z(x, y)$	Variable

Table 3.1 – Parameters of numerical simulations

In what follows, we solve System (4.3) with the previously described particle method, using various parameters. The modeling parameters are given in Table 3.1, and come from a physicist experiment [36], made on a small tilted plane. The numerical parameters are given in Table 3.2. We consider that Eq. (4.3) is nondimensional, so that these parameters have no physical dimensions. To test the convergence of the scheme, three numerical parameters are varied: h , ε and Δs . The other numerical parameters are deduced from these values. The weights at $x = 0$, denoted by w_0 are the product of the distance between two particles, ε , and the distance traveled by a particle in one time step: $\mathbf{a}(0, y) \Delta s = \tan \theta \Delta s$. This gives the formula

Diameter of the kernel function	h	Variable
Distance between particles at the inbound boundary	ε	Variable
Discretization step for variable s	Δs	Variable
Weight of particles at the boundary	w_0	$\tan \theta \Delta s \varepsilon$

Table 3.2 – Numerical parameters of the scheme.

$$w_0 := \tan \theta \Delta s \varepsilon.$$

We consider characteristic values for h , ε and Δs :

$$h_{car} = \frac{1}{40}, \quad \varepsilon_{car} = h_{car}/10, \quad \Delta s_{car} = \frac{1}{200}.$$

And the values of h , ε and Δs can vary in the following range:

$$\begin{aligned} h_{min} &:= 2^{-4} h_{car} \leq h \leq h_{max} := 2^4 h_{car}, \\ \varepsilon_{min} &:= 2^{-2} \varepsilon_{car} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{max} := 2^3 \varepsilon_{car}, \\ \Delta s_{min} &:= 2^{-5} \Delta s_{car} \leq \Delta s \leq \Delta s_{max} := 2^5 \Delta s_{car}. \end{aligned}$$

These bounds are chosen to ensure that the kernel is smaller than the domain, and that there is an average of more than one particle in a kernel. We present some error curves, depending on parameters. The error is the ℓ^∞ relative error, given by:

$$\text{Error} = \frac{\max_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y} \left(\tilde{u}_h^{\varepsilon, \Delta s}(i \, dx, j \, dy) - u(i \, dx, j \, dy) \right)}{\max_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y} u(i \, dx, j \, dy)}, \quad (4.6)$$

where $dx, dy > 0$ verify $dx N_x = L_x$ and $dy N_y = L_y$.

4.2.1 Simulations without dry areas

Test on a flat surface. First, we test the convergence of the scheme on the simplest framework, when $z = 0$. The upstream water height is constant, of value one and the right hand side $r = 0$. Thus the exact solution is a constant water height, equal to one. The numerical results performed with $h = h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$ and $\Delta s = \Delta s_{car}$ produce a relative error with the exact solution of about 0.14%. As u and \mathbf{a} are constants, there is no convolution error, neither errors in the computation of the ω_k^j and ρ_k^j . The only error comes from the quadrature error and according to Theorem 3.2, we have:

$$\text{Error} \leq \frac{C \varepsilon^2}{h^2}. \quad (4.7)$$

Thus the error grows with ε/h .

In Fig. 4.3a, h varies between h_{min} and h_{max} , and the values of ε and Δs depend on the value of h : $\varepsilon = h/10$ and $\Delta s = 4\varepsilon$. Therefore, the number of particles

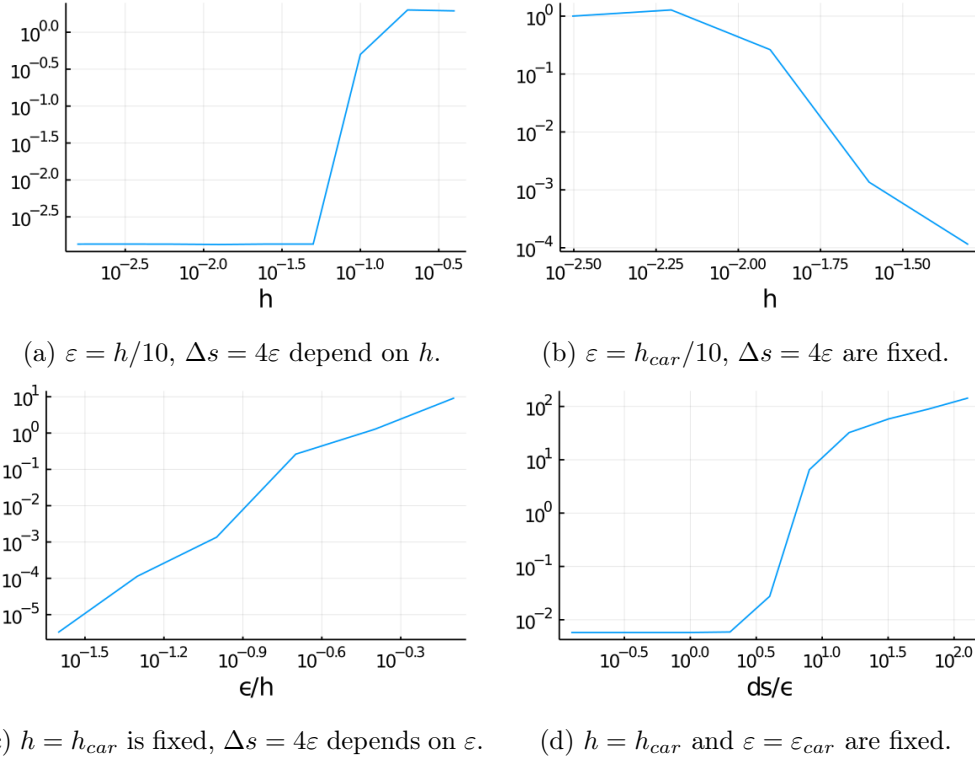


Figure 4.3 – Flat surface test case: graphs of the ℓ^∞ relative errors (4.6) as functions of h , ε and Δs , in log-log scale (using decimal logarithms). $z = 0$, $r = 0$.

in $\overline{B}_d(x, h)$ does not change. The computation times for the different values of h are nearly constant. This is due to the linked-list method which keeps a constant number of computations when the number of particles in $\overline{B}_d(x, h)$ is constant. The only computation which take more operations when h get smaller is the computation of the linked-list grid.

For values of h greater than $1/40$ the error grow with h . Indeed, a more precise formula for (4.7) would be

$$\text{Error} \leq C\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \right), \quad (4.8)$$

(this can be seen by ignoring the simplification made just before (3.33) in the proof of Theorem 3.2). The term $C(1 + 1/h)$ is responsible for this growth. However, this effect only appears when h is large enough (see below). In practice the value of h is small enough and this effect does not appear. Indeed, for values of h smaller than $1/40$ the error is constant, of about $10^{-2.9}$, which is consistent with the error bound (4.7). Therefore, to reduce the error, ε should be taken smaller.

Fig. 4.3b shows the relative error depending on h , when ε and Δs are fixed. In accordance with Eq. (4.7) this error grows when h becomes smaller, because the number of particles in the kernel diminishes with h . Then, Fig. 4.3c shows

the error when $h = h_{car}$ and ε varies with Δs . It shows that the error decreases with decreasing ε and Δs , in accordance with Eq. (4.7). In Fig. 4.3d, $h = h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$ and only Δs varies. The error decreases with Δs , and reaches a minimum of about 10^{-5} , when $\Delta s \leq 2\varepsilon$. This is due to a simplification made in the proof of Theorem 3.2, we used the inequality $\Delta s/\varepsilon \leq A$ in the proof of the quadrature error, after Eq (3.32). Therefore a more precise formula for (4.7) contains terms that grow with $\Delta s/\varepsilon$, which is coherent with Fig. 4.3d. This shows that the spacing between quadrature points along s and along ξ should be roughly equal, which is intuitively clear.

In Fig. 4.3c we observe a minimum relative error on the order of $10^{-5.3}$, but which could be smaller with smaller ε . Taking $h = h_{car}$, $\varepsilon = h/40$ and $\Delta s = 2\varepsilon$, the ℓ^∞ relative error is 7×10^{-7} . Of course, the computation time dramatically increases with such a small value of ε .

Now, we consider a non-zero constant source term r , of value $1/20$. The exact solution can be computed:

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad u(x, y) = u_0 + \frac{r x}{\tan \theta}.$$

The ℓ^∞ relative error when $h = h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$ and $\Delta s = \Delta s_{car}$ is 2.9×10^{-3} .

