



**HAL**  
open science

# Cohomologie, déformations et opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres n-Hom-Lie colorées et les systèmes triples de Lie

Rahma Gharbi

► **To cite this version:**

Rahma Gharbi. Cohomologie, déformations et opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres n-Hom-Lie colorées et les systèmes triples de Lie. Algèbres d'opérateurs [math.OA]. Université de Haute Alsace - Mulhouse; Université de Sfax. Faculté des sciences. Département de mathématiques, 2023. Français. NNT : 2023MULH7026 . tel-04799157

**HAL Id: tel-04799157**

**<https://theses.hal.science/tel-04799157v1>**

Submitted on 22 Nov 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE DE HAUTE ALSACE  
INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE,  
MATHÉMATIQUES, AUTOMATIQUE ET SIGNAL

UNIVERSITE DE SFAX  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

---

## THÈSE

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

\* \* \* \*

# COHOMOLOGIE, DÉFORMATIONS ET OPÉRATEURS DE REYNOLDS GÉNÉRALISÉS SUR LES ALGÈBRES $n$ -HOM-LIE COLORÉES ET LES SYSTÈMES TRIPLES DE LIE

\* \* \* \*

PRÉSENTÉE PAR :

GHARBI RAHMA

SOUS LA DIRECTION DE :

PR. MAKHLOUF ABDENACER & PR. BASDOURI IMED

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 07/11/2023, DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

PR. LEILA BEN ABDELGHANI BOURAOUI	UNIVERSITÉ DE MONASTIR	PRÉSIDENTE
PR. NIZAR BEN FRAJ	UNIVERSITÉ DE CARTHAGE	RAPPORTEUR
PR. ANTONIO CALDERON MARTIN	UNIVERSITÉ DE CÁDIZ	RAPPORTEUR
PR. BOUJEMAA AGREBAOUI	UNIVERSITÉ DE SFAX	EXAMINATEUR
PR. ABDENACER MAKHLOUF	UNIVERSITÉ DE H. ALSACE	DIRECTEUR DE THÈSE
PR. IMED BASDOURI	UNIVERSITÉ DE GAFSA	DIRECTEUR DE THÈSE
PR. SAMI MABROUK	UNIVERSITÉ DE GAFSA	INVITÉ

---

**-2023/2024-**

## Remerciements

*Ce travail a été mené en étroite collaboration entre la Faculté des Sciences de Sfax (FSS- Université de Sfax) et L'Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal (IRIMAS- Université de Haute-Alsace) dans le cadre d'une thèse en cotutelle.*

*Mes premiers remerciements vont à mes directeurs de thèse : le Professeur **Makhlouf Abdenacer** et le Professeur **Basdouri Imed**, pour leur encadrement et leurs conseils précieux qui sont contribué à la progression de ce travail. Leur patience et leur honnêteté sont autant de qualités qui ont fait de ces trois dernières années un réel moment d'échange et de découverte mathématique, dans la joie et la bonne humeur.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux rapporteurs : Monsieur **Calderon Martin Antonio Jesus**, Professeur à l'Université de Cádiz, et Monsieur **Ben Fraj Nizar**, Professeur à l'Université de Carthage, d'avoir accepté d'être membres de jury et d'avoir eu le courage de lire ce manuscrit attentivement et pour leurs soutiens ainsi que leurs commentaires utiles.*

*Merci également à Monsieur **Mabrouk Sami**, Maître de conférences à l'Université de Gafsa dont les conseils prodigués avec pédagogie et clarté m'ont permis de surmonter les principales difficultés rencontrées au cours de ce travail de thèse, et à qui je dois la plupart des idées originales qui y apparaissent.*

*J'adresse ma reconnaissance à Madame **Ben Abdelghani Bouraoui Leila**, Professeur à l'Université de Monastir. Egalement à Monsieur **Agerbaoui Boujemaa**, Professeur de l'Université de Sfax, pour avoir pris la peine de s'intéresser à mon travail et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.*

*Merci **aux membres des laboratoires** qui ont contribué à y faire régner une ambiance cordiale et qui ont, de près ou de loin, aidé à rendre ce travail possible, que ce soit par des idées ou par encouragements.*

*Enfin, ma gratitude va également tout particulier à **ma famille** qui m'a toujours soutenue dans mes choix. Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans vos encouragements, ma réussite est également la vôtre car nous étions toujours unis. Un grand merci pour ta confiance et tes encouragements. De plus, **mes amis**, vous étiez toujours à côtés dans les moments difficiles et de joie aussi.*

**GHARBI Rahma**

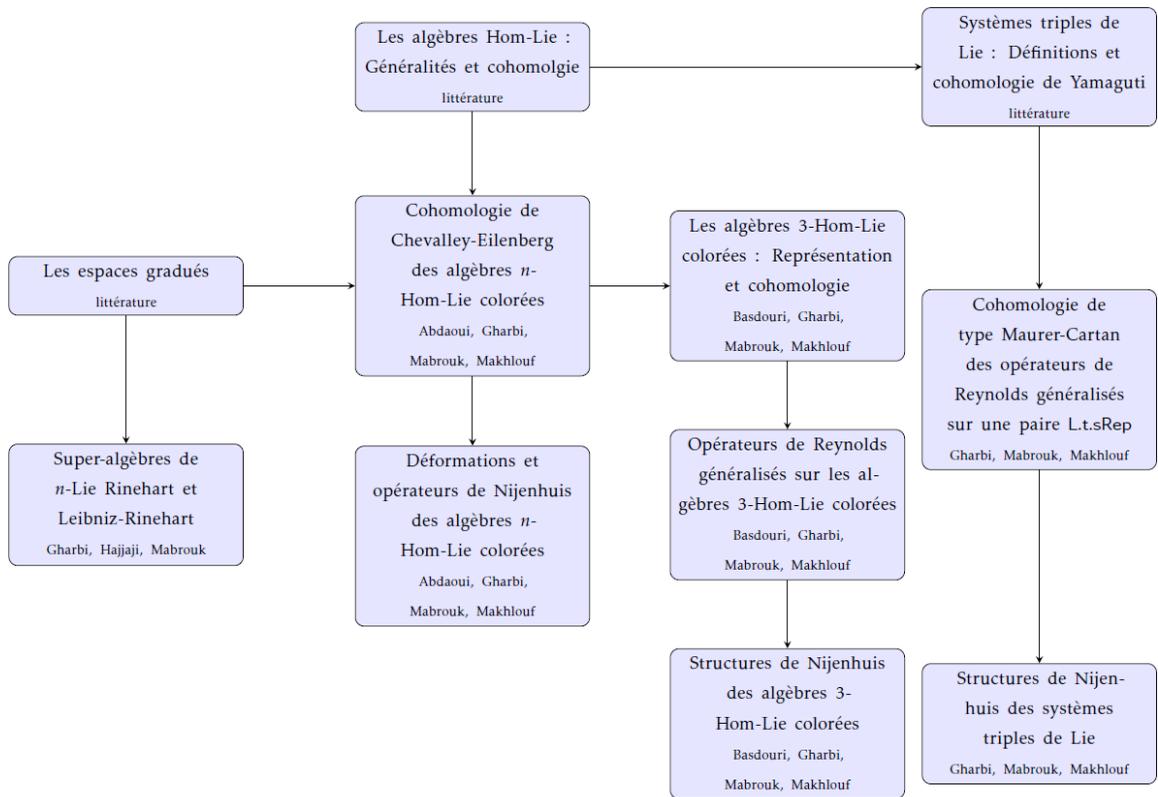
---

# Contents

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>12</b>
1.1	Les algèbres Hom-Lie : Généralités et cohomologie . . . . .	12
1.1.1	Définition et exemples . . . . .	12
1.1.2	Cohomologie des algèbres Hom-Lie . . . . .	13
1.2	Systèmes triples de Lie : Définitions et cohomologie de Yamaguti . . . . .	14
1.2.1	Définitions et Notations . . . . .	14
1.2.2	Cohomologie de Yamaguti . . . . .	15
1.3	Les algèbres $n$ -Hom-Lie colorées : Définitions et constructions . . . . .	16
1.3.1	Définitions et notions de base . . . . .	17
1.3.2	Twist de Yau des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées . . . . .	19
1.3.3	Les algèbres Hom-Leibniz colorées . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres <math>n</math>-Hom-Lie colorées</b>	<b>24</b>
2.1	Les algèbres 3-Hom-Lie colorées : représentations et cohomologie . . . . .	24
2.1.1	Représentations des algèbres 3-Hom-Lie colorées . . . . .	24
2.1.2	Cohomologie de Chevalley-Eilenberg . . . . .	25
2.2	Représentations des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées . . . . .	26
2.3	Cohomologie des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Déformations et opérateurs de Nijenhuis des algèbres <math>n</math>-Hom-Lie colorées</b>	<b>33</b>
3.1	Déformations des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées . . . . .	33
3.2	Opérateurs de Nijenhuis sur les algèbres $n$ -Hom-Lie colorées . . . . .	36
3.2.1	Définitions et constructions . . . . .	36
3.2.2	Structures produits sur les algèbres $n$ -Hom-Lie colorées . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres 3-Hom-Lie colorées</b>	<b>42</b>
4.1	Constructions des algèbres Reynolds 3-Hom-Lie colorées . . . . .	42
4.2	Opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires 3-HomLieRep colorées . . . . .	45
4.3	Structures complexes généralisées twistées . . . . .	50

<b>5</b>	<b>Cohomologie de type Maurer-Cartan des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire <math>L.t.sRep</math></b>	<b>55</b>
5.1	Opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires $L.t.sRep$ . . . . .	55
5.1.1	Opérateurs de Reynolds de poids non nul sur les systèmes triples de Lie .	55
5.1.2	Opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires $L.t.sRep$ . . . . .	57
5.2	Cohomologie de Yamaguti des opérateurs de Reynolds généralisés . . . . .	59
5.2.1	Caractérisation de Maurer-Cartan . . . . .	60
5.2.2	Cohomologie de Yamaguti . . . . .	63
5.3	Classes d'obstruction des opérateurs de Reynolds généralisés . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Structures de Nijenhuis des algèbres 3-Hom-Lie colorées et des systèmes triples de Lie</b>	<b>72</b>
6.1	Les algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées . . . . .	72
6.2	Systèmes triples de NS-Lie . . . . .	76
6.2.1	Définitions et constructions . . . . .	76
6.2.2	Des algèbres NS-Lie aux systèmes triples de NS-Lie . . . . .	79

**Panorama des travaux menés pendant la thèse.**



**Publications et pré-publications :**

1. K. Abdaoui, R. Gharbi, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Cohomology and formal deformations of  $n$ -Hom-Lie color algebras. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, Vol. 75, no. 9, Sept. 2023, pp. 1155 -77.
2. R. Gharbi, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Maurer-Cartan type cohomology on generalized Reynolds operators and NS-structures on Lie triple systems. preprint arXiv:2309.01385. (2023).
3. I. Basdouri, R. Gharbi, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Generalized Reynolds operators on 3-Hom-Lie color algebras and 3-NS-Hom-Lie color algebras. Preprint. (2023).

# Introduction

**Les algèbres colorées :** La généralisation des algèbres de Lie connue aujourd’hui sous le nom d’algèbres de Lie colorées ont été introduites pour la première fois par Ree [58]. Cette classe inclut les superalgèbres de Lie qui sont  $\mathbb{Z}_2$ -graduées et qui jouent un rôle important dans les supersymétries. Plus généralement, les algèbres de Lie colorées jouent un rôle important en physique théorique, voir par exemple [3, 67]. Montgomery a prouvé dans [56] que les algèbres de Lie colorées simples peuvent être obtenues à partir d’algèbres associatives graduées, tandis que le théorème d’Ado et le théorème PBW des algèbres de Lie colorées ont été prouvés par Scheunert [62]. Au cours des deux dernières décennies, de nombreux travaux ont concerné les algèbres de Lie colorées en mathématiques et en physique, voir [10, 16, 18, 31, 44, 73] pour plus de détails.

Les algèbres de Lie ternaires et plus généralement les algèbres de Lie  $n$ -aires sont une généralisation naturelle des algèbres de Lie binaires, où on considère des opérations  $n$ -aires et une généralisation de la condition de Jacobi. La généralisation la plus courante consiste à exprimer l’application adjointe comme une dérivation. Les algèbres correspondantes ont été appelées algèbres  $n$ -Lie. Ces algèbres ont été introduites et étudiées pour la première fois par Filippov dans [33], l’étude est complétée par Kasymov dans [43]. Dans le cas ternaire, ces algèbres sont apparues dans les bases mathématiques algébriques de la mécanique de Nambu développées par Takhtajan et Daletskii dans [26, 68, 69], comme une généralisation de la mécanique hamiltonienne impliquant plus d’un hamiltonien. En plus de la mécanique de Nambu, les algèbres  $n$ -Lie se sont révélées avoir de nombreuses applications en physique, comme dans la théorie des cordes, avec notamment les algèbres de Bagger-Lambert. La deuxième approche de la généralisation de la condition de Jacobi au cas  $n$ -aire consiste à considérer une sommation sur  $S_{2n-1}$  au lieu de  $S_3$ .