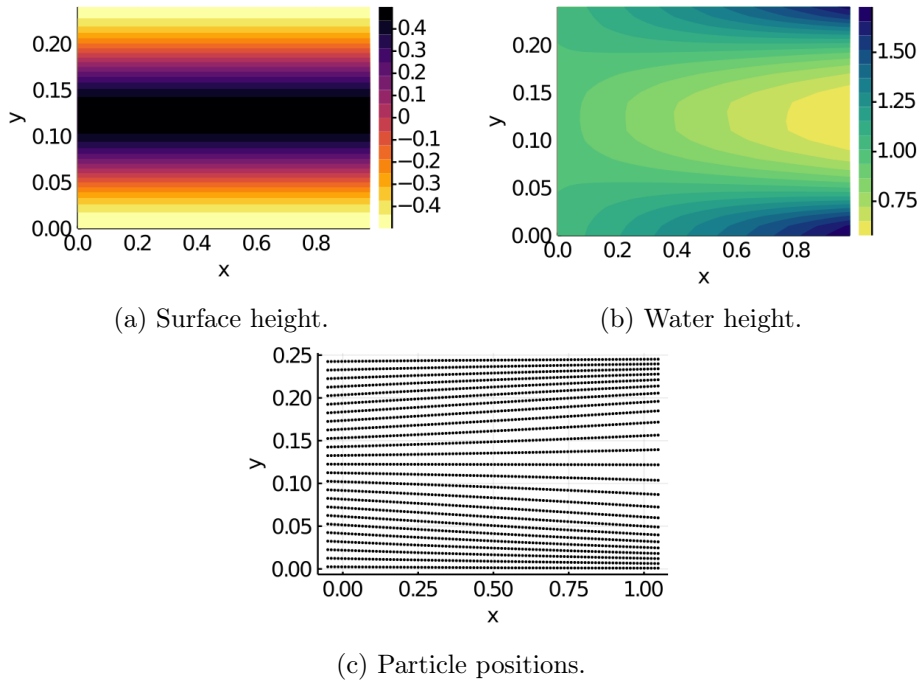
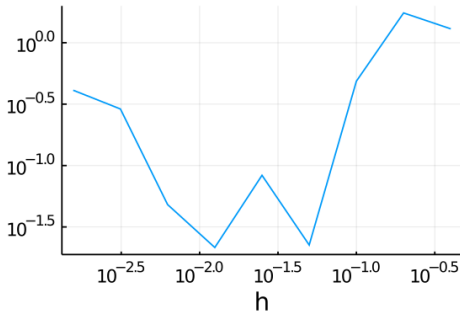


Figure 4.4 – Non-flat surface, first example: surface height (a), water height (b) and particle positions (c) in the domain Ω , with $z = z_1$, $r = 0$ and $h = 4h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$, $\Delta s = 2\Delta s_{car}$.

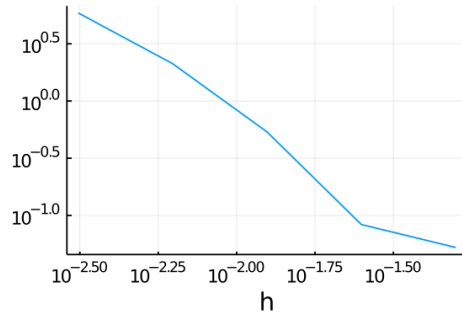
Test on a non-flat surface, first example. We consider the system with a surface varying in y , in the transverse direction:

$$\forall(x, y) \in \Omega, \quad z_1(x, y) = \frac{u_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L_y}\left(y - \frac{L_y}{2}\right)\right).$$

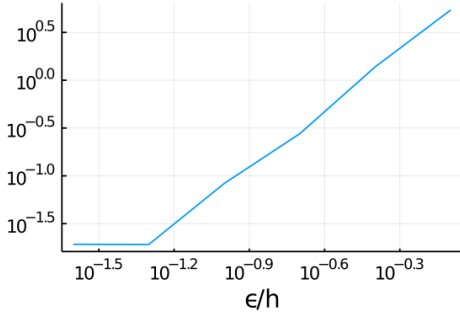
Fig 4.4a shows a heat map of this function. Fig 4.4b presents the water height computed by the particle scheme and particles positions are represented in Fig. 4.4c. We can see that when x increase, particles tend to regroup to the sides $y = 0$ and $y = 0.25$, where the surface height is smaller.



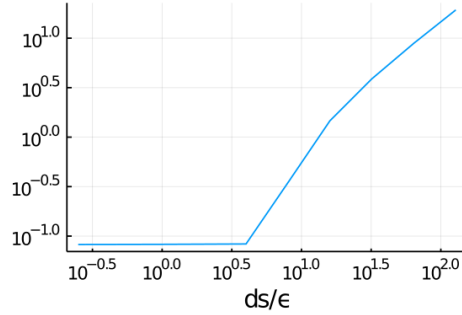
(a) $\varepsilon = h/10$, $\Delta s = 4\varepsilon$ depends on h .



(b) $\varepsilon = h_{car}/10$, $\Delta s = 4\varepsilon$ are fixed.



(c) $h = h_{car}$ is fixed, $\Delta s = 4\varepsilon$ depends on ε .



(d) $h = h_{car}$ and $\varepsilon = \varepsilon_{car}$ are fixed.

Figure 4.5 – Non-flat surface, first example: graphs of the ℓ^∞ relative errors (4.6) as functions of h , ε and Δs , in log-log scale. $z = z_1$, $r = 0$.

Next, we present some error curves. The exact solution of System (4.3) cannot be computed. Therefore we compute a reference solution with a finite volume method as in [6], and a discretisation of 400×100 points. The error is computed using this reference solution. First, in Fig. 4.5a, h varies with ε/h and $\Delta s/h$ is kept constant. For $1/3 \geq h \geq 1/20$, the error decreases with h , due to the first term of the error bound (3.31). To decrease the error, ε or Δs should be taken small compared to h . Then, Fig. 4.5b shows the relative error depending on h , when ε and Δs are fixed. This error grows when h becomes smaller, because of the terms in powers of $1/h$ in Eq. (3.31). Fig. 4.5c shows the error when $h = h_{ref}$ is fixed and ε , Δs vary, and

in Fig. 4.5d only Δs varies. In both Figures, the error decreases when ε and Δs diminish, because of the last two terms of Eq. (3.31).

Test on a non-flat surface, second example. Now, we consider the system with a surface varying in x , in the longitudinal direction:

$$\forall(x, y) \in \Omega, \quad z_2(x, y) = 20u_0 \cos\left(\frac{8\pi}{L_x}x\right). \quad (4.9)$$

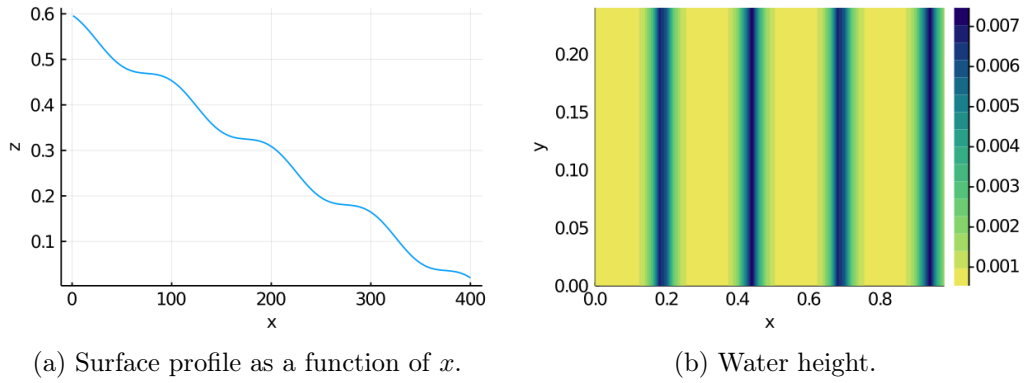


Figure 4.6 – Non-flat surface, second example: surface profile (a) and water height (b). $z = z_2$, $r = 0$ and $h = 4h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$, $\Delta s = 2\Delta s_{car}$

The profile of this surface is represented in Fig. 4.6a. We can see that the function $x \mapsto z_2(x, 0)$ is strictly decreasing. Thus the vector field \mathbf{a} does not vanish. Fig. 4.6b presents the water height computed by the particle scheme. The quantitative behavior of the error curves is similar to the previous example 4.4, but the errors are approximately fifty times bigger. It can be explained by the fact that the minimum of the function $\det J_\Phi$ is quite small, and this term appears in the error estimate (3.31). As a comparison, the relative error is ten times smaller if the function z is divided by two compared with (4.9), when $h = h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$ and $\Delta s = 2\Delta s_{car}$.

4.2.2 Simulations with dry areas and vanishing right-hand side

In this part, we consider a surface with more variations than in previous section, see Fig. 4.7a. For $(x, y) \in \Omega$, let:

$$z_3(x, y) = 2u_0 \cos\left(\frac{4\pi}{L_y}\left(y - \frac{L_y}{2}\right)\right).$$

The solution of System (4.3) present some dry areas, on the highest areas of the surface. Fig. 4.7b presents the water height computed from the particle scheme, and Fig. 4.7c the position of particles on the domain. We observe that they regroup in the lowest parts of the bottom surface, the so-called thalweg in hydrology terms. Between these thalweg there are no particles, which means that the water height vanishes.