Les généralisations de type Hom des algèbres  $n$ -aires ont été examinées en premier lieu dans [11], où les Hom-algèbres  $n$ -aires de type Lie et de type associatif ont été introduites. Les identités habituelles sont déformées par des applications linéaires. Dans un cas particulier, on retrouve les algèbres Hom-Lie qui ont été motivées par des déformations quantiques des algèbres de champs de vecteurs comme les algèbres de Witt et de Virasoro. D’autres propriétés, méthodes de construction, exemples, cohomologie et extensions centrales des Hom-algèbres  $n$ -aires ont été étudiés dans [7–9].

La théorie de (co)homologie par rapport à la représentation adjointe pour les algèbres  $n$ -Lie a été introduite par Takhtajan dans [26, 69] et par Gautheron dans [35] du point de vue de la théorie de la déformation. La théorie générale de la cohomologie des algèbres  $n$ -Lie et des algèbres de Leibniz a été établie dans [22, 61] et des algèbres et superalgèbres  $n$ -Hom-Lie dans [1, 4, 5].

**Les systèmes triples de Lie :** Le concept de système triple de Lie a été introduit pour la première fois par Jacobson [42]. La formulation actuelle est due à Yamaguti [74]. En outre, il est apparu dans les travaux de Cartan sur la géométrie riemannienne [21]. Cette structure a été fortement développée pour les espaces symétriques et les espaces connexes. En effet, l'espace tangent d'un espace symétrique est un système triple de Lie. Il s'avère qu'il a des applications importantes en physique, en particulier dans la théorie des particules élémentaires et la théorie de la mécanique quantique, ainsi qu'en analyse numérique des équations différentielles. Il est devenu un sujet intéressant en mathématiques, leur structure a été étudiée en premier par Lister dans [51].

**Les  $\mathcal{O}$ -opérateurs :** Les  $\mathcal{O}$ -opérateurs ou les opérateurs de Rota-Baxter relatifs sur les algèbres de Lie sont apparus pour la première fois dans un article de B. A. Kupersmidt [48] en tant qu'opérateur analogue aux  $r$ -matrices classiques et aux structures de Poisson. Cependant, les opérateurs de Rota-Baxter ont été introduits par G. Baxter [15] dans son étude de la théorie des fluctuations en probabilité. Ensuite, ils sont développés par G.-C. Rota [60] en combinatoire. Ils ont des applications importantes dans les aspects algébriques de la renormalisation en théorie quantique des champs [25]. Les opérateurs de Rota-Baxter sur les algèbres de Lie (resp. les algèbres associatives) sont également liés à la décomposition des opérations en somme d'opérations algébriques. Dans [13], Les auteurs ont introduit la notion d'opérateur de Rota-Baxter sur une algèbre 3-Lie. Récemment, afin de construire des solutions de l'équation classique de 3-Lie Yang-Baxter, les auteurs dans [12] ont introduit une notion plus générale appelée opérateur de Rota-Baxter relatif à une représentation sur une algèbre 3-Lie.

La théorie des déformations utilisant des séries formelles et des cohomologies appropriées a été initiée par Gerstenhaber [36] pour les algèbres associatives. Nijenhuis et Richardson ont étendu cette étude aux algèbres de Lie [57]. Les déformations des algèbres 3-Lie et des systèmes triples de Lie ont été étudiées dans [32] et [47, 76] respectivement. Récemment, les déformations de certains opérateurs, des morphismes et des opérateurs de Rota-Baxter ont été fortement étudiés dans [6, 30, 34, 55, 70]. Une cohomologie est nécessaire pour contrôler les déformations et les problèmes d'extension d'une structure algébrique donnée. La cohomologie de diverses structures algébriques, telles que les algèbres associatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Leibniz, les algèbres pré-Lie et les algèbres  $n$ -Lie, sont bien connues. Récemment, la cohomologie des opérateurs de Rota-Baxter et des  $\mathcal{O}$ -opérateurs sur une algèbre de Lie et une algèbres associative a été développée dans [30, 70] respectivement. Dans [23, 71], les auteurs ont construit une 3-algèbre de Lie dont les éléments de Maurer-Cartan sont des  $\mathcal{O}$ -opérateurs twistés (opérateurs de Reynolds généralisés) sur une algèbre 3-Lie. Ils ont étudié la cohomologie et les déformations des opérateurs de Reynolds généralisés sur une algèbres 3-Lie.

Les opérateurs de Reynolds généralisés introduits par Uchino dans le contexte des algèbres

associatives [72] sont les analogues algébriques de la structure de Poisson twistée introduite et étudiée dans [46, 63]. Ils sont également liés aux NS-algèbres considérées par Leroux [50]. Les opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres de Lie et les algèbres de Leibniz ont été étudiés dans [27, 29]. Une cohomologie des opérateurs de Reynolds généralisés a été dérivée d'une  $L_\infty$ -algèbre compatible dont les éléments de Maurer-Cartan sont donnés par des opérateurs de Reynolds généralisés, voir [27, 28]. Une telle cohomologie peut être considérée comme la cohomologie de Hochschild (resp. Chevalley-Eilenberg) d'une algèbre de Lie à coefficients dans une représentation. Une cohomologie des opérateurs de Reynolds généralisés a été construite dans [29] comme une cohomologie de Loday-Pirashvili des algèbres de Leibniz. On peut voir aussi dans [20, 49] la version Hom du crochet de Nijenhuis et de la cohomologie des  $\mathcal{O}$ -opérateurs sur une algèbre de Lie.

L'objectif de cette thèse est d'étudier les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées ainsi que les opérateurs de Reynolds généralisés sur des systèmes triples de Lie munis de représentations (paire  $L.t.sRep$ ). L'étude concerne leurs structures, leurs cohomologies et leurs déformations. En premier lieu, on s'intéresse aux algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. Notre but dans la première partie est de fournir une cohomologie de ces algèbres, notamment une cohomologie régissant les déformations formelles à un paramètre. Dans la seconde partie, on étudie les déformations formelles des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées, ainsi que la notion d'opérateur de Nijenhuis sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée, qui pourrait donner lieu à des déformations infinitésimalement triviales. De plus, en relation avec ces opérateurs, on introduit la notion de structure produit sur les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. En deuxième lieu, on introduit la notion d'opérateur de Reynolds généralisé sur les systèmes triples de Lie et on construit une  $L_\infty$ -algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Reynolds généralisés. Ceci nous permet de définir la cohomologie de Yamaguti d'un opérateur de Reynolds généralisé. Ensuite, on étudie les déformations des opérateurs de Reynolds généralisés du point de vue cohomologique en déterminant la classe d'obstruction d'une déformation extensible d'ordre  $n$ . En dernier lieu, on introduit la structure de Nijenhuis. Cette dernière est liée à l'opérateur de Reynolds généralisé et on montre que toute algèbre NS-Lie est un système triple de NS-Lie.

En guise de préliminaires, on rappelle dans le premier chapitre la cohomologie des algèbres Hom-Lie et des systèmes triples de Lie. On montre aussi une correspondance entre les algèbres de Lie et les systèmes triples de Lie. Ensuite, après avoir introduit les notions essentielles concernant les espaces  $\Gamma$ -gradués, où  $\Gamma$  est un groupe abélien, on présente les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. En outre, on présente quelques constructions, en particulier le procédé du Twist de Yau. De plus, on montre qu'il y a une structure d'algèbre Hom-Leibniz colorée sur l'espace des objets fondamentaux.

Le deuxième chapitre est consacré à la cohomologie des algèbres 3-Hom-Lie colorées et

$n$ -Hom-Lie colorées. On commence par la définition des algèbres 3-Hom-Lie colorées et leurs modules. Une algèbre 3-Hom-Lie colorée avec son module est une paire 3-HomLieRep colorée. Par la suite, on introduit sa cohomologie de Chevalley-Eilenberg. On termine la première section en proposant un procédé qui permet de construire une paire 3-HomLieRep colorée en partant d'une paire Hom-LieRep colorée et une fonction quasi-trace. C'est la paire 3-HomLieRep colorée induite. Puis, on généralise les notions afin de définir la cohomologie des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. En effet, dans la deuxième section, on définit le module d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée suivie du produit semi-direct entre une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et un module. Dans la dernière section, on étudie la cohomologie des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées à coefficients dans un module.

Dans le troisième chapitre, on développe une théorie des déformations formelles  $t$ -paramétrées ( $t \in \mathbb{K}$ ) des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées s'appuyant sur la cohomologie. En premier lieu, on définit les déformations formelles, infinitésimales et d'ordre  $k$ . De plus, on définit un crochet sur l'espace des 2-cochaines dans le but de montrer que des 2-cochaines engendrent une déformation  $t$ -parameterée d'ordre  $k$  si et seulement si des conditions bien déterminées sont vérifiées. En conséquence, on constate que l'élément infinitésimal d'une telle déformation formelle est un 2-cocycle et que l'élément d'ordre  $k$  décrit une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. On étudie ensuite la notion d'équivalence des déformations et on prouve que leurs éléments infinitésimaux appartiennent à la même classe de cohomologie. En second lieu, on introduit les déformations infinitésimalement triviales. Ceci motive la construction des opérateurs de Nijenhuis sur les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées multiplicatives. En effet, toute déformation infinitésimalement triviale engendre un opérateur de Nijenhuis. Inversement, tout opérateur de Nijenhuis engendre une déformation infinitésimalement triviale. Ensuite, on définit une structure produit sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée comme étant un opérateur de Nijenhuis et une quasi-structure produit à la fois (un opérateur de Nijenhuis  $\mathcal{P}$  qui satisfait  $\mathcal{P}^2 = Id_{\mathfrak{g}}$ ). De plus, on montre qu'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  admet une structure produit si et seulement si  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_{\gamma}$  admet une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ , où  $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{g}_{\gamma})_+$  et  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{g}_{\gamma})_-$  sont des espaces propres. On termine le chapitre par un exemple.

Dans le quatrième chapitre, on introduit les opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire 3-HomLieRep colorée comme généralisation des opérateurs de Reynolds sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée. Auparavant, on présente la notion d'algèbre 3-Hom-Lie colorée de Reynolds. Ainsi, on donne la relation entre une algèbre Hom-Lie colorée de Reynolds et l'algèbre 3-Hom-Lie colorée de Reynolds induite et on établit une relation entre les opérateurs de Reynolds et les dérivations des algèbres 3-Hom-Lie colorées. Ensuite, motivé par le produit semi-direct twisté, on introduit l'opérateur de Reynolds généralisé sur une paire 3-HomLieRep colorée. De plus, on illustre une caractérisation de ces opérateurs en termes de graphe. Il en résulte, une

structure d'algèbre 3-Hom-Lie colorée sur l'espace des modules. Par la suite, on donne quelques constructions d'opérateurs de Reynolds généralisés, y compris la transformation de gauge, et des exemples. Dans la dernière section, on définit la notion de structure complexe généralisée twistée sur un module d'algèbre 3-Hom-Lie colorée. Une structure complexe généralisée twistée est un opérateur de Nijenhuis sur le produit semi-direct twistée qui satisfait une condition bien déterminée. De plus, on donne le lien entre les structures complexes généralisées twistées et les opérateurs de Reynolds généralisés, aussi quelques constructions et exemples.

Le chapitre 5 est consacré à la cohomologie de type Maurer-Cartan des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep. D'abord, on présente les opérateurs de Reynolds de poids non nul  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{K}$ ) sur un système triple de Lie. On montre qu'un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur un système triple de Lie donne lieu à une nouvelle structure de système triple de Lie tel qu'il soit un morphisme des systèmes triples de Lie. Puisque toute algèbre de Lie est un système triple de Lie, alors tout opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur une algèbre de Lie reste un opérateur de Reynolds sur le système triple de Lie induit mais de poids  $2\lambda$ . Puis, on généralise le concept afin d'obtenir la notion d'opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep. Après avoir caractérisé ces opérateurs en termes de graphe, on constate ainsi qu'ils conduisent à une structure de système triple de Lie sur l'espace des modules. En outre, on construit des opérateurs de Reynolds généralisés à partir d'une 1-cochaine bijective ou bien d'un 1-cocycle  $T$ -admissible. On conclut qu'un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire LieRep est aussi un opérateur de Reynolds généralisé sur la paire L.t.sRep induite. Ce paragraphe contient un exemple fondamental illustrant les principaux résultats. Dans le second paragraphe, on construit une  $L_\infty$ -algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep. Cette caractérisation des opérateurs de Reynolds généralisés nous permet d'introduire leur cohomologie de Yamaguti. Par la suite, on montre que cette dernière est décrite par la cohomologie de Yamaguti de l'espace des modules à coefficients dans une représentation correspondante. Dans le paragraphe 3, on définit les déformations formelles des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep. En outre, on introduit les déformations d'ordre  $n$  extensibles pour préciser une classe de cohomologie spéciale dite classe d'obstruction. En effet, une déformation d'ordre  $n$  est extensible si et seulement si la classe d'obstruction est triviale. Par conséquent, si la classe d'obstruction est triviale alors tout 1-cocycle est l'infinitésimal d'une déformation formelle.