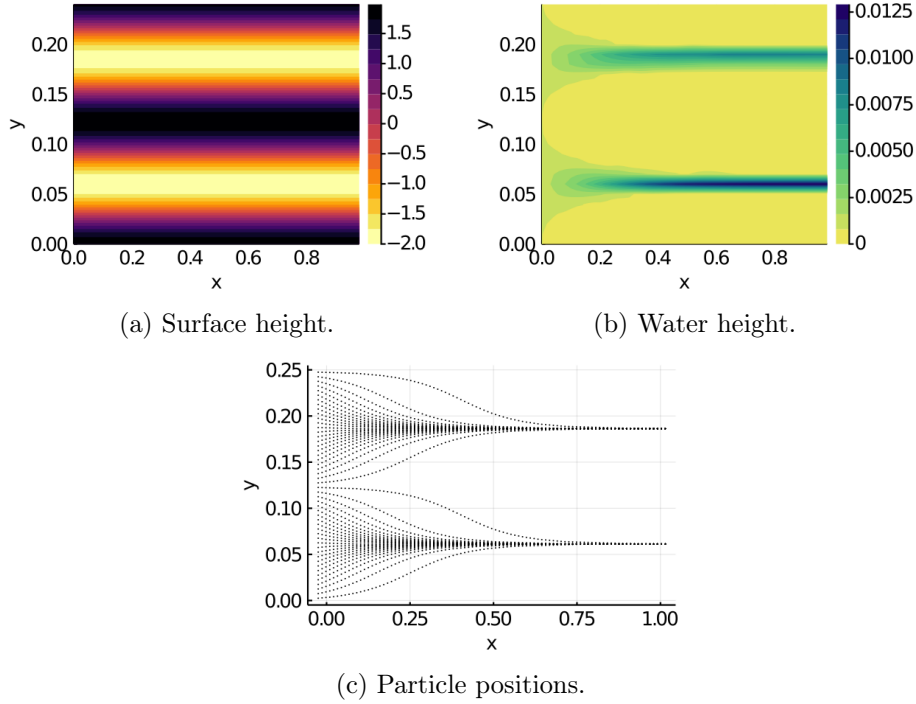


Figure 4.7 – Test case with dry areas: surface height (a), water height (b) and positions of the particles (c). $z = z_3$, $r = 0$ and $h = 4h_{car}$, $\varepsilon = \varepsilon_{car}$, $\Delta s = 2\Delta s_{car}$.

4.3 Application to the landscape evolution model

In this section, we consider a landscape evolution model, in which the water height and sediments concentration are quasi-stationary (i.e. they respond instantaneously to the changes in the bottom topography). We apply the previous particle method to this system. The system is given by: $\forall t \geq 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(hv) = r(t, x), & (4.10a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(chv) = \rho_s e \left(\frac{h(t, x)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(t, x)|}{V} \right)^n - \rho_s s \frac{c(t, x)}{c_{sat}}, & (4.10b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t z = K \Delta z(t, x) - e \left(\frac{h(t, x)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(t, x)|}{V} \right)^n + s \frac{c(t, x)}{c_{sat}}, & (4.10c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(t, x) = V (\tan \theta, 0) - V \nabla (h + z)(t, x). & (4.10d) \end{cases}$$

In this system, h is the water height, c the cross-sectional average of the concentration of sediments in water, and z is bottom surface height. Then r is a function representing the water source term, ρ_s is the volumetric mass density of the sediments, c_{sat} is concentration of saturation for sediments, e is the erosion rate, s is the sedimentation rate, and K is the constant of creep. The constants H and V are characteristic values for water height and water velocity. This model had been studied in [6].

Eq. (4.10c) is discretised in time by an explicit Euler scheme. Denoting by dt the time step of this scheme, we define $t_i := i dt$. Then, due to the expression of water velocity, the left hand sides of Eq. (4.10a) and (4.10b) are non linear. Therefore these equations cannot be solved by the previous particle scheme, at $t \geq 0$ fixed. However, at each time step t_i , the quantities $z_i := z(t_i, \cdot)$ and $v_i := v(t_i, \cdot)$ differ only by a small quantity from those at the previous time step t_{i-1} . Consequently, we can linearise these equations by taking these quantities at the previous time step in the expressions of the water velocity and of the source terms. We consider the following time discretization of (4.10). It leads to a linear system for the unknowns $h_{i+1}, c_{i+1}, z_{i+1}: \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h_{i+1}v_i)(x) = r_{i+1}(x), & (4.11a) \\ \operatorname{div}(c_{i+1}h_{i+1}v_i)(x) = \rho_s e \left(\frac{h_i(x)}{H}\right)^m \left(\frac{|v_i(x)|}{V}\right)^n - \rho_s s \frac{c_i(x)}{c_{sat}}, & (4.11b) \\ z_{i+1}(x) = z_i(x) + dtK\Delta z_i(x) - e dt \left(\frac{h_i(x)}{H}\right)^m \left(\frac{|v_i(x)|}{V}\right)^n + s dt \frac{c_i(x)}{c_{sat}}, & (4.11c) \\ v_i(x) = V(\tan\theta, 0) - V\nabla(h_i + z_i)(x), \end{cases}$$

where $r_i(x) := r(t_i, x)$, $h_i(x) := h(t_i, x)$, and $c_i(x) := c(t_i, x)$. The first two Equations of this system, Eq. (4.11a) and Eq (4.11b) can be solved by the particle method. The scheme is initialized with a constant elevation, that is $h_0(x, y) + z_0(x, y) = h_0$. Therefore, the initial water velocity is constant: $v_0(x, y) = V(\tan\theta, 0)$. The initial concentration c is defined to be constant: $c_0(x, y) = c_0$.

Length of the domain	L_x	40 cm
Width of the domain	L_y	10 cm
Characteristic water speed	V	1 m/s
Exponent of friction over h	m	1, 6
Exponent of friction over v	n	3, 2
Density of the sediments	ρ_s	$2, 17.10^6$ g/m ³
Concentration at saturation	c_{sat}	$3, 17.10^5$ g/m ³
Erosion speed	e	0, 5 mm/hour
Sedimentation speed	s	$e/2000$
Angle of the plane	θ	39°
Water height at the inbound boundary	h_0	0.5 mm
Concentration of sediments at the inbound boundary	c_0	317 g/m ³

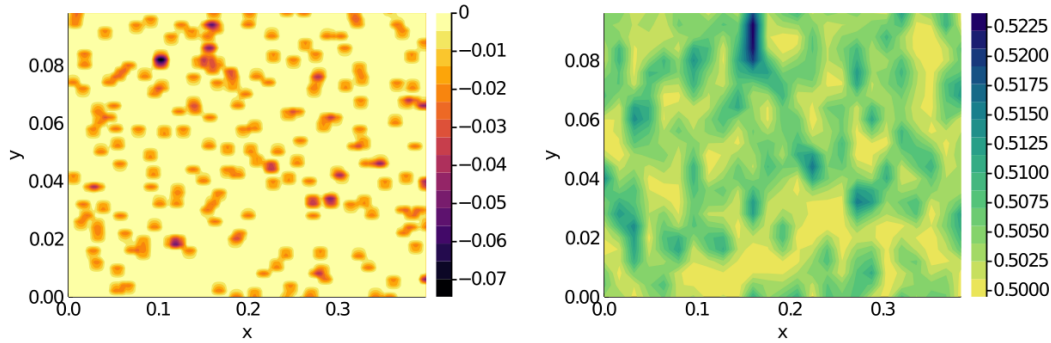
Table 3.3 – Parameters of the model, with corresponding symbol in the second column, and its numerical value in the third one.

Choice of parameters The choice of parameters is the same as in [6], where numerical simulations of System (4.10) have been done with a finite volume method. It is given in Table 3.3. Then, the choice of numerical parameters is given in Table 3.4.

Number of points of the grid in the x direction	N_x	400
Number of points of the grid in the y direction	N_y	100
Time step for the equation on z	dt	4.5s
Kernel diameter	h	$L_y/4$ cm
Distance between particles at the boundary	ε	$h/10$ cm
Discretisation of variable s	Δs	0.02 s

Table 3.4 – Parameters of numerical simulations

The computation of ∇z and Δz is performed with a finite difference discretisation, on a grid of size $N_x \times N_y$.

(a) Initial surface z , in millimeters.

(b) Initial water height, in millimeters.

Figure 4.8 – Heat maps of the initial surface (a) and initial water height (b), in the domain $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Scales are given by the color bar to the right of each picture.

In the simulations, the initial surface is a flat tilted plane with a small random perturbation, in the form of channels dug at random positions. This surface, seen from above is represented in Fig. 4.8. The computation time is about three hours for 1000 time steps, that is a final time of 1.25 hours in the simulation.

Results of simulations The constant of creep K drives the behavior of the system. When K is big enough, the system is stable around the stationary solution of the flat plane, and when it is smaller the system is unstable, and channels can be dug on the surface. The stability analysis of the system have been done in [6]. First, we show results of the simulation of the system, with:

$$K = K_e = \frac{5 \times 10^{-4}}{3600} m^2 s^{-1},$$

which correspond to a stable case.