Dans le chapitre 6, on aborde une nouvelle structure algébrique des algèbres 3-Hom-Lie colorées dite structure de Nijenhuis ou simplement les algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées dans la première section, qui est dite également, système triple de NS-Lie dans la seconde. Un système triple de NS-Lie donne lieu à un système triple de Lie avec un module sur lui-même. En outre, on révèle la relation entre la structure de Nijenhuis, les opérateurs de Nijenhuis, les opérateurs

de Reynolds et notamment les opérateurs de Reynolds généralisés. Pour conclure, on a réussi à montrer que les algèbres de Lie, les algèbres NS-Lie, les systèmes triples de Lie et les systèmes triples de NS-Lie sont étroitement liés au sens du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{NS-Lie\ alg.} (L, \circ, \vee) & \longrightarrow & \mathbf{NS-L.t.s} (L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]) \\
 \Downarrow \Uparrow & & \Downarrow \Uparrow \\
 \mathbf{LieRep\ pair.} (L, [\cdot, \cdot], \rho) & \longrightarrow & \mathbf{L.t.sRep\ pair} (L, [[\cdot, \cdot], \cdot], \theta_\rho).
 \end{array}$$

## Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle d'abord les généralités sur les algèbres Hom-Lie et des systèmes triples de Lie, ensuite la cohomologie de ces algèbres. De plus, on introduit les notions essentielles des espaces  $\Gamma$ -gradués ( $\Gamma$  est un groupe abélien) et on présente les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. En outre, on donne quelques constructions, par exemple le procédé du Twist de Yau. Aussi, on montre qu'on a une structure d'algèbre Hom-Leibniz colorée sur l'espace des objets fondamentaux.

Dans tout ce manuscrit,  $\mathbb{K}$  indiquera un corps commutatif de caractéristique zéro.

### 1.1 Les algèbres Hom-Lie : Généralités et cohomologie

La notion d'algèbre Hom-Lie a été introduite dans [17, 38, 54, 65]. Les auteurs dans [2] et [ ] ont construit un complexe de cochaînes  $\mathcal{C}_{HL}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  d'une algèbre Hom-Lie multiplicative  $\mathfrak{g}$  à coefficients dans elle-même qui définit la cohomologie  $\mathcal{H}_{HL}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

#### 1.1.1 Définition et exemples

**Définition 1.1.1.** Une algèbre Hom-Lie est un triplet  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$ , où  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel,  $[\cdot, \cdot]$  est une application bilinéaire antisymétrique et  $\alpha$  est une application linéaire satisfaisant l'identité Hom-Jacobi suivante :

$$[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + [\alpha(z), [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (1.1.1)$$

Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  et  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \cdot]', \alpha')$  deux algèbres Hom-Lie. Un morphisme d'algèbres Hom-Lie est une application  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  qui commute avec  $\alpha$  et qui vérifie  $\phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)]'$  pour tout  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

**Remarque 1.1.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  une algèbre Hom-Lie. Si  $\alpha = id_{\mathfrak{g}}$  alors l'identité (1.1.1) est la condition de Jacobi et l'algèbre définie est une algèbre de Lie. Toute algèbre de Lie est une algèbre Hom-Lie.

**Exemple 1.1.1.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  une algèbre de Lie et  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  un endomorphisme d'algèbre de Lie. Alors le triplet  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_\alpha, \alpha)$  est une algèbre Hom-Lie, où  $[\cdot, \cdot]_\alpha = \alpha \circ [\cdot, \cdot]$ .

**Exemple 1.1.2.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  et  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \cdot]', \alpha')$  deux algèbres Hom-Lie. Alors  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', [-, -], \alpha + \alpha')$  est une algèbre Hom-Lie, où l'application bilinéaire antisymétrique est donnée par :

$$[(x, x'), (y, y')] = ([x, y], [x', y']') \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ et } x', y' \in \mathfrak{g}'.$$

L'application linéaire  $\alpha + \alpha' : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  est définie par :

$$\alpha + \alpha'(x + x') = (\alpha(x), \alpha'(x')) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, x' \in \mathfrak{g}'.$$

**Exemple 1.1.3.** ( $Sl_2$  de Jackson)

Le  $Sl_2$  de Jackson est une  $q$ -déformation ( $q$  est un paramètre dans  $\mathbb{K}$ ) de  $Sl_2$  classique. Cette famille d'algèbres Hom-Lie a été introduite dans l'article [66]. Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  une base d'un espace vectoriel de dimension 3. On a une structure d'algèbre Hom-Lie définie par les crochets et l'application linéaire  $\alpha$  donnés par :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2qe_2, & [e_1, e_3] &= 2e_2, & [e_2, e_3] &= -\frac{1}{2}(1+q)e_1. \\ \alpha(e_1) &= qe_1, & \alpha(e_2) &= qe_2, & \alpha(e_3) &= qe_3. \end{aligned}$$

Cette algèbre n'est pas une algèbre de Lie pour  $q$  différent de 1.

Si  $q = 1$ , on retrouve l'algèbre de Lie  $Sl_2$  classique. Rappelons que  $Sl_2$  est l'ensemble des matrices carrées engendrée par la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de trace nulle.

## 1.1.2 Cohomologie des algèbres Hom-Lie

Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  une algèbre Hom-Lie. On définit, pour  $p \geq 1$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  des cochaines  $p$ -linéaires alternées comme suit :

une cochaîne  $\varphi \in \mathcal{C}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  est une application  $p$ -linéaire alternée  $\varphi : \mathfrak{g}^p \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfaisant

$$\alpha \circ \varphi(x_0, x_1, \dots, x_p) = \varphi(\alpha(x_0), \alpha(x_1), \dots, \alpha(x_p)) \quad \forall x_0, x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{g}.$$

**Définition 1.1.2.** Pour  $p \geq 1$ , on appelle opérateur cobord de l'algèbre Hom-Lie  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  l'application linéaire  $\delta_{HL}^p : \mathcal{C}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{C}_{HL}^{p+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  qui est définie par :

$$\begin{aligned} \delta_{HL}^p \varphi(x_0, x_1, \dots, x_p) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k [\alpha^{n-1}(x_k), \varphi(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_p)] \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} \varphi([x_i, x_j], \alpha(x_0), \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, \alpha(x_p)). \end{aligned}$$

Où  $\hat{x}_i$  signifie que  $x_i$  est omis.

**Définition 1.1.3.** L'espace des  $p$ -cocycles est défini par :

$$\mathcal{Z}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{\varphi \in \mathcal{C}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \mid \delta_{HL}^p \varphi = 0\}.$$

L'espace des  $p$ -cobords est défini par :

$$\mathcal{B}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{\varphi = \delta_{HL}^{p-1} \psi \mid \psi \in \mathcal{C}_{HL}^{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})\}.$$

**Proposition 1.1.1.** Soit  $\delta_{HL}^p : \mathcal{C}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{C}_{HL}^{p+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  l'opérateur cobord d'une algèbre Hom-Lie défini ci-dessus. Alors

$$\delta_{HL}^{p+1} \circ \delta_{HL}^p = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

**Remarque 1.1.2.** Notons que  $\mathcal{B}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{Z}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

**Définition 1.1.4.** Le  $p$ -groupe de cohomologie de l'algèbre Hom-Lie  $\mathfrak{g}$  est le quotient :

$$\mathcal{H}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{Z}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})}{\mathcal{B}_{HL}^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})}.$$

## 1.2 Systèmes triples de Lie : Définitions et cohomologie de Yamaguti

On rappelle dans cette section quelques concepts fondamentaux et on présente quelques résultats de Jacobson concernant Le lien entre les systèmes triples de Lie et les algèbres de Lie, voir [51].

### 1.2.1 Définitions et Notations

**Définitions 1.2.1.** Un système triple de Lie est un espace vectoriel  $L$  muni d'une application trilinéaire  $[\cdot, \cdot, \cdot] : \wedge^2 L \otimes L \rightarrow L$  qui vérifie les propriétés suivantes :

$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0, \tag{1.2.1}$$

$$[x, y, [z, t, e]] = [[x, y, z], t, e] + [z, [x, y, t], e] + [z, t, [x, y, e]], \quad \forall x, y, z, t, e \in L. \tag{1.2.2}$$

Un morphisme des systèmes triples de Lie  $\phi : (L, [\cdot, \cdot, \cdot]) \rightarrow (L', [\cdot, \cdot, \cdot]')$  est une application linéaire satisfaisant :

$$\phi([x, y, z]) = [\phi(x), \phi(y), \phi(z)]' \quad \forall x, y, z \in L.$$

L'application  $\phi$  est dite isomorphisme si elle est bijective.

**Notations 1.2.1.** On désigne par  $X$  le couple  $(x, y) \in L \otimes L$ . On définit sur  $L$  deux applications linéaires  $\mathfrak{K}(X)$  et  $\mathfrak{D}(X)$  par  $\mathfrak{K}(X)z = [z, x, y]$  et  $\mathfrak{D}(X)z = [x, y, z]$ . Alors les identités (1.2.1) et (1.2.2) peuvent être réécrites respectivement sous les formes suivantes :

$$\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{K}(\zeta(X)) - \mathfrak{K}(X) \quad \text{où} \quad \zeta(X) = y \otimes x,$$

$$\mathfrak{D}(X)[z_1, z_2, z_3] = [\mathfrak{D}(X)z_1, z_2, z_3] + [z_1, \mathfrak{D}(X)z_2, z_3] + [z_1, z_2, \mathfrak{D}(X)z_3].$$

Cette dernière signifie que  $\mathfrak{D}(X)$  est une dérivation.

## 1.2.2 Cohomologie de Yamaguti

Dans [74], K. Yamaguti a introduit la notion de représentation et de théorie de cohomologie des systèmes triples de Lie. Ensuite, les auteurs dans [39, 41, 47] ont étudié la théorie de cohomologie d'un point de vue différent. Le point de vue de K. Yamaguti est comme suit :

**Définition 1.2.1.** Une représentation  $(M, \theta)$  d'un système triple de Lie  $L$  sur un espace vectoriel  $M$  est une application bilinéaire  $\theta : \otimes^2 L \rightarrow \text{End}(M)$  qui satisfait les conditions suivantes :

$$\theta(z, t)\theta(x, y) - \theta(y, t)\theta(x, z) - \theta(x, [y, z, t]) + D(y, z)\theta(x, t) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\theta(z, t)D(x, y) - D(x, y)\theta(z, t) + \theta([x, y, z], t) + \theta(z, [x, y, t]) = 0 \quad \forall x, y, z, t \in L, \quad (1.2.4)$$

où  $D(x, y) = \theta(y, x) - \theta(x, y)$ .

Une paire **L.t.sRep**  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  est un système triple de Lie avec une représentation.

### Remarques 1.2.1.

- On peut conclure de l'Eq.(1.2.4) que :

$$D(z, t)D(x, y) - D(x, y)D(z, t) + D([x, y, z], t) + D(z, [x, y, t]) = 0. \quad (1.2.5)$$

- Si  $M = L$ , alors  $\mathfrak{R}$  est une représentation de  $L$  sur lui-même. C'est la **représentation régulière**.

Une représentation d'une algèbre de Lie  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est une paire  $(M, \rho)$ , où  $M$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\rho : L \rightarrow \text{End}(M)$  est un morphisme d'algèbres de Lie. Autrement dit,  $\rho$  est une application linéaire telle que :

$$\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) \quad \forall x, y \in L.$$

Notons qu'une paire **LieRep**  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \rho)$  est une algèbre de Lie avec une représentation.