Fig. 4.9a and 4.9b present the surface height z , after 200 and 800 time steps. We observe that the initial perturbations have been flattened. Indeed, after 800 time steps the amplitude of the variations of the surface height is 0.4% of the initial amplitude. Then, Fig. 4.9c presents the concentration of sediments in water,

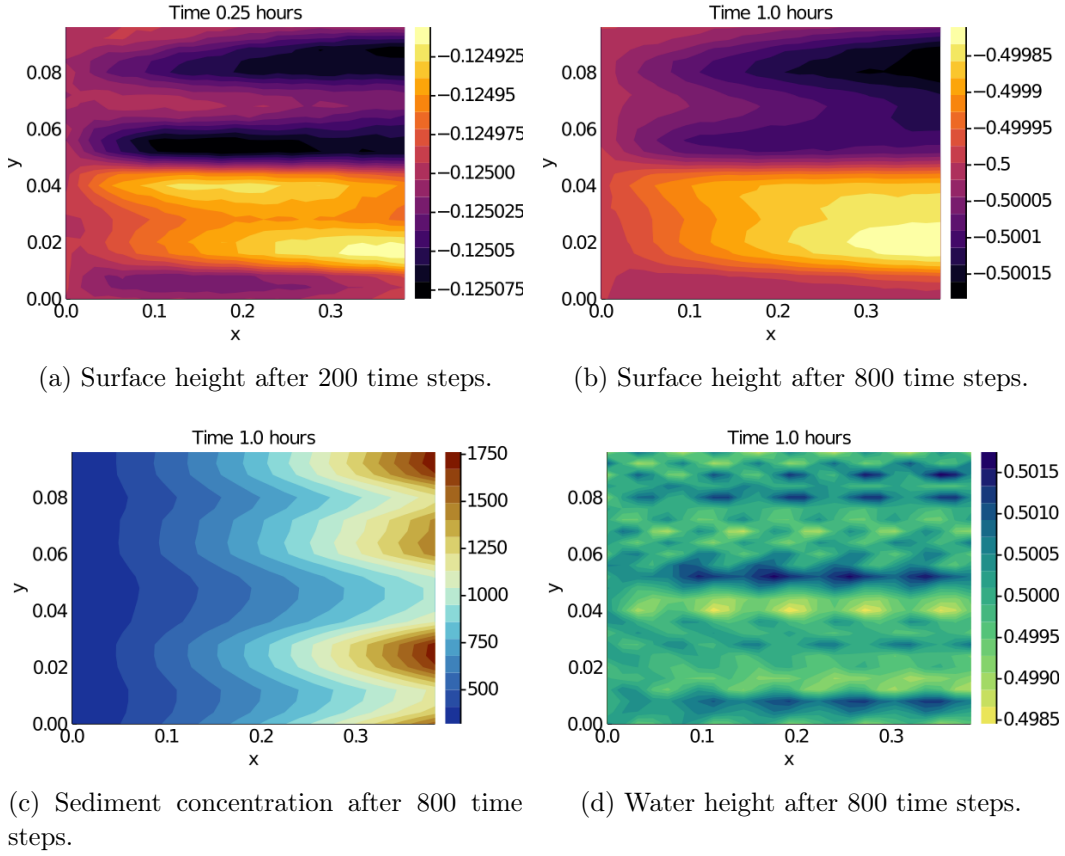
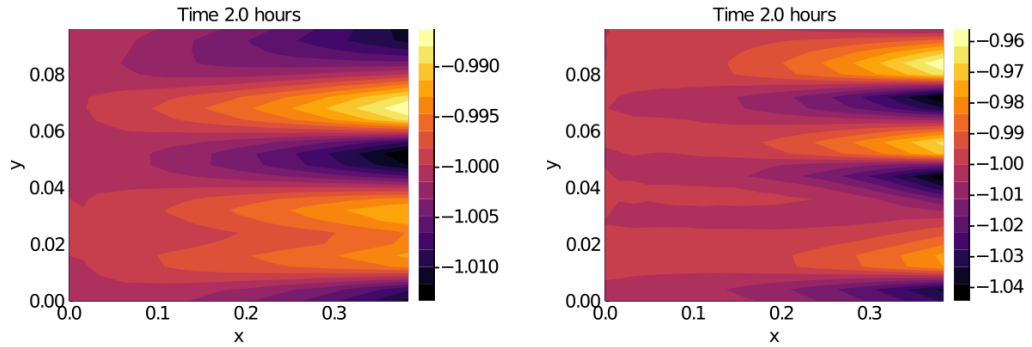


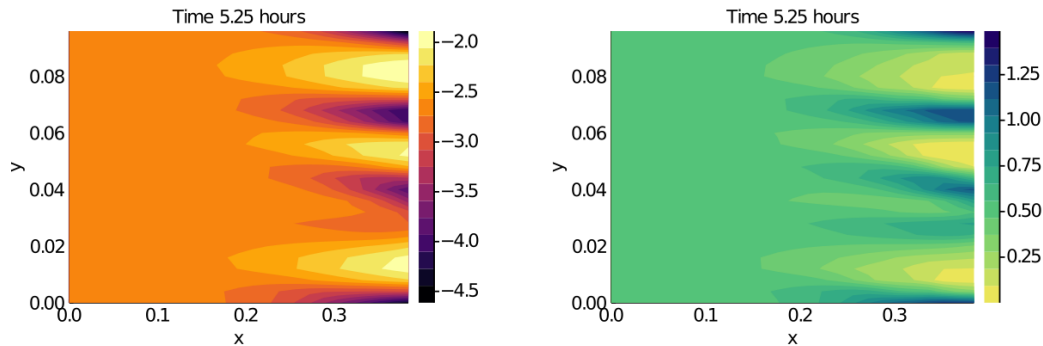
Figure 4.9 – Heat maps of the surface height in millimeters after 200 time steps (a) and 800 time steps (b), sediment concentration in grams per cubic meters (c) and water height in millimeters (d) both after 800 time steps, in the domain $[0, L_x] \times [0, L_y]$, for $K = K_e$. Scales are given by the color bar to the right of each picture.

after 800 time steps. The concentration at the left of the domain is of the order of $c_0 = 317 \text{ g/m}^3$, and increases towards the right, because of erosion. Fig. 4.9d shows the water height after 800 time steps of the scheme. Its value is almost constant, around 0.5mm.

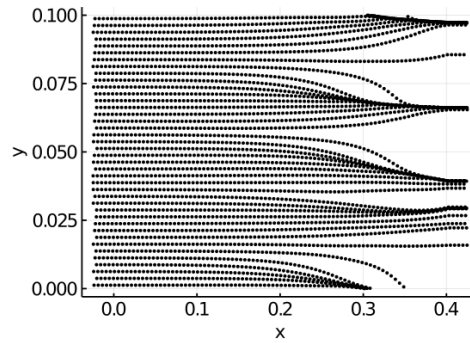
In Fig. 4.10a and 4.10b we present the surface height, when $K = K_e/20$ and $K = K_e/50$. In these cases the system is unstable at some wavelengths, and we expect to observe a transverse instability. We can observe the formation of channels in the soil, in the flow direction. The amplitude of these channels is about 25% of the amplitude of the initial perturbations in the first case, and a bit more than 100% in the second case. Moreover, we observe two channels in the first case, while in the second case there are three narrower channels. Hence, the depth of the channels is bigger when K is smaller and their width is larger for larger values of K , in accordance with the stability results of [6]. After a large enough number of time steps with $K = K_e/50$, channels are deeper and water is concentrated inside these



(a) Surface height for $K = \frac{K_e}{20}$ after 1600 time steps. (b) Surface height for $K = \frac{K_e}{50}$ after 1600 time steps.



(c) Surface height for $K = \frac{K_e}{50}$ after 4200 time steps. (d) Water height for $K = \frac{K_e}{50}$ after 4200 time steps.



(e) Particles positions for $K = \frac{K_e}{50}$ after 4200 time steps.

Figure 4.10 – Heat maps of the surface height in millimeters for $K = K_e/20$ (a) and $K = K_e/50$ (b) both after 1600 time steps, surface height (c) water height (d) both in millimeters for $K = K_e/50$ after 4200 time steps, in the domain $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Scales are given by the color bar to the right of each picture. Particles positions in the domain (e).

channels. Water height vanishes in highest areas, as illustrated in Fig. 4.10d, which presents the water height after 4200 time steps. We observe in Fig. 4.10e that these

areas does not contain particles. Particles gather inside the channels, so we could consider to merge some particles when they are too close, to improve the method. The surface height is represented in Fig. 4.10c, and has variations of 2.5 millimeters, which is 35 times bigger than the amplitude of the initial random perturbations.

In [6], System (1.3) has been solved with a finite volume method. This scheme can only be used with a positive water height. If the water height approaches zero at some points in the domain, some negative values of h can appear in the computed solution. A finite volume scheme that can handle dry areas could be designed, as in [23], but require a more sophisticated method. This particle method is able to cope with the appearance of regions of vanishing water height (these areas simply do not contain any particle). Consequently, this particle method can be used on more general landscapes than the finite volume method of [6], in particular landscapes which may contain valleys and mountains.

5 Conclusion and perspectives

In this chapter we saw that the particle scheme behaves well for the resolution of stationary linear hyperbolic equations. We proved the convergence of the scheme under appropriate hypotheses on the data and under the assumption that the characteristic curves cover the entire domain. This last assumption is restrictive, but we observed in the simulations that the scheme still functions despite the presence of dry areas in the domain. Then we applied this scheme to a problem of geophysical flow, and obtained results in cases that can not be solved by an elementary finite volume scheme.

Regarding the landscape evolution model, some further developments are needed to make the scheme applicable to general landscapes. First, this scheme is very costly compared to a finite volume scheme. For the landscape evolution model, the computation time of one time step is 200 times faster with the finite volume scheme than with the particle scheme, to obtain a similar precision on the solutions. This is due to the non linear terms depending on ∇h which have to be computed by a sum over the neighboring particles. Furthermore, because of the linearization of the equations, the convergence to the solution of the non linear system is not guaranteed. Particles computed as solutions to the linear system tend to gather in the lowest parts of the surface. If they are too close, then the gradient of h can become singular, and leads to huge errors in the computation of the solution. Consequently the time steps have to be taken small enough to obtain a good convergence. In addition, if there is no explicit formula for the initial solutions $h(0, \cdot)$ and $c(0, \cdot)$, we need to find a good approximation of these initial solutions with the particle scheme. However, a fixed point method, consisting of iterations of the linearized solutions starting from constants water height and sediment concentration will not converge if the initial surface z_0 is too rough. The convergence may be improved

by picking a non-constant water height, but finding a good initial guess might not be easy. But on the positive side, the computation of the particle method is easily parallelized, as the computations for each trajectory can be run on independent processors. Thus the method can be easily run on Graphic Processing Units (GPU), for which considerable time saving can be expected.

Conclusion et perspectives

1 Étude théorique du système

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude mathématique d'un modèle d'évolution du paysage et de l'eau circulant à la surface du sol. Ce modèle est constitué de trois équations aux dérivées partielles, représentant l'évolution de la hauteur d'eau, de sa concentration en sédiments et de la hauteur de la surface. Les résultats obtenus permettent tout d'abord de montrer que des solutions physiques au système d'équation existent. Ensuite, ils illustrent les comportements variés des solutions du système en fonction des paramètres. De plus, ces résultats permettent de mettre en évidence certains mécanismes conduisant à la formation de motifs (comme des réseaux de canaux) à la surface du sol, et donnent des indications sur la forme et la taille de ces motifs.

1.1 Caractère bien posé.

Le caractère bien posé localement en temps du système suivant a été démontré :

$$\begin{cases} \partial_t h - \operatorname{div}(h \nabla(h + z)) = r(t, x), \\ \partial_t z = K \Delta z + sc - eh^m |\nabla(h + z)|^n, \\ \partial_t(ch) + \operatorname{div}(ch \nabla(h + z)) = eh^m |\nabla(h + z)|^n - sc, \end{cases} \quad (1.1)$$

sous les hypothèses que $K > 0$ et qu'il existe $h_{\min} > 0$ tel que $h(0, x) \geq h_{\min}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. La deuxième hypothèse signifie que la hauteur d'eau initiale ne s'approche pas de zéro. Ces hypothèses permettent d'obtenir le caractère parabolique des équations sur h et z . Une piste de recherche intéressante est l'étude du caractère bien posé du système quand ces hypothèses ne sont pas vérifiées. Pour simplifier un peu le problème, cette étude pourrait se faire en supposant que la concentration de sédiments dans l'eau est constante : $c = c_0 \geq 0$, ce qui permet de retirer l'équation sur c . Le système obtenu comporte alors deux équations paraboliques dégénérées.

1.2 Étude de stabilité.

Une étude complète de la stabilité linéaire du modèle autour de certaines solutions stationnaires a été effectuée, dans le but d'expliquer la formation de motifs à la surface du sol. Cette analyse a permis de mettre en évidence le rôle des paramètres du modèle dans la formation de certains motifs, comme par exemple l'apparition de canaux parallèles à la direction de la pente. On a pu montrer que le phénomène

de fluage à tendance à stabiliser le système, et que l'érosion tend au contraire à le déstabiliser.

Plusieurs questions intéressantes en lien avec la stabilité du système peuvent être approfondies et étudiées dans la suite de ces travaux. Nous en donnons ici un aperçu.

Étude paramétrique du système : Nous avons étudié des cas de stabilité ou d'instabilité du système pour certaines valeurs des paramètres : celles pour lesquelles le système est stable, ainsi que celles pour lesquelles le système est instable dans la direction transverse à la pente. Une étude plus complète, couvrant l'ensemble de l'espace des paramètres permettrait de dresser un portrait complet des comportements possibles du système.

Étude des réseaux de canaux : En cas d'instabilité, le nombre de canaux créés dans la largeur du domaine dans les simulations numériques correspond à l'ordre de grandeur de ce nombre calculé en fonction de la fréquence la plus instable. Nous avons également observé qu'en cas d'instabilité transverse à la pente, les canaux ont tendance à rester parallèles les uns des autres. Pour d'autres cas d'instabilités, par exemple si le système est instable dans les deux directions (celle de la pente et celle transverse), on pourrait étudier la tendance des canaux à se regrouper ou à se ramifier. Ces ramifications peuvent également apparaître en considérant un domaine plus grand. Ainsi, une étude plus complète pourrait permettre de prédire la forme et le nombre de canaux et de ramifications créés à la surface du sol. De plus, certains réseaux de ramifications de canaux présentent une structure fractale, il pourrait alors être intéressant d'étudier la dimension fractale de ces structures.

Stabilité autour d'autres solutions stationnaires : L'étude de la stabilité a été faite dans le cadre de solutions stationnaires sur un plan incliné, donc sur une surface plane. Il pourrait être intéressant de rechercher d'autres solutions stationnaires, correspondant à des reliefs existants, et d'étudier la stabilité de ces solutions. Cette étude est liée à la recherche de solutions asymptotiques : dans le cas de la formation de canaux sur le plan incliné, on peut se demander si la solution du système peut s'approcher d'un état stationnaire en un temps suffisamment long. Pour cela, il faudrait qu'il existe des solutions stationnaires stables pour lesquelles le sol est creusé par des canaux. Dans [7], la stabilité autour d'une solution stationnaire symétrique par rapport à l'axe x est étudiée, pour un système à deux équations. Cette étude de stabilité pourrait être adaptée pour le modèle présenté dans ce manuscrit.

2 Méthode particulière stationnaire

Le troisième chapitre de cette thèse est consacré à l'introduction d'une méthode particulière pour des équations stationnaires linéaires, et à l'étude de sa convergence.

Cette méthode est bien adaptée dans certains cas, par exemple si le domaine possède une frontière complexe (ce qui est le cas pour le modèle considéré précédemment, en présence de zones sèches), ou si la dimension du problème est grande. Nous avons pu utiliser cette méthode pour résoudre les équations stationnaires de la hauteur du fluide et de sa concentration en sédiment, dans le cadre du modèle d'érosion. Ces équations sont non-linéaires, la méthode est donc appliquée à leur version linéarisée, en utilisant une méthode de point fixe.

Une piste d'amélioration pour la méthode particulière est l'optimisation de son temps de calcul. La parallélisation des calculs permettrait de diminuer ce temps. Cette parallélisation serait efficace grâce aux propriétés des courbes caractéristiques, qui ne se croisent pas et donc qui peuvent être calculées par différents processeurs. De plus, le calcul de la solution approchée en un point dépend seulement des points d'interpolations voisins, donc ne nécessite pas d'aller récupérer de l'information sur tous les processeurs. Dans le cadre d'écoulement d'eau sur une surface, les points d'interpolations de la méthode (correspondant aux particules de fluide) sont placés uniquement sur les zones comportant de l'eau. Ainsi, la présence de zones sèches permet également de réduire le temps de calcul du schéma numérique.

3 Un modèle microscopique

Dans la nature, le processus d'érosion est complexe et dépend de beaucoup de paramètres. Nous pouvons observer que les canaux sont généralement très désordonnés, même si ils peuvent suivre une direction générale. Ceci est dû à l'échelle microscopique qui influe sur l'évolution des reliefs, ainsi qu'à tous les phénomènes qui varient dans le temps (météo, saisons, végétation, passage d'animaux...). Dans cette partie, on introduit un modèle similaire au modèle étudié dans cette thèse, mais qui ajoute une part d'aléa en faisant intervenir l'échelle microscopique. Pour cela, nous modélisons l'érosion du sol par le creusement à sa surface de micro-canaux, qui apparaissent selon un processus aléatoire. Ce modèle, qu'il pourrait être intéressant d'étudier dans de futurs travaux est décrit ici, et illustré par des simulations numériques. L'utilisation de micro-canaux pour décrire l'érosion d'une surface a pour la première fois été décrite dans [63]. Le même type de modélisation a également été appliqué à un problème de biologie, la modélisation des réseaux de capillaires sanguins [1], dans lequel des petits éléments capillaires apparaissent selon un processus aléatoire.

Création des micro-canaux Les micro-canaux apparaissent aléatoirement, selon un processus de Poisson de paramètre $\mu(t, x)$ qui varie en temps et en espace. Pendant un intervalle de temps Δt et dans une boule $B(x, \epsilon)$, la probabilité que n

canaux soient créés est donnée par :

$$\frac{\left(\int_B \int_{[t,t+\Delta t]} \mu(s,y) ds dy\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_B \int_{[t,t+\Delta t]} \mu(s,y) ds dy\right).$$

Ainsi, la probabilité qu'au moins un canal soit créé est

$$1 - \exp\left(-\int_B \int_{[t,t+\Delta t]} \mu(s,y) ds dy\right).$$

Comme supposé précédemment, l'érosion est causée par la friction de l'eau sur la surface du sol, donc la densité du processus de Poisson est décrite par :

$$\mu(t,x) = a \left(\frac{h(t,x)}{H}\right)^m \left(\frac{|v(t,x)|}{V}\right)^n,$$

avec $a \geq 0$ une constante à déterminer. L'espérance du nombre de canaux créés par le processus de Poisson sur le domaine Ω entre les temps 0 et t est

$$\int_{\Omega} \int_0^t \mu(s,y) ds dy,$$

donc a est choisi de manière à obtenir en moyenne le nombre de canaux voulus sur un intervalle de temps fixé.