**Théorème 1.2.1.** Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \rho)$  une paire **LieRep**. Alors  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta_\rho)$  est une paire **L.t.sRep** où :

$$[x, y, z] = [[x, y], z] \quad \text{et} \quad \theta_\rho(x, y) = \rho(y)\rho(x) \quad \forall x, y, z \in L. \quad (1.2.6)$$

Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  une paire **L.t.sRep**. Pour chaque  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{C}_{L.t.s.}^{2n-1}(L, M)$  l'ensemble de  $(2n - 1)$ -cochaines de  $L$  à coefficients dans  $M$ :  $\psi \in \mathcal{C}_{L.t.s.}^{2n-1}(L, M)$  est une application multilinéaire  $\psi : \times^{2n-1} L \rightarrow M$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x, x, y) &= 0, \\ \cup_{x, y, z} \psi(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

L'opérateur cobord de Yamaguti  $\delta^{2n-1} : \mathcal{C}_{L.t.s.}^{2n-1}(L, M) \rightarrow \mathcal{C}_{L.t.s.}^{2n+1}(L, M)$  est défini par :

$$\begin{aligned} & \delta^{2n-1}\psi(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \\ &= \theta(x_{2n}, x_{2n+1})\psi(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}) - \theta(x_{2n-1}, x_{2n+1})\psi(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n}) \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} D(x_{2k-1}, x_{2k})\psi(x_1, x_2, \dots, \widehat{x}_{2k-1}, \widehat{x}_{2k}, \dots, x_{2n+1}) \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \psi(x_1, x_2, \dots, \widehat{x}_{2k-1}, \widehat{x}_{2k}, \dots, [x_{2k-1}, x_{2k}, x_j], \dots, x_{2n+1}). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Où  $\widehat{a}$  signifie que  $a$  est omis.

L'opérateur cobord est de carré nul ( $\delta^{2n+1} \circ \delta^{2n-1} = 0$ ), alors il forme avec l'espace des cochaines un complexe comme suit :

$$\mathcal{C}_{L.t.s.}^1(L, M) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{C}_{L.t.s.}^3(L, M) \xrightarrow{\delta^3} \mathcal{C}_{L.t.s.}^5(L, M) \longrightarrow \dots$$

Par conséquent, on obtient le groupe de cohomologie de Yamaguti :

$$\mathcal{H}_{L.t.s.}^\bullet(L, M) = \mathcal{Z}_{L.t.s.}^\bullet(L, M) / \mathcal{B}_{L.t.s.}^\bullet(L, M),$$

où  $\mathcal{Z}_{L.t.s.}^\bullet(L, M)$  est l'espace des cocycles et  $\mathcal{B}_{L.t.s.}^\bullet(L, M)$  est l'espace des cobords, voir [74, 76] pour plus de détails.

**Définition 1.2.2.** Une cochaîne  $\varphi \in \mathcal{C}_{L.t.s.}^1(L, M)$  est une cocycle si elle vérifie :

$$D(x_1, x_2)\varphi(x_3) - \theta(x_1, x_3)\varphi(x_2) + \theta(x_2, x_3)\varphi(x_1) - \varphi([x_1, x_2, x_3]) = 0. \quad (1.2.8)$$

Une 3-cochaîne  $\mathcal{H} \in \mathcal{C}_{L.t.s.}^3(L, M)$  est un 3-cobord s'il exist  $\varphi \in \mathcal{C}_{L.t.s.}^1(L, M)$  tel que  $\mathcal{H} = \delta^1\varphi$ . Une 3-cochaîne est un 3-cocycle si elle vérifie pour tout  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in L$  :

$$\mathcal{H}(x_1, x_1, x_2) = 0, \quad (1.2.9)$$

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{H}(x_2, x_3, x_1) + \mathcal{H}(x_3, x_1, x_2) = 0, \quad (1.2.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]) + D(x_1, x_2)\mathcal{H}(y_1, y_2, y_3) - \mathcal{H}([x_1, x_2, y_1], y_2, y_3) - \mathcal{H}(y_1, [x_1, x_2, y_2], y_3) \\ &= \mathcal{H}(y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]) + \theta(y_2, y_3)\mathcal{H}(x_1, x_2, y_1) - \theta(y_1, y_3)\mathcal{H}(x_1, x_2, y_2) + D(y_1, y_2)\mathcal{H}(x_1, x_2, y_3). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

**Théorème 1.2.2.** Soit  $\phi \in \mathcal{Z}_{Lie}^2(L, M)$ . Alors  $\omega(x, y, z) = \phi([x, y], z) - \rho(z)\phi(x, y)$  appartient à l'espace des 3-cocycles de la paire  $L.t.sR\theta\rho(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta_\rho)$  donnée dans le Théorème 1.2.1.

### 1.3 Les algèbres $n$ -Hom-Lie colorées : Définitions et constructions

Dans ce paragraphe, on rappelle la définition des espaces gradués, du bicaractère et des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées introduites par I. Bakayoko et S. Silvestrov dans [14] généralisant les super-algèbres  $n$ -Hom-Lie. En outre, on explique le procédé du Twist de Yau qui nous permet d'obtenir une structure d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée à partir d'une algèbre  $n$ -Lie colorée. De plus, on montre qu'on a une structure d'algèbre Hom-Leibniz colorée sur l'espace des objets fondamentaux.

### 1.3.1 Définitions et notions de base

Une graduation d'un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  sur un groupe abélien  $\Gamma$  est la donnée d'une décomposition en somme directe de sous-espaces  $(\mathfrak{g}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ , telle que  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$ . On dit que  $\mathfrak{g}$  est  $\Gamma$ -gradué. Un élément  $x$  de  $\mathfrak{g}_\gamma$  est dit homogène de degré  $\gamma$ . L'ensemble des éléments homogènes est indiqué par  $\mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . Si le corps de base est considéré comme un espace vectoriel gradué, naturellement la graduation de  $\mathbb{K}$  est donnée par  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}_\gamma = \{0\}$  si  $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ . Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux espaces vectoriels  $\Gamma$ -gradués, une application linéaire  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  est dite homogène de degré  $\zeta \in \Gamma$ , si  $f(x)$  est homogène de degré  $\gamma + \zeta$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}_\gamma$ . L'ensemble de toutes les applications linéaires de degré  $\zeta$  sera noté par  $Hom(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_\zeta$ . Ensuite, l'espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué de toutes les applications linéaires de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{h}$  sera noté  $Hom(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \bigoplus_{\zeta \in \Gamma} Hom(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_\zeta$ . Une Hom-algèbre  $\Gamma$ -graduée  $(\mathfrak{g}, \cdot, \alpha)$  est constitué d'un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué, d'une multiplication et d'une application linéaire de degré zéro. Pour plus de détails sur les structures algébriques graduées, voir [62].

**Définition 1.3.1.** Soit  $\Gamma$  un groupe abélien. Une application linéaire  $\varepsilon : \Gamma \otimes \Gamma \rightarrow \mathbb{K}^*$  est appelée bicaractère si elle satisfait les propriétés suivantes :

$$\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2)\varepsilon(\gamma_2, \gamma_1) = 1, \quad (1.3.1)$$

$$\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2 + \gamma_3) = \varepsilon(\gamma_1, \gamma_2)\varepsilon(\gamma_1, \gamma_3), \quad (1.3.2)$$

$$\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_3) = \varepsilon(\gamma_1, \gamma_3)\varepsilon(\gamma_2, \gamma_3) \quad \forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma. \quad (1.3.3)$$

En particulier, les identités ci-dessus implique les propriétés suivantes :

$$\varepsilon(\gamma, 0) = \varepsilon(0, \gamma) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(\gamma, \gamma) = \pm 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

On suppose que le groupe abélien  $\Gamma$  et le bicaractère  $\varepsilon$  sont fixés tout au long de ce manuscrit.

Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$  un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué. Si  $x$  et  $x'$  sont deux éléments homogènes de degré  $\gamma$  et  $\gamma'$  respectivement, alors au lieu d'écrire  $\varepsilon(\gamma, \gamma')$  on écrit simplement  $\varepsilon(x, x')$ . Si  $X = (x_1, \dots, x_p) \in \otimes^p \mathfrak{g}$ , on établit :

$$\varepsilon(x, X_i) = \varepsilon(x, \sum_{k=1}^{i-1} x_k) \quad \text{pour } i > 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x, X_i) = 1 \quad \text{pour } i = 1,$$

$$\varepsilon(x, X^i) = \varepsilon(x, \sum_{k=i+1}^p x_k) \quad \text{pour } i < p \quad \text{et} \quad \varepsilon(x, X^i) = 1 \quad \text{pour } i = p,$$

$$\varepsilon(x, X_i^j) = \varepsilon(x, \sum_{k=i}^j x_k).$$

Sur l'espace gradué  $gl(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} gl(\mathfrak{g})_\gamma$ , où :

$$gl(\mathfrak{g})_\gamma = \{f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/f(\mathfrak{g}_{\gamma'}) \subset \mathfrak{g}_{\gamma+\gamma'} \text{ et } \alpha \circ f = f \circ \alpha \quad \forall \gamma' \in \Gamma\}.$$

On définit l'algèbre linéaire générale Hom-Lie colorée par le commutateur gradué :

$$[f, g] = f \circ g - \varepsilon(f, g)g \circ f \quad \forall f, g \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

**Définition 1.3.2.** [14] Une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée est un quadruplet  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  constitué d'un espace vectoriel gradué  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$ , d'un bicaractère  $\varepsilon$ , d'une application  $n$ -linéaire  $[\cdot, \dots, \cdot] : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  et d'une application linéaire de degré zéro satisfaisant ces identités :

$$[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = -\varepsilon(x_i, x_{i+1}) [x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n], \quad (1.3.4)$$

$$\begin{aligned} & [\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n-1}), [y_1, y_2, \dots, y_n]] \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i) [\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, x_2, \dots, y_i], \alpha(y_{i+1}), \dots, \alpha(y_n)]. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

L'identité (1.3.5) est appelée identité de  $\varepsilon$ - $n$ -Hom-Jacobi. La condition (1.3.4) est équivalente à l'équation :

$$[x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n] = -\varepsilon(x_i, X_{i+1}^{j-1}) \varepsilon(X_{i+1}^{j-1}, x_j) \varepsilon(x_i, x_j) [x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n]. \quad (1.3.6)$$

**Définition 1.3.3.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  et  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \dots, \cdot]', \varepsilon, \alpha')$  deux algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. Une application linéaire de degré zéro  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  est dite **morphisme d'algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées**, si elle satisfait les conditions suivantes :

$$f \circ \alpha = \alpha' \circ f,$$

$$f([x_1, \dots, x_n]) = [f(x_1), \dots, f(x_n)]' \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}).$$

**Définition 1.3.4.** Une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est dite :

- **multiplicative** si  $\alpha[x_1, \dots, x_n] = [\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)]$ ,
- **régulière** si  $\alpha$  est un automorphisme,
- **involutive** si  $\alpha^2 = Id$ .

**Remarques 1.3.1.**

1. Si  $\Gamma = \{0\}$ , le groupe trivial, on retrouve les algèbres  $n$ -Hom-Lie.
2. Si  $\Gamma = \mathbb{Z}_2$  et  $\varepsilon(x, y) = (-1)^{|x||y|}$ , on trouve les  $n$ -Hom-Lie super-algèbres.
3. Si  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), on parle des algèbres Hom-Lie colorées (resp. des algèbres 3-Hom-Lie colorées).
4. Si  $\alpha = Id$ , on trouve les algèbres  $n$ -Lie colorées.

**Définition 1.3.5.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Alors :

1. Un sous-espace  $\Gamma$ -gradué  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  est une **Hom-sous-algèbre colorée** de  $\mathfrak{g}$  si :

$$\alpha(\mathfrak{h}_{\gamma_i}) \subseteq \mathfrak{h}_{\gamma_i} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}_{\gamma_1}, \mathfrak{h}_{\gamma_2}, \dots, \mathfrak{h}_{\gamma_n}] \subseteq \mathfrak{h}_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma.$$

2. Un **Hom-idéal coloré**  $\mathbb{I}$  de  $\mathfrak{g}$  est une Hom-sous-algèbre coloré de  $\mathfrak{g}$  tel que :

$$[\mathbb{I}_{\gamma_1}, \mathfrak{g}_{\gamma_2}, \dots, \mathfrak{g}_{\gamma_n}] \subseteq \mathbb{I}_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma.$$

3. Le **centre** de  $\mathfrak{g}$  est l'ensemble  $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y_1, \dots, y_{n-1}] = 0, \forall y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathfrak{g}\}$ . Il est clair que  $Z(\mathfrak{g})$  est un Hom-idéal coloré de  $\mathfrak{g}$ .

### 1.3.2 Twist de Yau des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Dans le théorème suivant, on construit une nouvelle algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée en partant d'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et un endomorphisme. On dit qu'elle est obtenue par le procédé du **Twist de Yau**.

**Théorème 1.3.1.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et  $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  un endomorphisme d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée de degré zéro. Alors  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_{\beta}, \varepsilon, \beta \circ \alpha)$ , où  $[\cdot, \dots, \cdot]_{\beta} = \beta \circ [\cdot, \dots, \cdot]$ , est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

En outre, soient  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \dots, \cdot]', \varepsilon, \alpha')$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et  $\beta' : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}'$  un endomorphisme d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée de degré zéro. Si  $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$  est un morphisme satisfaisant  $f \circ \beta = \beta' \circ f$ , alors :

$$f : (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_{\beta}, \varepsilon, \beta \circ \alpha) \longrightarrow (\mathfrak{g}', [\cdot, \dots, \cdot]'_{\beta'}, \varepsilon, \beta' \circ \alpha')$$

est aussi un morphisme d'algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées.