Notons $n(T_f)$ le nombre de canaux qui sont créés entre le temps 0 et le temps final T_f , et soit Γ_i la fonction qui représente la hauteur du i -ème canal (définie plus bas). Quand le i -ème canal est créé, la hauteur du sol en un point $x \in \mathbb{R}^2$ diminue de $\Gamma_i(x)$. Notons t_i le temps auquel a été créé le i -ème canal. La hauteur du sol vérifie alors l'équation :

$$z(t + \delta t, x) - z(t, x) = - \sum_{i=1}^{n(T_f)} \Gamma_i(x) 1_{t_i \in [t, t+\delta t]}.$$

En passant à la limite $\delta t \rightarrow 0$ et en ajoutant le processus de fluage on obtient alors l'équation d'évolution de la hauteur du sol :

$$\partial_t z(t, x) = K \Delta z - \sum_{i=1}^{n(T_f)} \Gamma_i(x) \delta_{t_i}(t), \quad (3.1)$$

δ_{t_i} étant un Dirac centré en t_i . De la même façon, l'équation d'évolution pour la concentration de sédiments dans l'eau s'écrit :

$$\partial_t(ch) + \text{div}(ch) = \rho_s \sum_{i=1}^{n(T_f)} \Gamma_i(x) \delta_{t_i}(t). \quad (3.2)$$

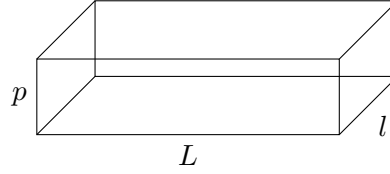


FIGURE 3.1 – Forme d'un micro-canal.

Forme et direction des canaux Un micro-canal a une longueur L , une largeur l et une profondeur p . Nous choisissons de décrire sa forme par la fonction indicatrice du rectangle $[-L/2, L/2] \times [-l/2, l/2]$, multipliée par la profondeur p , comme illustré par la figure 3.1. La direction $w = (\cos \theta, \sin \theta)$ des micro-canaux doit être proche de celle de l'écoulement de l'eau. Pour conserver de l'aléa, cette direction est choisie selon une loi de probabilité, dont la moyenne est la direction d'écoulement de l'eau. On choisit la loi de Von Mises centrée en $v/|v|$, donnée par la densité de probabilité suivante :

$$\frac{1}{Z(\kappa)} e^{-\kappa \langle w, \frac{v}{|v|} \rangle},$$

où $Z(\kappa) = \int_0^{2\pi} e^{-\kappa \cos \theta} d\theta$. Si κ est assez grand, la direction d'un canal sera avec une forte probabilité proche de la direction d'écoulement de l'eau. Nous pourrions aussi choisir κ non constant, et le faire varier en fonction de la vitesse d'écoulement de l'eau. En effet, plus l'eau s'écoule vite et plus l'on voudrait que la direction des canaux soit proche de la direction d'écoulement de l'eau.

Un canal centré autour du point $x_i = (x_i^1, x_i^2)$, de direction $w_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ est alors défini par la fonction :

$$\Gamma(x - x_i, w_i) := \Gamma_i(x) = f(\langle x - x_i, w_i \rangle, \langle X - X_i, w_i^\perp \rangle),$$

f étant la fonction indicatrice du rectangle $[l, l] \times [L, L]$, multipliée par p .

Système microscopique Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r \\ \partial_t(ch) + \operatorname{div}(chv) = \rho_s \sum_{i=1}^{n(t)} \Gamma(x - x_i, w_i) \delta_{t_i}(t) \\ \partial_t z = K \Delta z - \sum_{i=1}^{n(t)} \Gamma(x - x_i, w_i) \delta_{t_i}(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Ce système d'équations peut être simulé numériquement, mais il est beaucoup plus difficile de faire son étude théorique. En effet, les termes sources dans l'équation sur la concentration sont des variables aléatoires, qui dépendent des solutions des autres équations h et z . De plus, le problème est non local car les variations de la hauteur du sol et de la concentration de sédiments en un point dépendent des canaux créés au voisinage de ce point. En outre, les équations sont couplées. Dans le paragraphe

suisant, nous faisons un calcul formel de l'espérance de ces équations, pour obtenir un système d'équations déterministes. Pour finir, nous montrons certains résultats de simulations numériques du système microscopique.

Passage du modèle discret au modèle moyenné Dans cette partie, nous calculons l'espérance de la variable aléatoire :

$$\sum_{i=1}^{n(t)} \Gamma(x - x_i, w_i) \delta_{t_i}(t),$$

au temps $t \geq 0$. Cette espérance est donnée par la formule :

$$\int_{\Omega} \int_{S^1} \Gamma(x - y, w) \frac{e^{\kappa \langle w, v/|v| \rangle}}{Z(\kappa)} \mu(t, y) dw dy,$$

avec $v = -\nabla(h + z)(t, y)$ qui dépend de t et y . En appliquant l'espérance au système (3.3), on obtient le système moyenné suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hv) = r \\ \partial_t(ch) + \operatorname{div}(chv) = \rho_s a \int_{S^1} \int_{\Omega} \frac{e^{\kappa \langle w, \frac{v}{|v|} \rangle}}{Z(\kappa)} \left(\frac{h(y)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(y)|}{V} \right)^n \Gamma(x - y, w) dw dy \\ \partial_t z = K \Delta z - a \int_{S^1} \int_{\Omega} \frac{e^{\kappa \langle w, \frac{v}{|v|} \rangle}}{Z(\kappa)} \left(\frac{h(y)}{H} \right)^m \left(\frac{|v(y)|}{V} \right)^n \Gamma(x - y, w) dw dy \end{cases}$$

C'est un système d'EDP déterministes, qui sont non locales. A la limite $\kappa \rightarrow +\infty$ (c'est-à-dire que les canaux sont tous dans la direction du flot) et $L, l, p \rightarrow 0$, on retrouve formellement le système continu (1.1), sans sédimentation ($s = 0$).

Simulations numériques du système Pour finir, nous présentons des résultats de simulations numériques du système microscopique. Le schéma numérique est le même que dans le chapitre 2, en remplaçant les termes sources continus par la simulation du processus de Poisson. Les paramètres choisis sont également les mêmes, ce qui permet de comparer les résultats obtenus. La direction des canaux est choisie de manière déterministe (selon la direction de l'écoulement de l'eau), nous n'utilisons pas la loi de Von Mises.

La figure 3.2 représente l'élévation de la surface obtenue pour quatre simulations, les différences entre ces simulations sont dues à l'aléa du modèle. Comme expliqué dans le chapitre 2, la simulation numérique du modèle avec la méthode des volumes finis utilisée dans cette thèse peut être mise en œuvre seulement si la hauteur de l'eau ne s'annule pas. Donc les simulations effectuées ici sont arrêtées dès que la hauteur de l'eau s'approche de zéro, quand la surface est trop creusée dans une zone. On observe des ressemblances entre les différentes figures : la présence d'environ trois canaux, qui suivent la direction de la pente. Ces motifs rappellent ceux obtenus avec le système macroscopique, bien qu'il y ait des différences. En particulier les canaux sont moins parallèles entre eux, et leur direction n'est pas exactement celle de la

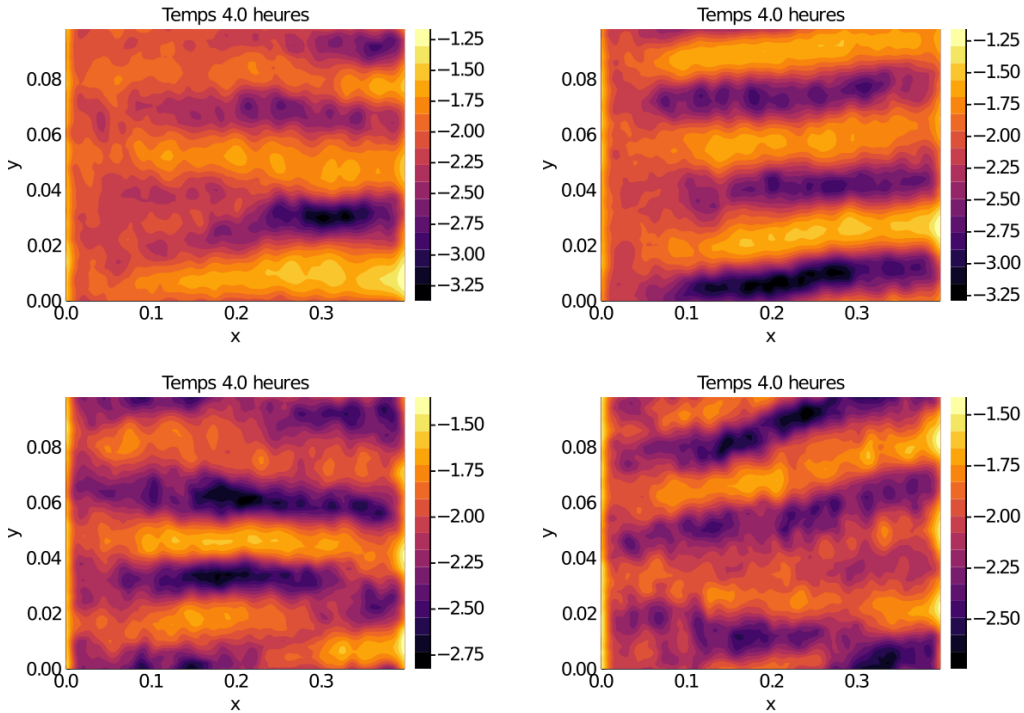


FIGURE 3.2 – Simulations du système microscopique, pour $K = K_e/50$, après 72000 itérations : hauteur du sol en millimètres. Les couleurs représentent la hauteur de $z - \tan \theta (L_x - x)$, c'est à dire la différence entre la hauteur du sol et la hauteur du plan incliné. Le domaine est périodique dans la direction y .

penne. Pour le système macroscopique, l'instabilité principale était transverse à la penne et les instabilités dans la direction de la penne n'avaient que peu d'influence sur la solution du système. Dans le cas présent, ces instabilités secondaires semblent avoir un effet plus important, qui augmente la sinuosité des canaux.