**Preuve 1.3.1.** L'application  $n$ -linéaire  $[\cdot, \dots, \cdot]_{\beta}$  est  $\varepsilon$ -antisymétrique qui vérifie l'identité  $\varepsilon$ - $n$ -Hom-Jacobi (1.3.5). En effet :

$$\begin{aligned} & [\beta \circ \alpha(x_1), \dots, \beta \circ \alpha(x_{n-1}), [y_1, \dots, y_n]_{\beta}]_{\beta} \\ &= \beta^2([\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n-1}), [y_1, \dots, y_n]]) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i) \beta^2([\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, x_2, \dots, y_i] \alpha(y_{i+1}), \dots, \alpha(y_n)]) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i) [\beta \circ \alpha(y_1), \dots, \beta \circ \alpha(y_{i-1}), [x_1, x_2, \dots, y_i]_{\beta}, \beta \circ \alpha(y_{i+1}), \dots, \beta \circ \alpha(y_n)]_{\beta}. \end{aligned}$$

Donc  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_{\beta}, \varepsilon, \beta \circ \alpha)$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. La seconde assertion découle de :

$$f([x_1, \dots, x_n]_{\beta}) = [f \circ \beta(x_1), \dots, f \circ \beta(x_n)]' = [\beta' \circ f(x_1), \dots, \beta' \circ f(x_n)]' = [f(x_1), \dots, f(x_n)]'_{\beta'}.$$

En particulier, on se sert d'une algèbre  $n$ -Lie colorée et d'un morphisme d'algèbre  $n$ -Lie colorée pour construire une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée comme suit :

**Corollaire 1.3.1.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon)$  une algèbre  $n$ -Lie colorée et  $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  un endomorphisme d'algèbre  $n$ -Lie colorée. Alors  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_{\alpha}, \varepsilon, \alpha)$ , où  $[\cdot, \dots, \cdot]_{\alpha} = \alpha \circ [\cdot, \dots, \cdot]$ , est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

**Exemple 1.3.1.** *La version graduée de  $Sl(2, \mathbb{C})$ .*

Soit  $Sl(2, \mathbb{C})$  un espace vectoriel  $\mathbb{Z}_2^3$ -gradué :  $Sl(2, \mathbb{C}) = Sl(2, \mathbb{C})_{(1,1,0)} \oplus Sl(2, \mathbb{C})_{(1,0,1)} \oplus Sl(2, \mathbb{C})_{(0,1,1)}$  avec une base  $e_1 \in Sl(2, \mathbb{C})_{(1,1,0)}$ ,  $e_2 \in Sl(2, \mathbb{C})_{(1,0,1)}$  et  $e_3 \in Sl(2, \mathbb{C})_{(0,1,1)}$ . Les sous espaces homogènes de  $Sl(2, \mathbb{C})$  gradués par les éléments de  $\mathbb{Z}_2^3$  différents de  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$  et  $(1,1,0)$  sont nuls, donc ils sont omis. La multiplication  $[\cdot, \cdot] : Sl(2, \mathbb{C}) \times Sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow Sl(2, \mathbb{C})$  définie, dans la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , par :

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1,$$

fait de  $Sl(2, \mathbb{C})$  une algèbre de Lie colorée de dimension 3. On munit cette algèbre de Lie colorée avec une structure Hom, pour cela on considère une application linéaire de degré zéro  $\alpha : Sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow Sl(2, \mathbb{C})$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemple 1.3.2.** Soient  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\varepsilon((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (-1)^{i_1 j_2 - i_2 j_1}$  et  $\mathfrak{g}$  un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0,0)} \oplus \mathfrak{g}_{(0,1)} \oplus \mathfrak{g}_{(1,0)} \oplus \mathfrak{g}_{(1,1)},$$

où :  $\mathfrak{g}_{(0,0)} = Vect(e_1, e_2)$ ,  $\mathfrak{g}_{(0,1)} = Vect(e_3)$ ,  $\mathfrak{g}_{(1,0)} = Vect(e_4)$ , et  $\mathfrak{g}_{(1,1)} = Vect(e_5)$ .

Le crochet  $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  défini dans la base  $\{e_i \mid i = 1, \dots, 5\}$  par :

$$[e_2, e_3, e_4, e_5] = e_1, \quad [e_1, e_3, e_4, e_5] = e_2, \quad [e_1, e_2, e_4, e_5] = e_3, \\ [e_1, e_2, e_3, e_4] = 0, \quad [e_1, e_2, e_3, e_5] = 0$$

forme une algèbre 4-Lie colorée de dimension 5 sur  $\mathfrak{g}$ .

Maintenant, on définit un morphisme  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  par :

$$\alpha(e_1) = e_2, \quad \alpha(e_2) = e_1, \quad \alpha(e_i) = e_i, \quad i = 3, 4, 5.$$

Alors  $\mathfrak{g}_\alpha = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]_\alpha, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre 4-Hom-Lie colorée, où le nouveau crochet est donné par :

$$[e_2, e_3, e_4, e_5]_\alpha = e_2, \quad [e_1, e_3, e_4, e_5]_\alpha = e_1, \quad [e_1, e_2, e_4, e_5]_\alpha = e_3, \\ [e_1, e_2, e_3, e_4]_\alpha = 0, \quad [e_1, e_2, e_3, e_5]_\alpha = 0.$$

Soit  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée multiplicative. Pour  $p \geq 0$ , on définit l'algèbre  $p$ -dérivée de  $\mathcal{G}$  par :

$$\mathcal{G}^p = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]^p = \alpha^{2p-1} \circ [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha^{2p}).$$

Notons que  $\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}^1 = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]^1 = \alpha \circ [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha^2)$ .

**Corollaire 1.3.2.** Avec les notations ci-dessus,  $\mathcal{G}^p$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée pour tout  $p \geq 0$ .

**Lemme 1.3.1.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et  $\mathfrak{h}$  est un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué. S'il existe une application linéaire bijective de degré zéro  $f : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ , alors  $(\mathfrak{h}, [\cdot, \dots, \cdot]', \varepsilon, f^{-1} \circ \alpha \circ f)$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée, où le crochet  $[\cdot, \dots, \cdot]'$  est défini par :

$$[x_1, \dots, x_n]' = f^{-1} \circ [f(x_1), \dots, f(x_n)] \quad \forall x_i \in \mathfrak{h}.$$

De plus,  $f$  est un morphisme d'algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées.

**Proposition 1.3.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée régulière, alors  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_{\alpha^{-1}} = \alpha^{-1} \circ [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon)$  est une algèbre  $n$ -Lie colorée.

**Corollaire 1.3.3.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée avec  $n \geq 3$ . Soient  $a_1, \dots, a_p \in \mathfrak{g}_0$  tel que  $\alpha(a_i) = a_i \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$ . Alors,  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \dots, \cdot\}, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre de  $(n - p)$ -Hom-Lie colorée, où :

$$\{x_1, \dots, x_{n-p}\} = [a_1, \dots, a_p, x_1, \dots, x_{n-p}] \quad \forall x_1, \dots, x_{n-p} \in \mathfrak{g}. \quad (1.3.7)$$

### 1.3.3 Les algèbres Hom-Leibniz colorées

Dans ce paragraphe on montre que pour une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée, l'espace  $\wedge^{n-1} \mathfrak{g}$  appelé espace des objets fondamentaux noté  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$  est muni d'une structure d'algèbre Hom-Leibniz colorée .

**Définition 1.3.6.** Une algèbre **Hom-Leibniz colorée** est un quadruplet  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  constitué d'un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $\mathcal{L}$ , d'un bicaractère  $\varepsilon$ , d'une application bilinéaire de degré zéro  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  et d'un homomorphisme de degré zéro  $\alpha : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  satisfaisant pour tout élément homogène  $x, y, z \in \mathcal{L}$

$$[\alpha(x), [y, z]] - \varepsilon(x, y)[\alpha(y), [x, z]] = [[x, y], \alpha(z)] \quad (\varepsilon - \text{identité Hom-Leibniz}). \quad (1.3.8)$$

En particulier, si  $\alpha$  est un morphisme d'algèbre Hom-Leibniz colorée (c-à-d.  $\alpha \circ [\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot] \circ \alpha^{\otimes 2}$ ) on dit que  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre Hom-Leibniz colorée multiplicative.

Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée, on définit l'espace des objets fondamentaux par l'espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) := \wedge^{n-1} \mathfrak{g}$ . Pour un objet fondamental  $X = x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \in \mathcal{L}$ , on définit l'adjointe  $ad_X$  comme une application linéaire dans  $\mathfrak{g}$  par :

$$ad_X \cdot y = [x_1, \dots, x_{n-1}, y]. \quad (1.3.9)$$

On définit une application linéaire  $\tilde{\alpha} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  par :

$$\tilde{\alpha}(X) = \alpha(x_1) \wedge \dots \wedge \alpha(x_{n-1}). \quad (1.3.10)$$

Alors l'identité de  $\varepsilon$ - $n$ -Hom-Jacobi (1.3.5) peut s'écrire en fonction de l'adjointe comme suit :

$$ad_{\tilde{\alpha}(X)} \cdot [y_1, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i)[\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), ad_X \cdot y_i, \dots, \alpha(y_n)].$$

Maintenant, on définit une application bilinéaire de degré zéro  $[\cdot, \cdot]_\alpha : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$  par :

$$[X, Y]_\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(X, Y_i) (\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), ad_X \cdot y_i, \dots, \alpha(y_{n-1})). \quad (1.3.11)$$

**Proposition 1.3.2.** Avec les notations ci-dessus, l'adjointe  $ad$  vérifie l'équation suivante :

$$ad_{[X, Y]_\alpha} \cdot \alpha(z) = ad_{\tilde{\alpha}(X)} \cdot (ad_Y \cdot z) - \varepsilon(X, Y) ad_{\tilde{\alpha}(Y)} \cdot (ad_X \cdot z) \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}(\mathcal{L}(\mathfrak{g})), z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (1.3.12)$$

En outre, le quadruplet  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot]_\alpha, \varepsilon, \tilde{\alpha})$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

**Preuve 1.3.2.** Il est facile de montrer que les identités (1.3.5) et (1.3.12) sont équivalentes. Pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ , l'identité de  $\varepsilon$ -Hom-Leibniz (1.3.8) peut s'écrire en fonction du crochet  $[\cdot, \cdot]_\alpha$  et de l'application linéaire  $\tilde{\alpha}$  comme suit :

$$[\tilde{\alpha}(X), [Y, Z]_\alpha]_\alpha - \varepsilon(X, Y) [\tilde{\alpha}(Y), [X, Z]_\alpha]_\alpha = [[X, Y]_\alpha, \tilde{\alpha}(Z)]_\alpha. \quad (1.3.13)$$

On a :

$$\begin{aligned} & [\tilde{\alpha}(X), [Y, Z]_\alpha]_\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j < i}^{n-1} \varepsilon(X, Z_j) \varepsilon(Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, \alpha(ad_X z_j), \dots, \alpha(ad_Y z_i), \dots, \alpha^2(z_{n-1})) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j > i}^{n-1} \varepsilon(X, Y + Z_j) \varepsilon(Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, \alpha(ad_X z_i), \dots, \alpha(ad_Y z_j), \dots, \alpha^2(z_{n-1})) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(X + Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, ad_{\tilde{\alpha}(X)} \cdot ad_Y z_i, \dots, \alpha^2(z_{n-1})). \end{aligned}$$

Puisque le crochet  $[\cdot, \cdot]_\alpha$  est  $\varepsilon$ -antisymétrique, alors on obtient :

$$\begin{aligned} & [\tilde{\alpha}(Y), [X, Z]_\alpha]_\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j < i}^{n-1} \varepsilon(Y, Z_j) \varepsilon(X, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, \alpha(ad_Y z_j), \dots, \alpha(ad_X z_i), \dots, \alpha^2(z_{n-1})) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j > i}^{n-1} \varepsilon(Y, X) \varepsilon(Y, Z_j) \varepsilon(X, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, \alpha(ad_Y z_i), \dots, \alpha(ad_X z_j), \dots, \alpha^2(z_{n-1})) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(X + Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, ad_{\tilde{\alpha}(Y)} \cdot ad_X z_i, \dots, \alpha^2(z_{n-1})). \end{aligned}$$

Le côté droit de l'Eq.(1.3.13) est égal à :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(X + Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, (ad_{\tilde{\alpha}(X)} \cdot ad_Y z_i) - \varepsilon(X, Y) ad_{\tilde{\alpha}(Y)} \cdot ad_X z_i), \dots, \alpha^2(z_{n-1})). \quad (1.3.14)$$

D'autre part, on calcule le côté gauche de l'Eq.(1.3.13), on obtient :

$$[[X, Y]_\alpha, \tilde{\alpha}(Z)]_\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(X, Y_j) \varepsilon(X, Z_i) \varepsilon(Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, [\alpha(y_1), \dots, ad_{XZ_j}, \dots, \alpha(y_{n-1}), \alpha(z_i)], \dots, \alpha^2(z_{n-1})) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(X + Y, Z_i) (\alpha^2(z_1), \dots, \alpha^2(z_{i-1}), ad_{[X,Y]_\alpha} \alpha(z_i), \dots, \alpha^2(z_{n-1})).
 \end{aligned}$$

D'après l'Eq.(1.3.12), l'identité de  $\varepsilon$ -Hom-Leibniz est vérifiée.

## Cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Le but de ce chapitre est de construire une cohomologie des algèbres 3-Hom-Lie colorées et  $n$ -Hom-Lie colorées.

### 2.1 Les algèbres 3-Hom-Lie colorées : représentations et cohomologie

D'abord, on présente une théorie des représentations des algèbres 3-Hom-Lie colorées qui généralise la théorie introduite par Zhang dans [75]. Ensuite, on construit une paire 3-HomLieRep colorée à partir d'une paire HomLieRep colorée et une fonction quasi-trace. De plus, on présente la cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres 3-Hom-Lie colorées.

#### 2.1.1 Représentations des algèbres 3-Hom-Lie colorées

**Définition 2.1.1.** Une algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$  muni d'un crochet de degré zéro  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  et d'une application linéaire  $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  de degré zéro qui satisfont :

$$[x, y] = -\varepsilon(x, y)[y, x], \quad (2.1.1)$$

$$\cup_{x, y, z} \varepsilon(z, x)[\alpha(x), [y, z]] = 0. \quad (2.1.2)$$

où  $\cup_{x, y, z}$  est la somme cyclique sur  $x, y, z$ . Une représentation de  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  sur un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $M$  est une application linéaire de degré zéro  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow M$  et un endomorphisme  $\nu$  de  $M$  de degré zéro satisfaisant :

$$\varrho(\alpha(x)) \circ \nu = \nu \circ \varrho(x), \quad (2.1.3)$$

$$\varrho([x, y]) \circ \nu = \varepsilon(y, x)\varrho(\alpha(x)) \circ \varrho(y) - \varrho(\alpha(y)) \circ \varrho(x) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (2.1.4)$$

On dit qu'on a une paire **Hom-LieRep colorée** et on s'y réfère avec le quintuplet  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$ .

**Définition 2.1.2.** Une algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$  muni d'une application trilinéaire  $\varepsilon$ -antisymétrique de degré zéro  $[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  et d'une application linéaire  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré zéro qui vérifient :

$$\begin{aligned} & [[x_1, x_2, y_1], \alpha(y_2), \alpha(y_3)] + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)[\alpha(y_1), [x_1, x_2, y_2], \alpha(y_3)] \\ & + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)[\alpha(y_1), \alpha(y_2), [x_1, x_2, y_3]] - [\alpha(x_1), \alpha(x_2), [y_1, y_2, y_3]] = 0, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

pour tout  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ .

**Définition 2.1.3.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  et  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \cdot, \cdot]', \varepsilon, \alpha')$  deux algèbres 3-Hom-Lie colorées. Une application linéaire de degré zéro  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  est un **morphisme** d'algèbres 3-Hom-Lie colorées si elle satisfait :

$$\begin{aligned} \phi \circ \alpha &= \alpha' \circ \phi, \\ \phi([x, y, z]) &= [\phi(x), \phi(y), \phi(z)]' \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre 3-Hom-Lie colorée et  $M$  un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué. On définit une application bilinéaire  $\varepsilon$ -antisymétrique de degré zéro  $\rho : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(M)$  et un endomorphisme  $\mu$  dans  $M$  qui satisfont pour tout  $x_i, y_i \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}), 1 \leq i \leq 3$  :

$$\rho(\alpha(x_1), \alpha(x_2)) \circ \mu = \mu \circ \rho(x_1, x_2), \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \rho(\alpha(x_1), \alpha(x_2))\rho(y_1, y_2) - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\rho(\alpha(y_1), \alpha(y_2))\rho(x_1, x_2) \\ & = \rho([x_1, x_2, y_1], \alpha(y_2)) \circ \mu + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\rho(\alpha(y_1), [x_1, x_2, y_2]) \circ \mu, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned} & \rho([x_1, x_2, x_3], \alpha(y_1)) \circ \mu = \rho(\alpha(x_1), \alpha(x_2))\rho(x_3, y_1) \\ & + \varepsilon(x_1, x_2 + x_3)\rho(\alpha(x_2), \alpha(x_3))\rho(x_1, y_1) - \varepsilon(x_2, x_3)\rho(\alpha(x_1), \alpha(x_3))\rho(x_2, y_1). \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

**Définition 2.1.4.** Avec les notations ci-dessus,  $(M, \rho, \mu)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , ou un  $\mathfrak{g}$ -module. Une algèbre 3-Hom-Lie colorée avec son module forment une paire 3-HomLieRep colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$ .

On définit

$$ad : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad ad_{x,y}(z) = [x, y, z].$$

On constate que  $(\mathfrak{g}, ad, \alpha)$  est une représentation de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . C'est la représentation adjointe.

## 2.1.2 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Définition 2.1.5.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire 3-HomLieRep colorée, l'ensemble  $\mathfrak{C}_{\alpha, \mu}^p(\mathfrak{g}, M) = \{\psi : (\wedge^2 \mathfrak{g})^{\otimes p-1} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow M \mid \psi \circ \alpha = \mu \circ \psi\}, p \geq 1$  est l'espace  $\Gamma$ -gradué des  $p$ -cochaines de  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $M$ .

**Définition 2.1.6.** Soit  $\psi \in \mathfrak{C}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M)$  une  $p$ -cochaîne d'une algèbre 3-Hom-Lie colorée. Un opérateur cobord  $\delta^p$  agissant sur une  $p$ -cochaîne est donné par :

$$\begin{aligned} & \delta^p \psi(x_1, \dots, x_{2p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=2i+1}^{2p+1} (-1)^i \varepsilon(x_{2i-1} + x_{2i}, x_{2i+1} + \dots + x_{j-1}) \psi(\alpha(x_1), \dots, \widehat{\alpha(x_{2i-1})}, \widehat{\alpha(x_{2i})}, \dots, [x_{2i-1}, x_{2i}, x_j], \dots, \alpha(x_{2p+1})) \\ &+ \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \varepsilon(\psi + x_1 + \dots + x_{2i-2}, x_{2i-1} + x_{2i}) \rho(\alpha^{p-1}(x_{2i-1}), \alpha^{p-1}(x_{2i})) \psi(x_1, \dots, \widehat{x_{2i-1}}, \widehat{x_{2i}}, \dots, x_{2p+1}) \\ &+ (-1)^{p+1} \varepsilon(\psi + x_1 + \dots + x_{2p-1}, x_{2p} + x_{2p+1}) \rho(\alpha^{p-1}(x_{2p}), \alpha^{p-1}(x_{2p+1})) \psi(x_1, \dots, x_{2p-1}) \\ &+ (-1)^p \varepsilon(\psi + x_1 + \dots + x_{2p-2}, x_{2p-1} + x_{2p+1}) \varepsilon(x_{2p}, x_{2p+1}) \rho(\alpha^{p-1}(x_{2p-1}), \alpha^{p-1}(x_{2p+1})) \psi(x_1, \dots, x_{2p-2}, x_{2p}), \end{aligned}$$

où  $\widehat{x}_i$  signifie que  $x_i$  est omis.

**Définition 2.1.7.** Le complexe de cochaînes  $(\bigoplus_{p \geq 1} \mathfrak{C}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M), \delta)$  est la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée. On définit les espaces  $\Gamma$ -gradués suivant :

- L'espace des  $p$ -cocycles est défini par  $\mathfrak{Z}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) = \text{Ker}(\delta^p) = \{\varphi \in \mathfrak{C}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) \mid \delta^p \varphi = 0\}$ .
- L'espace des  $p$ -cobords est défini par  $\mathfrak{B}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) = \text{Img}(\delta^p) = \{\psi = \delta^{p-1} \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{C}_{\alpha,\mu}^{p-1}(\mathfrak{g}, M)\}$ .

**Lemme 2.1.1.**  $\mathfrak{B}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) \subseteq \mathfrak{Z}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M)$ .

**Définition 2.1.8.** On appelle  $p$ -groupe de cohomologie l'espace quotient  $\mathfrak{Z}_{\alpha,\mu}^p / \mathfrak{B}_{\alpha,\mu}^p$ .

**Définition 2.1.9.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre Hom-Lie colorée. Une application linéaire  $\tau \in \mathfrak{g}_e^* = \{\tau \in \mathfrak{g}^* \mid \tau(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\gamma \text{ et } \gamma \neq e\}$  est une **fonction quasi-trace** d'algèbre Hom-Lie colorée si elle satisfait :

$$\tau \circ \alpha(x) = \tau(x), \quad (2.1.9)$$

$$\cup_{x,y,z} \varepsilon(z, x) \tau(x) \tau([y, z]) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (2.1.10)$$

Soient une paire Hom-LieRep colorée  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \varrho)$  et  $\tau : \mathfrak{g}_e \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction quasi-trace. On définit les applications multilinéaires de degré zéro suivantes :

$$\varrho_\tau(x, y) = \tau(x) \varrho(y) - \varepsilon(x, y) \tau(y) \varrho(x), \quad (2.1.11)$$

$$[x, y, z]_\tau = \tau(x) [y, z] + \varepsilon(x, y + z) \tau(y) [z, x] + \varepsilon(x + y, z) \tau(z) [x, y] \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (2.1.12)$$

**Théorème 2.1.1.** Avec les notations ci-dessus, le quintuplet  $\mathcal{G}_\tau = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \cdot, \varepsilon, \alpha, \varrho_\tau)$  est une paire 3-HomLieRep colorée. C'est la paire 3-HomLieRep colorée **induite** de  $\mathcal{G}$ .

## 2.2 Représentations des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Dans cette section, on généralise la notion de représentation d'algèbre 3-Hom-Lie colorée dans le but d'introduire la représentation d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

**Définition 2.2.1.** Une représentation d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  sur un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $M$  est une application multilinéaire  $\varepsilon$ -antisymétrique de degré zéro  $\rho : \wedge^{n-1} \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(M)$  satisfaisant les identités suivantes pour tout  $X = (x_1, \dots, x_{n-1}), Y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathcal{H}(\wedge^{n-1} \mathfrak{g})$  et  $x_n \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$  :

$$\rho(\tilde{\alpha}(X)) \circ \mu = \mu \circ \rho(X), \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \rho(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n-1})) \circ \rho(y_1, \dots, y_{n-1}) - \varepsilon(X, Y) \rho(\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{n-1})) \circ \rho(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(X, Y_i) \rho(\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), \text{ad}_X(y_i), \dots, \alpha(y_{n-1})) \circ \mu, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} & \rho([x_1, x_2, \dots, x_n], \alpha(y_1), \alpha(y_2), \dots, \alpha(y_{n-2})) \circ \mu, \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varepsilon(x_i, X^i) \rho(\alpha(x_1), \dots, \hat{x}_i, \dots, \alpha(x_n)) \rho(x_i, y_1, y_2, \dots, y_{n-2}), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

où l'application linéaire  $\tilde{\alpha}$  est définie par l'Eq (1.3.10). On note cette représentation par le triplet  $(M, \rho, \mu)$ .

### Remarques 2.2.1.

1. L'équation (2.2.2) peut s'écrire en fonction des objets fondamentaux sur  $\mathcal{L}$  et le crochet d'algèbre Hom-Leibniz colorée (1.3.11) comme suit :

$$\rho(\tilde{\alpha}(X)) \circ \rho(Y) - \varepsilon(X, Y) \rho(\tilde{\alpha}(Y)) \circ \rho(X) = \rho([X, Y]_\alpha) \circ \mu. \quad (2.2.4)$$

2. Deux représentations  $(M, \rho, \mu)$  et  $(M', \rho', \mu')$  sont équivalentes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\Gamma$ -gradués  $f : M \rightarrow M'$  de degré zéro, telle que  $f(\rho(X)m) = \rho'(X)f(m)$  et  $f \circ \mu = \mu' \circ f$  pour tout  $X \in \mathcal{H}(\mathcal{L}), m \in M$  et  $m' \in M'$ .

**Exemple 2.2.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. La représentation adjointe est une représentation sur  $\mathfrak{g}$  avec  $\mu = \alpha$ . L'identité (2.2.2) est équivalente à l'identité de  $\varepsilon$ - $n$ -Hom-Jacobi (1.3.5).