Une piste à explorer est l'étude du comportement moyen du modèle, en calculant des statistiques à partir de données extraites des solutions. Ces données pourraient concerner le nombre de canaux créés, leur taille, leur direction, ou le type de ramifications qui apparaissent. D'autre part, la méthode particulière stationnaire décrite dans le chapitre 3 pourrait être appliquée à ce système.

4 Conclusion générale

Le modèle étudié dans ce manuscrit a été décrit et expliqué dans le chapitre 1. Il se présente sous la forme d'un système de trois EDP, modélisant l'évolution dans le temps de la hauteur de l'eau, de sa concentration en sédiments et de l'élévation de la surface. Les phénomènes physiques qui apparaissent dans ce modèle sont l'érosion du sol par la friction de l'eau à sa surface, le dépôt de sédiments sur le sol, le déplacement de l'eau et des sédiments dans la direction de la penne, ainsi que la reptation

du sol. Ensuite, une étude théorique du système a été réalisée dans le chapitre 2. Cette étude donne un cadre pour lequel des solutions au système existent, grâce au théorème donnant l'existence et l'unicité de solutions au système sous certaines hypothèses. De plus, une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système autour de solutions stationnaires permet de comprendre le comportement de certaines solutions. Ce résultat est complété par une étude plus poussée dans le cas instable, qui donne une idée plus précise du type d'instabilités pouvant apparaître dans les solutions. Enfin, le chapitre 3 est consacré au développement d'une méthode particulière pour des équations stationnaires. L'avantage de la méthode particulière est de pouvoir être utilisée sans problème sur des équations comportant des zones en lesquelles la solution s'annule (dans le cas d'équations modélisant une quantité physique positive). Le principal résultat de ce chapitre est l'estimation d'erreur pour le schéma numérique, qui permet de prouver sa convergence. Cette méthode est alors appliquée au modèle d'évolution du paysage, quand l'eau est en régime stationnaire.

Nous avons pu montrer dans cette thèse que le système choisi est adapté pour modéliser les stades initiaux de l'érosion d'une surface. En partant d'une surface initiale plane, les solutions peuvent gagner en complexité et faire apparaître des motifs intéressants à la surface du sol, comme des canaux dirigés dans la direction de la pente.

Plusieurs perspectives de recherche ont été données dans ce chapitre de conclusion. Pour l'aspect théorique, l'étude du caractère bien posé du système pourrait être étudiée dans un cadre plus large que le résultat obtenu dans cette thèse. L'étude de stabilité pourrait quant à elle être menée en considérant d'autres solutions stationnaires. Ensuite, la méthode particulière stationnaire pourrait être améliorée, en particulier pour diminuer le temps de calcul du schéma. Enfin, nous avons décrit dans ce chapitre un modèle comportant de l'aléa (3.3), qu'il pourrait être intéressant d'étudier.

Bibliography

- [1] Pedro Aceves-Sanchez, Benjamin Aymard, Diane Peurichard, Pol Kennel, Anne Lorsignol, Franck Plouraboue, Louis Casteilla, and Pierre Degond. « A new model for the emergence of blood capillary networks ». In: *Networks and Heterogeneous Media* 16.1 (2021), pp. 91–138.
- [2] Robert A. Adams and John J.F. Fournier. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [3] Shashank Kumar Anand, Milad Hooshyar, and Amilcare Porporato. « Linear layout of multiple flow-direction networks for landscape-evolution simulations ». In: *Environmental Modelling & Software* 133 (2020), p. 104804.
- [4] Alan L. Andrew, K-W Eric Chu, and Peter Lancaster. « Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of matrix functions ». In: *SIAM journal on matrix analysis and applications* 14.4 (1993), pp. 903–926.
- [5] Benoît Ben Moussa and Jean Paul Vila. « Convergence of SPH method for scalar nonlinear conservation laws ». In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 37.3 (2000), pp. 863–887.
- [6] Julie Binard, Pierre Degond, and Pascal Noble. « Well-posedness and stability analysis of a landscape evolution model ». In: *Journal of Nonlinear Science* 34.1 (2024), p. 20.
- [7] Sara Bonetti, Milad Hooshyar, Carlo Camporeale, and Amilcare Porporato. « Channelization cascade in landscape evolution ». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117.3 (2020), pp. 1375–1382.
- [8] Cristina Brändle and Juan Luis Vázquez. « Viscosity solutions for quasilinear degenerate parabolic equations of porous medium type ». In: *Indiana University mathematics journal* (2005), pp. 817–860.
- [9] Oscar Buneman. *Computer simulation using particles (RW Hockney and JW Eastwood)*. 1983.
- [10] Hubert Chanson. *Hydraulics of open channel flow*. Elsevier, 2004.
- [11] Alex Chen, Jérôme Darbon, Giuseppe Buttazzo, Filippo Santambrogio, and Jean-Michel Morel. « On the equations of landscape formation ». In: *Interfaces and Free Boundaries* 16.1 (2014), pp. 105–136.
- [12] Alex Chen, Jérôme Darbon, and Jean-Michel Morel. « Landscape evolution models: A review of their fundamental equations ». In: *Geomorphology* 219 (2014), pp. 68–86.
- [13] Pascal Cherrier and Albert Milani. *Linear and quasi-linear evolution equations in Hilbert spaces*. American Mathematical Society Providence, 2012.
- [14] Alina Chertock. « A practical guide to deterministic particle methods ». In: *Handbook of numerical analysis*. Vol. 18. Elsevier, 2017, pp. 177–202.

- [15] Alexandre Joel Chorin and Peter S. Bernard. « Discretization of a vortex sheet, with an example of roll-up ». In: *Journal of Computational Physics* 13.3 (1973), pp. 423–429.
- [16] Ven Te Chow. « Open channel hydraulics MacGraw Hill Kogakusha ». In: *Ltd. Tokyo* (1959).
- [17] Georges-Henri Cottet and Petros D. Koumoutsakos. *Vortex methods: theory and practice*. Vol. 8. Cambridge university press Cambridge, 2000.
- [18] Tom Coulthard, Mark Macklin, and Michael J. Kirkby. « A cellular model of Holocene upland river basin and alluvial fan evolution ». In: *Earth Surface Processes and Landforms* 27.3 (2002), pp. 269–288.
- [19] W. Edward H. Culling. « Analytical theory of erosion ». In: *The Journal of Geology* 68.3 (1960), pp. 336–344.
- [20] W. Edward H. Culling. « Soil creep and the development of hillside slopes ». In: *The Journal of Geology* 71.2 (1963), pp. 127–161.
- [21] William Morris Davis. « The convex profile of bad-land divides ». In: *Science* 508 (1892), pp. 245–245.
- [22] William Morris Davis. « The geographical cycle ». In: *The Geographical Journal* (1899).
- [23] Olivier Delestre. « Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles ». PhD thesis. Université d'Orléans, 2010.
- [24] José Manuel Domínguez, Alejandro J.C. Crespo, Moncho Gómez-Gesteira, and Jean-Christophe Marongiu. « Neighbour lists in smoothed particle hydrodynamics ». In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 67.12 (2011), pp. 2026–2042.
- [25] Cipriano Escalante, Enrique D. Fernández-Nieto, T. Morales de Luna, and Gladys Narbona-Reina. « Modelling of Bedload Sediment Transport for Weak and Strong Regimes ». In: *Numerical Simulation in Physics and Engineering: Trends and Applications: Lecture Notes of the XVIII 'Jacques-Louis Lions' Spanish-French School* (2021), pp. 179–189.
- [26] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Soc., 2010.
- [27] Martha W. Evans, Francis Harvey Harlow, and Eleazer Bromberg. « The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations ». In: (1957).
- [28] Robert Eymard, Thierry Gallouët, and Raphaële Herbin. « Finite volume methods ». In: *Handbook of numerical analysis* 7 (2000), pp. 713–1018.
- [29] Robert Eymard, Thierry Gallouët, Raphaelae Herbin, and Jean-Claude Latché. « Finite volume schemes and Lax–Wendroff consistency ». In: *Comptes Rendus. Mécanique* 350.S1 (2022), pp. 1–13.