**Proposition 2.2.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Alors  $(M, \rho, \mu)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  si et seulement si  $(\mathfrak{g} \oplus M, [\cdot, \dots, \cdot]_\rho, \varepsilon, \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M})$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée multiplicative, où le crochet  $n$ -aire  $[\cdot, \dots, \cdot]_\rho : \wedge^n(\mathfrak{g} \oplus M) \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  est donné par :

$$[x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n]_\rho = [x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varepsilon(x_i, X^i) \rho(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) m_i.$$

L'application linéaire de degré zéro  $\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M} : \mathfrak{g} \oplus M \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  est donnée par :

$$\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(x + m) = \alpha(x) + \mu(m) \quad \forall x_i \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}) \text{ et } m_i \in \mathcal{H}(M).$$

On l'appelle **produit semi-direct** de l'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  par la représentation  $(M, \rho, \mu)$ , il se note  $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho, \mu} M$ . Notons que  $\mathfrak{g} \oplus M$  est un espace  $\Gamma$ -gradué, où  $(\mathfrak{g} \oplus M)_\gamma = \mathfrak{g}_\gamma \oplus M_\gamma$ . Ce qui implique que  $x + m \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$  alors  $\overline{x_i + m_i} = \overline{x_i} + \overline{m_i}$ .

**Preuve 2.2.1.** C'est facile à montrer que  $[\cdot, \dots, \cdot]_\rho$  est  $\varepsilon$ -antisymétrique. Soient  $x_1 + v_1, \dots, x_{n-1} + v_{n-1}$  et  $y_1 + w_1, \dots, y_n + w_n \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$ , l'identité (1.3.5) est donnée en termes de crochet  $n$ -aire  $[\cdot, \dots, \cdot]_\rho$  et de morphisme  $\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}$  par :

$$\begin{aligned} & [\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(x_1 + v_1), \dots, \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(x_{n-1} + v_{n-1}), [y_1 + w_1, \dots, y_n + w_n]_\rho]_\rho = \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i) \quad (2.2.5) \\ & [\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(y_1 + w_1), \dots, \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(y_{i-1} + w_{i-1}), [x_1 + v_1, \dots, x_{n-1} + v_{n-1}, y_i + w_i]_\rho, \dots, \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(y_n + w_n)]_\rho. \end{aligned}$$

Le premier membre de l'égalité (2.2.5) est égal à :

$$\begin{aligned} & [\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n-1}), [y_1, \dots, y_n]] \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \varepsilon(x_i, X^i + Y) \rho(\alpha(x_1), \dots, \hat{x}_i, \dots, \alpha(x_{n-1}), [y_1, \dots, y_n]) \mu(v_i) \\ & + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varepsilon(y_i, Y^i) \rho(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) \rho(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) w_i. \end{aligned}$$

Le second membre, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  fixé, est égal à :

$$\begin{aligned} & \varepsilon(X, Y_i) [\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, \dots, y_i], \dots, \alpha(y_n)] \\ & + \sum_{j < i} (-1)^{n-j} \varepsilon(X, Y_i) \varepsilon(y_j, X + Y^j) \rho(\alpha(y_1), \dots, \hat{y}_j, \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, \dots, x_{n-1}, y_i], \dots, \alpha(y_n)) \mu(w_j) \\ & + \sum_{j > i} (-1)^{n-j} \varepsilon(X, Y_i) \varepsilon(y_j, Y^j) \rho(\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, \dots, x_{n-1}, y_i], \dots, \hat{y}_j, \dots, \alpha(y_n)) \mu(w_j) \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} \varepsilon(X, Y_i) \varepsilon(X + y_i, Y^i) \varepsilon(x_j, X^j + y_i) \rho(\alpha(y_1), \dots, \hat{y}_i, \dots, \alpha(y_n)) \rho(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n-1}, y_i) v_j \\ & + (-1)^{n-i} \varepsilon(X, Y_i) \varepsilon(X + y_i, Y^i) \rho(\alpha(y_1), \dots, \hat{y}_i, \dots, \alpha(y_n)) \rho(x_1, \dots, x_{n-1}) w_i. \end{aligned}$$

Alors  $(M, \rho, \mu)$  est une représentation de l'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  si et seulement si  $(\mathfrak{g} \oplus M, [\cdot, \dots, \cdot]_\rho, \varepsilon, \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M})$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée multiplicative.

**Proposition 2.2.2.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon)$  une algèbre  $n$ -Lie colorée,  $(M, \rho)$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ ,  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  un morphisme d'algèbre et  $\mu : M \rightarrow M$  une application linéaire de degré zéro tel que  $\rho(\tilde{\alpha}(X)) \circ \mu = \mu \circ \rho(X)$ , pour tout  $X \in \mathcal{L}$ . Alors  $(M, \tilde{\rho} = \mu \circ \rho, \mu)$  est une représentation de l'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée multiplicative  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\alpha, \varepsilon, \alpha)$  qui a été construite dans le corollaire 1.3.1.

**Preuve 2.2.2.** C'est évident que :

$$\tilde{\rho}(\tilde{\alpha}(X)) \circ \mu = \mu \circ \tilde{\rho}(X) \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}(\mathcal{L}).$$

Puisque  $(M, \rho)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , alors :

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}([x_1, \dots, x_n]_\alpha, \alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{n-2})) \circ \mu \\ & = \mu \circ \tilde{\rho}([x_1, \dots, x_n], y_1, \dots, y_{n-2}) \\ & = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \varepsilon(x_i, X^i) \mu^2 \circ \rho(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \rho(x_i, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \varepsilon(x_i, X^i) \mu \circ \rho(\alpha(x_1), \dots, \hat{x}_i, \dots, \alpha(x_n)) \mu \circ \rho(x_i, y_1, \dots, y_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \varepsilon(x_i, X^i) \tilde{\rho}(\alpha(x_1), \dots, \hat{x}_i, \dots, \alpha(x_n)) \tilde{\rho}(x_i, y_1, \dots, y_n).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (2.2.3) est vérifiée. Aussi, la condition (2.2.2). Donc  $(M, \tilde{\rho}, \mu)$  est une représentation de  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\alpha, \varepsilon, \alpha)$ .

## 2.3 Cohomologie des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Dans cette section, on étudie la cohomologie des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées multiplicatives dans une représentation donnée. Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et  $(M, \rho, \mu)$  un  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ -module. Une  $p$ -cochaîne est une application multilinéaire  $\varepsilon$ -antisymétrique  $\varphi : \underbrace{\mathcal{L}(\mathfrak{g}) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{g})}_{p-1} \wedge \mathfrak{g} \longrightarrow M$  satisfaisant :

$$\mu \circ \varphi(X_1, \dots, X_p, z) = \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \tilde{\alpha}(X_p), \alpha(z)). \quad (2.3.1)$$

L'ensemble des  $p$ -cochaines est un espace  $\Gamma$ -gradué qui est noté  $\mathcal{C}_{\alpha, \mu}^p(\mathfrak{g}, M)$ .

On peut définir l'opérateur cobord de la cohomologie d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $\mathfrak{g}$  à coefficients dans  $M$  en utilisant la structure d'algèbre Hom-Leibniz colorée comme suit :

**Définition 2.3.1.** Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha, \mu}^p(\mathfrak{g}, M)$  une  $p$ -cochaîne d'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Un opérateur cobord  $\delta^p : \mathcal{C}_{\alpha, \mu}^p(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \mathcal{C}_{\alpha, \mu}^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$  agissant sur une  $p$ -cochaîne est donné par :

$$\begin{aligned}
 &\delta^p \varphi(X_1, \dots, X_p, z) \quad (2.3.2) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j}^p (-1)^i \varepsilon(X_i, X_{i+1} + \dots + X_{j-1}) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{\tilde{\alpha}(X_i)}, \dots, \tilde{\alpha}(X_{j-1}), [X_i, X_j]_\alpha, \dots, \tilde{\alpha}(X_p), \alpha(z)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^i \varepsilon(X_i, X_{i+1} + \dots + X_p) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{\tilde{\alpha}(X_i)}, \dots, \tilde{\alpha}(X_p), ad(X_i)(z)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{i-1}, X_i) \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_i)) \left( \varphi(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p, z) \right) \\
 &\quad + (-1)^{p+1} (\varphi(X_1, \dots, X_{p-1}, ) \cdot X_p) \bullet_\alpha \alpha^p(z),
 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
 &(\varphi(X_1, \dots, X_{p-1}, ) \cdot X_p) \bullet_\alpha \alpha^p(z) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{p-1}, x_p^1 + \dots + \hat{x}_p^i + \dots + x_p^{n-1} + z) \varepsilon(x_p^i, x_p^{i+1} + \dots + x_p^{n-1} + z) \\
 &\quad \rho(\alpha^{p-1}(x_p^1), \dots, \alpha^{p-1}(x_p^{n-1}), \alpha^{p-1}(z)) \varphi(X_1, \dots, X_{p-1}, x_p^i), \quad (2.3.3)
 \end{aligned}$$

pour tout  $X_i = (x_i^j)_{1 \leq j \leq n-1} \in \mathcal{H}(\mathcal{L}(\mathfrak{g}))$ ,  $1 \leq i \leq p$  et  $z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ .

**Proposition 2.3.1.** Soit  $\varphi \in C_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M)$  une  $p$ -cochaîne, alors  $\delta^{p+1} \circ \delta^p(\varphi) = 0$ .

**Preuve 2.3.1.** Soient  $\varphi \in C_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M)$  une  $p$ -cochaîne,  $X_i = (x_i^j)_{1 \leq j \leq n-1} \in \mathcal{H}(\mathcal{L}(\mathfrak{g}))$ ,  $1 \leq i \leq p+2$  et  $z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ . On établit :

$$\delta^p = \delta_1^p + \delta_2^p + \delta_3^p + \delta_4^p \quad \text{et} \quad \delta^{p+1} \circ \delta^p = \sum_{i,j=1}^4 Y_{ij},$$

où  $Y_{ij} = \delta_i^{p+1} \circ \delta_j^p$ ,

$$\delta_1^p \varphi(X_1, \dots, X_p, z) = \sum_{1 \leq i < j}^p (-1)^i \varepsilon(X_{i+1} + \dots + X_{j-1}, X_i) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{\tilde{\alpha}(X_i)}, \dots, [X_i, X_j]_\alpha, \dots, \tilde{\alpha}(X_p), \alpha(z))$$

$$\delta_2^p \varphi(X_1, \dots, X_p, z) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \varepsilon(X_{i+1} + \dots + X_p, X_i) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{\tilde{\alpha}(X_i)}, \dots, \tilde{\alpha}(X_p), ad(X_i)(z))$$

$$\delta_3^p \varphi(X_1, \dots, X_p, z) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{i-1}, X_i) \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_i)) (\varphi(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p, z))$$

$$\delta_4^p \varphi(X_1, \dots, X_p, z) = (-1)^{p+1} (\varphi(X_1, \dots, X_{p-1}, \cdot) \cdot X_p) \bullet_\alpha \alpha^p(z).$$

Pour simplifier les notations, on remplace  $ad(X)(z)$  par  $X \cdot z$ . On va montrer que  $Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} = 0$  pour  $(X_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$  et  $z \in \mathfrak{g}$ .

Commençons par  $Y_{11}(\varphi)(X_1, \dots, X_p, z)$ , qui est donné par :

$$\begin{aligned} & Y_{11}(\varphi)(X_1, \dots, X_p, z) \\ &= \sum_{1 \leq i < k < j}^p (-1)^{i+k} \varepsilon(X_{i+1} + \dots + X_{j-1}, X_i) \varepsilon(X_{k+1} + \dots + X_{j-1}, X_k) \\ & \quad \varphi(\tilde{\alpha}^2(X_1), \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{\tilde{\alpha}(X_k)}, \dots, [\tilde{\alpha}(X_k), [X_i, X_j]_\alpha]_\alpha, \dots, \tilde{\alpha}^2(X_p), \alpha^2(z)) \\ & \quad + \sum_{1 \leq i < k < j}^p (-1)^{i+k-1} \varepsilon(X_{i+1} + \dots + \widehat{X_k} + \dots + X_{j-1}, X_i) \varepsilon(X_{k+1} + \dots + X_{j-1}, X_k) \\ & \quad \varphi(\tilde{\alpha}^2(X_1), \dots, \widehat{\tilde{\alpha}(X_i)}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, [\tilde{\alpha}(X_i), [X_k, X_j]_\alpha]_\alpha, \dots, \tilde{\alpha}^2(X_p), \alpha^2(z)) \\ & \quad + \sum_{1 \leq i < k < j}^p (-1)^{i+k-1} \varepsilon(X_{i+1} + \dots + \widehat{X_k} + \dots + X_{j-1}, X_i) \varepsilon(X_{k+1} + \dots + X_{j-1}, X_k) \\ & \quad \varphi(\tilde{\alpha}^2(X_1), \dots, \widehat{X_i}, \dots, [\widehat{X_i}, \widehat{X_k}]_\alpha, \dots, [[X_i, X_k]_\alpha, \tilde{\alpha}(X_j)]_\alpha, \dots, \tilde{\alpha}^2(X_p), \alpha^2(z)). \end{aligned}$$

On applique l'identité (1.3.8), on trouve que  $Y_{11} = 0$ .