- [30] Enrique D. Fernandez-Nieto, Carine Lucas, T Morales de Luna, and Stephane Cordier. « On the influence of the thickness of the sediment moving layer in the definition of the bedload transport formula in Exner systems ». In: *Computers & Fluids* 91 (2014), pp. 87–106.
- [31] Enrique D. Fernández-Nieto, Tomás Morales de Luna, Gladys Narbona-Reina, and Jean de Dieu Zabsonré. « Formal deduction of the Saint-Venant–Exner model including arbitrarily sloping sediment beds and associated energy ». In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 51.1 (2017), pp. 115–145.
- [32] Philippe Gaspard Gauckler. *Etudes Théoriques et Pratiques sur l'Écoulement et le Mouvement des Eaux*. Gauthier-Villars, 1867.
- [33] Grove Karl Gilbert. *Report on the Geology of the Henry Mountains*. US Government Printing Office, 1877.
- [34] Grove Karl Gilbert. « The convexity of hilltops ». In: *The Journal of Geology* 17.4 (1909), pp. 344–350.
- [35] Robert A. Gingold and Joseph J. Monaghan. « Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars ». In: *Monthly notices of the royal astronomical society* 181.3 (1977), pp. 375–389.
- [36] Adrien Guérin, Julien Derr, Sylvain Courrech Du Pont, and Michael Berhanu. « Streamwise dissolution patterns created by a flowing water film ». In: *Physical Review Letters* 125.19 (2020), p. 194502.
- [37] John Tilton Hack. *Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland*. Vol. 294. US Government Printing Office, 1957.
- [38] Filip Hjulström. « Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the River Fyris ». PhD thesis. The Geological institution of the University of Upsala, 1935.
- [39] Robert E. Horton. « Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology ». In: *Geological society of America bulletin* 56.3 (1945), pp. 275–370.
- [40] Alan D. Howard and Gordon Kerby. « Channel changes in badlands ». In: *Geological Society of America Bulletin* 94.6 (1983), pp. 739–752.
- [41] Norihiro Izumi and Gary Parker. « Inception of channelization and drainage basin formation: upstream-driven theory ». In: *Journal of Fluid Mechanics* 283 (1995), pp. 341–363.
- [42] Michael J. Kirkby. « Hillslope process-response models based on the continuity equation ». In: *Inst. Br. Geogr. Spec. Publ* 3.1 (1971), pp. 5–30.
- [43] Marc Lebrun, Miguel Colom, Jérôme Darbon, and Jean-Michel Morel. « Numerical Simulation of Landscape Evolution Models ». In: *Image Processing On Line* 8 (2018), pp. 219–250.

- [44] Anthony Leonard. « Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements ». In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 17.1 (1985), pp. 523–559.
- [45] Luna Bergere Leopold. « The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications. » In: *United States of Geological Survey Professional Paper* 252 (1953), pp. 1–56.
- [46] Luna Bergere Leopold and John P. Miller. « Ephemeral streams-Hydraulic factors and their relation to the drainage net ». In: *Professional Paper* (1956).
- [47] Luna Bergere Leopold, M. Gordon Wolman, and John P. Miller. *Fluvial processes in geomorphology*. Courier Dover Publications, 1964.
- [48] Deborah S. Loewenherz. « Stability and the initiation of channelized surface drainage: a reassessment of the short wavelength limit ». In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 96.B5 (1991), pp. 8453–8464.
- [49] Leon B. Lucy. « A numerical approach to the testing of the fission hypothesis ». In: *Astronomical Journal*, vol. 82, Dec. 1977, p. 1013-1024. 82 (1977), pp. 1013–1024.
- [50] Robert Manning, John Purser Griffith, T.F. Pigot, and Leveson Francis Vernon-Harcourt. *On the flow of water in open channels and pipes*. 1890.
- [51] Sylvie Mas-Gallic and Pierre-Arnaud Raviart. « A particle method for first-order symmetric systems ». In: *Numerische Mathematik* 51.3 (1987), pp. 323–352.
- [52] James McKean and Josh Roering. « Objective landslide detection and surface morphology mapping using high-resolution airborne laser altimetry ». In: *Geomorphology* 57.3-4 (2004), pp. 331–351.
- [53] Guy Métivier. *Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems*. 2008.
- [54] Joseph J. Monaghan. « Smoothed particle hydrodynamics ». In: *Annual review of astronomy and astrophysics* 30.1 (1992), pp. 543–574.
- [55] J Morris. « The Routh and Routh-Hurwitz Stability Criteria: Their Derivation by a Novel Method Using Comparatively Elementary Algebra ». In: *Aircraft engineering and aerospace technology* (1962).
- [56] Jeffrey D Niemann, Nicole M Gasparini, Gregory E. Tucker, and Rafael L. Bras. « A quantitative evaluation of Playfair’s law and its use in testing long-term stream erosion models ». In: *Earth Surface Processes and Landforms: The Journal of the British Geomorphological Research Group* 26.12 (2001), pp. 1317–1332.
- [57] Paola Passalacqua, Tien Do Trung, Efi Foufoula-Georgiou, Guillermo Sapiro, and William E. Dietrich. « A geometric framework for channel network extraction from lidar: Nonlinear diffusion and geodesic paths ». In: *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* 115.F1 (2010).

- [58] Jon D. Pelletier. « Fluvial and slope-wash erosion of soil-mantled landscapes: detachment-or transport-limited? » In: *Earth Surface Processes and Landforms* 37.1 (2012), pp. 37–51.
- [59] Walther Penck. *Morphological Analysis of Land Forms*. 1954.
- [60] Pierre-Arnaud Raviart. « An analysis of particle methods ». In: *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Lectures given at the 3rd 1983 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held at Como, Italy, July 7–15, 1983*. Springer, 2006, pp. 243–324.
- [61] Ignacio Rodriguez-Iturbe and Andrea Rinaldo. *Fractal river basins: chance and self-organization*. Cambridge University Press, 1997.
- [62] Louis Rosenhead. « The formation of vortices from a surface of discontinuity ». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 134.823 (1931), pp. 170–192.
- [63] Joshua Russell-Buckland. « Heuristic Modelling of Landscape Evolution ». In: *Masters thesis of Imperial College London under the direction of Benjamin Aymard and Pierre Degond* (2015).
- [64] Thomas C. Sideris. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Vol. 2. Springer, 2013.
- [65] Guy Simpson and Fritz Schlunegger. « Topographic evolution and morphology of surfaces evolving in response to coupled fluvial and hillslope sediment transport ». In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 108.B6 (2003).
- [66] Terence R. Smith, Bjorn Birnir, and George E. Merchant. « Towards an elementary theory of drainage basin evolution: I. The theoretical basis ». In: *Computers & Geosciences* 23.8 (1997), pp. 811–822.
- [67] Terence R. Smith and Francis P. Bretherton. « Stability and the conservation of mass in drainage basin evolution ». In: *Water Resources Research* 8.6 (1972), pp. 1506–1529.
- [68] Terence R. Smith and Francis P. Bretherton. « Stability and the conservation of mass in drainage basin evolution ». In: *Water Resources Research* 8.6 (1972), pp. 1506–1529.
- [69] Jean-Pierre R.A. Sweerts, Carol A. Kelly, John W.M. Rudd, Ray Hesslein, and Thomas E. Cappenberg. « Similarity of whole-sediment molecular diffusion coefficients in freshwater sediments of low and high porosity ». In: *Limnology and oceanography* 36.2 (1991), pp. 335–341.
- [70] Gregory E. Tucker and Rafael L. Bras. « Hillslope processes, drainage density, and landscape morphology ». In: *Water resources research* 34.10 (1998), pp. 2751–2764.
- [71] Garry Willgoose, Rafael L. Bras, and Ignacio Rodriguez-Iturbe. « A coupled channel network growth and hillslope evolution model: 1. Theory ». In: *Water Resources Research* 27.7 (1991), pp. 1671–1684.

Titre : Modélisation, analyse et simulation de modèles en géomorphologie

Mots clés : Système d'EDP, Erosion, Modélisation, Méthode particulaire, Analyse numérique

Résumé : L'étude de la formation et de l'évolution des reliefs est une question fondamentale en géomorphologie. Le travail effectué dans cette thèse est consacré à l'étude mathématique d'un modèle d'évolution du paysage. Le relief évolue dans le temps sous l'effet de l'érosion et de la sédimentation, causés par l'écoulement d'eau sur la surface. En particulier, un des objectifs est l'identification des processus impliqués dans la formation de canaux et de motifs à la surface du sol. Dans le chapitre introductif, le modèle est obtenu à partir de lois physiques. Il s'écrit sous la forme d'un système composé de trois équations aux dérivées partielles, décrivant la hauteur de l'eau, la concentration de l'eau en sédiments et la hauteur du sol. Dans le deuxième chapitre, une étude mathématique du système est effectuée. L'existence et l'unicité de solutions à ce système est démontrée. Une étude de la stabilité spectrale de certaines solutions stationnaires est menée, qui permet de déterminer le rôle des paramètres dans l'apparition de motifs dans le sol et de donner des informations sur leur forme. En particulier, une condition nécessaire et suffisante de stabilité à toutes fréquences est démontrée. Le troisième chapitre introduit une méthode numérique particulaire, qui s'applique à des équations hyperboliques stationnaires. La convergence du schéma numérique ainsi qu'une estimation d'erreur sont démontrées. Cette méthode particulaire stationnaire est ensuite appliquée à la résolution des équations de la hauteur de l'eau et de sa concentration en sédiments, quand l'eau est en régime stationnaire.

Title: Modeling, analysis and simulation of model in geomorphology

Key words: PDE system, Erosion, Modélisation, Particle method, Numerical analysis

Abstract: The study of landscape formation and evolution is a fundamental question in geomorphology. The work carried out in this thesis is devoted to the mathematical study of a landscape evolution model. Landform evolves in time due to erosion and sedimentation, caused by the flow of water over the ground surface. In particular, one of the objectives is to identify the processes involved in the formation of channels and patterns on the ground surface. In the introductory chapter, the model is derived from physical laws. It is a system composed of three partial differential equations, describing the fluid height, the concentration of sediments, and the surface elevation. In the second chapter, a mathematical study of the system is conducted. The existence and uniqueness of solutions to this system is proved. A study of the spectral stability of some stationary solutions is conducted, which allows determining the role of parameters in the appearance of patterns in the soil and providing information about their form. In particular, a necessary and sufficient condition for stability at all frequencies is given. The third chapter introduces a numerical particle method, for a class of stationary hyperbolic equations. The convergence of the numerical scheme is proven, and an error estimate is given. This stationary particle method is then applied to solve the equations for water height and sediment concentration, when water is in a stationary regime.