D'une part on a :

$$\begin{aligned} & (Y_{21}(\varphi) + Y_{12}(\varphi))(X_1, \dots, X_p, z) \\ &= \sum_{1 \leq i < j}^p (-1)^{i+j-1} \varepsilon(X_{i+1} + \dots + \widehat{X_j} + \dots + X_p, X_i) \varepsilon(X_{j+1} + \dots + X_p, X_j) \\ & \quad \varphi(\tilde{\alpha}^2(X_1), \dots, \widehat{X_i}, \dots, [\widehat{X_i}, \widehat{X_j}]_\alpha, \dots, \tilde{\alpha}^2(X_p), [X_i, X_j]_\alpha \cdot \alpha(z)) \end{aligned}$$

et

$$Y_{22}(\varphi)(X_1, \dots, X_p, z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{1 \leq i < j}^p (-1)^{i+j} \varepsilon(X_{i+1} + \dots + X_p, X_i) \varepsilon(X_{j+1} + \dots + X_p, X_j) \\
 &\quad \varphi(\tilde{\alpha}^2(X_1), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{\alpha(X_j)}, \dots, \tilde{\alpha}^2(X_p), (\tilde{\alpha}(X_j) \cdot (X_i \cdot z))) \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j}^p (-1)^{i+j-1} \varepsilon(X_{j+1} + \dots + X_{p+1}, X_j) \varepsilon(X_{j+1} + \dots + \widehat{X}_j + \dots + X_p, X_i) \\
 &\quad \varphi(\tilde{\alpha}^2(X_1), \dots, \widehat{\alpha(X_i)}, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \tilde{\alpha}^2(X_p), (\tilde{\alpha}(X_i) \cdot (X_j \cdot z))).
 \end{aligned}$$

D'après l'Eq (1.3.5),  $Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} = 0$ , pour tout  $X_i, X_j \in \mathcal{H}(\mathcal{L}(\mathfrak{g}))$  et  $z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ .

Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
 &Y_{31} \varphi(X_1, \dots, X_{p+1}, z) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j < k}^{p+1} \{ (-1)^{k+i+1} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{k-1}, X_k) \varepsilon(X_{i+1} + \dots + X_{j-1}, X_j) \\
 &\quad \rho(\tilde{\alpha}^p(X_k)) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{X}_i, \dots, [X_i, X_j]_{\alpha}, \dots, \widehat{X}_k, \dots, \alpha(z)) \\
 &\quad + (-1)^{j+i+1} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{j-1}, X_j) \varepsilon(X_{i+1} + \dots + \widehat{X}_j + \dots + X_{k-1}, X_i) \\
 &\quad \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_j)) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, [X_i, X_k]_{\alpha}, \dots, \alpha(z)) \\
 &\quad + (-1)^{j+i} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{i-1}, X_i) \varepsilon(X_{j+1} + \dots + X_{k-1}, X_j) \\
 &\quad \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_i)) \varphi(\tilde{\alpha}(X_1), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, [X_j, X_k]_{\alpha}, \dots, \alpha(z)) \},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &Y_{13} \varphi(X_1, \dots, X_{p+1}, z) = -Y_{31} \varphi(X_1, \dots, X_{p+1}, z) \\
 &+ \sum_{1 \leq i < j}^{p+1} (-1)^{i+j+1} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{i-1}, X_i) \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + \widehat{X}_i + \dots + X_{j-1}, X_j) \\
 &\quad \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}([X_i, X_j]_{\alpha})) \mu(\varphi(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, z))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 &Y_{33} \varphi(X_1, \dots, X_{p+1}, z) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j}^{p+1} \{ (-1)^{i+j+1} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{i-1}, X_i) \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{j-1}, X_j) \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_i)) \\
 &\quad (\rho(\tilde{\alpha}^p(X_j)) (\varphi(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, z))) \\
 &\quad + (-1)^{i+j} \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + X_{i-1}, X_i) \varepsilon(\varphi + X_1 + \dots + \widehat{X}_i + \dots + X_{j-1}, X_j) \\
 &\quad \rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_j)) (\rho(\tilde{\alpha}^{p-1}(X_i)) (\varphi(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, z))) \}.
 \end{aligned}$$

Pour  $\tilde{\alpha}^p(X_i) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ ,  $\tilde{\alpha}^p(X_j) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$  et  $\varphi(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, z) \in M$ . En appliquant l'Eq (2.2.2), on obtient :

$$Y_{13} + Y_{33} + Y_{31} = 0.$$

Par le même calcul, on prouve que :

$$Y_{23} + Y_{32} = 0,$$

$$Y_{14} + Y_{41} + Y_{24} + Y_{42} + Y_{34} + Y_{43} + Y_{44} = 0,$$

Ce qui termine la preuve.

**Définition 2.3.2.** On définit les espaces  $\Gamma$ -gradués suivant

- l'espace des  $p$ -cocycles  $\mathcal{Z}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) = \{\varphi \in \mathcal{C}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) : \delta^p \varphi = 0\}$ ,
- l'espace des  $p$ -cobords  $\mathcal{B}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) = \{\psi = \delta^{p-1} \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_{\alpha,\mu}^{p-1}(\mathfrak{g}, M)\}$ .

**Lemme 2.3.1.**  $\mathcal{B}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) \subset \mathcal{Z}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M)$ .

**Définition 2.3.3.** On appelle  $p$ -groupe de cohomologie le quotient

$$\mathcal{H}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) = \mathcal{Z}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M) / \mathcal{B}_{\alpha,\mu}^p(\mathfrak{g}, M).$$

**Exemple 2.3.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée, alors

1. une 1-cochaine  $\phi$  est dite 1-cocycle si et seulement si :

$$\phi \circ ad_X(x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varepsilon(\phi, \hat{X}) \varepsilon(x_i, X^i) \rho(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \phi(x_i). \quad (2.3.4)$$

En particulier, si  $M = \mathfrak{g}$ , l'équation précédente peut s'écrire comme suit :

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon(\phi, X_i) [x_1, \dots, \phi(x_i), \dots, x_n] - \phi([x_1, x_2, \dots, x_n]) = 0.$$

2. Une 2-cochaine  $\psi$  est un 2-cocycle si et seulement si pour tout élément homogène  $X = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ,

$Y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$  et  $y_n \in \mathfrak{g}$  :

$$\begin{aligned} & \rho(\tilde{\alpha}(X)) \psi(y_1, \dots, y_n) + \psi(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n-1}), ad_Y \cdot y_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i) \psi(\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, \dots, x_{n-1}, y_i], \dots, \alpha(y_n)) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varepsilon(\psi + X, \hat{Y}_n) \varepsilon(y_i, Y_n^i) \rho(\alpha(y_1), \dots, \hat{y}_i, \dots, \alpha(y_n)) \psi(x_1, \dots, x_{n-1}, y_i). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

## Déformations et opérateurs de Nijenhuis des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Dans ce chapitre, on étudie les déformations formelles à un paramètre des algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées en s'appuyant sur la cohomologie. En outre, on introduit les déformations infinitésimalement triviales. Ceci motive la construction des opérateurs de Nijenhuis sur les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées multiplicatives. En relation avec ces opérateurs, on considère la structure produit sur les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées.

### 3.1 Déformations des algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Dans cette section, on définit les déformations formelles et on traite les déformations équivalentes d'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

Soit  $\mathbb{K}[[\lambda]]$  l'anneau des séries formelles à une variable  $\lambda$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $\mathfrak{g}$ , on note par  $\mathfrak{g}[[\lambda]]$  l'espace  $\Gamma$ -gradué des séries formelles à coefficients dans  $\mathfrak{g}$ . Étant donnée une application  $n$ -linéaire  $\omega : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré  $\gamma$ , elle admet naturellement une extension  $n$ -linéaire,  $\omega : \mathfrak{g}[[\lambda]] \times \cdots \times \mathfrak{g}[[\lambda]] \rightarrow \mathfrak{g}[[\lambda]]$ , aussi de degré  $\gamma$  et définie par :

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 0} \lambda^{j_1 + \dots + j_n} \omega(a_1^{j_1}, \dots, a_n^{j_n}),$$

pour tout élément homogène  $x_i = \sum_{j_i \geq 0} \lambda^{j_i} a_i^{j_i}$ .

**Définition 3.1.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Une **déformation formelle**  $\lambda$ -paramétrée d'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée est une application  $n$ -k-linéaire de degré zéro :

$$[\cdot, \dots, \cdot]_\lambda : \mathfrak{g}[[\lambda]] \times \cdots \times \mathfrak{g}[[\lambda]] \rightarrow \mathfrak{g}[[\lambda]],$$

définie par :

$$[x_1, \dots, x_n]_\lambda = [x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \omega_i(x_1, \dots, x_n), \quad (3.1.1)$$

où  $\omega_i : \mathfrak{g}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{g}$  ( $i \geq 1$ ) sont des applications multilinéaires  $\varepsilon$ -antisymétrique de degré zéro, tel que

$$[\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n-1}), [y_1, y_2, \dots, y_n]_\lambda]_\lambda \quad (3.1.2)$$

$$= \sum_{i=1}^n \varepsilon(X, Y_i) [\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_{i-1}), [x_1, x_2, \dots, y_i]_\lambda, \alpha(y_{i+1}), \dots, \alpha(y_n)]_\lambda, \quad (3.1.3)$$

pour tout élément homogène  $x_i \in \mathfrak{g}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

La définition précédente signifie que le quadruplet  $\mathfrak{g}_\lambda := (\mathfrak{g}[[\lambda]], [\cdot, \dots, \cdot]_\lambda, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

**Remarques 3.1.1.**

1. Si  $\lambda^2 = 0$ , ( $k = 1$ ), la déformation est dite infinitésimale.
2. Si  $\lambda^{k+1} = 0$ , la déformation est dite d'ordre  $k$ .

Soient  $\omega$  et  $\omega'$  2-cochaines de l'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  à coefficients dans la représentation adjointe. On définit le crochet  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{C}_{\alpha, \alpha}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \times \mathcal{C}_{\alpha, \alpha}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{C}_{\alpha, \alpha}^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ , pour tout  $X, Y \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$  et  $z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , par :

$$[\omega, \omega'](X, Y, z) = \omega(\tilde{\alpha}(X), \omega'(Y, z)) - \varepsilon(X, Y) \omega(\tilde{\alpha}(Y), \omega'(X, z)) - \omega(\omega'(X, \bullet) \circ \tilde{\alpha}(Y), \alpha(z)) + \omega'(\tilde{\alpha}(X), \omega(Y, z)) - \varepsilon(X, Y) \omega'(\tilde{\alpha}(Y), \omega(X, z)) - \omega'(\omega(X, \bullet) \circ \tilde{\alpha}(Y), \alpha(z)),$$

où

$$\omega(X, \bullet) \circ \tilde{\alpha}(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon(X, Y_i) \alpha(y_1) \wedge \dots \wedge \omega(X, y_k) \wedge \dots \wedge \alpha(y_{n-1}).$$

**Théorème 3.1.1.** Avec les notations ci-dessus, les 2-cochaines  $\omega_i$ ,  $i \geq 1$ , engendrent une déformation formelle  $\lambda$ -paramétrée  $\mathfrak{g}_\lambda$  d'ordre  $k$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\delta^2 \omega_1 = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\delta^2 \omega_l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} [\omega_i, \omega_{l-i}] = 0, \quad 2 \leq l \leq k, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=l-k}^k [\omega_i, \omega_{l-i}] = 0, \quad n \leq l \leq 2k. \quad (3.1.6)$$

**Preuve 3.1.1.** Soient  $\omega_i$ ,  $i \geq 1$  des 2-cochaines engendrent une déformation  $\lambda$ -paramétrée d'ordre  $k$  de l'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . Alors  $\mathfrak{g}_\lambda := (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot]_\lambda, \varepsilon, \alpha)$  est aussi une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. D'après la proposition 1.3.2, l'identité (1.3.5) dans  $\mathfrak{g}_\lambda$  est équivalente à :

$$ad_{[X, Y]_\lambda}^\lambda \cdot \alpha(z) = ad_{\tilde{\alpha}(X)}^\lambda \cdot (ad_Y^\lambda \cdot z) - \varepsilon(X, Y) ad_{\tilde{\alpha}(Y)}^\lambda \cdot (ad_X^\lambda \cdot z), \quad (3.1.7)$$

où

$$[X, Y]_{\alpha}^{\lambda} = [X, Y]_{\alpha} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \omega_i(X, \bullet) \circ \tilde{\alpha}(Y).$$

L'application adjointe dans  $\mathfrak{g}_{\lambda}$  est donnée par :

$$ad_X^{\lambda} \cdot z = ad_X \cdot z + \sum_{i=1}^k \lambda^i \omega_i(X, z).$$

Le membre gauche de l'Eq.(3.1.7) est égal à :

$$ad_{[X, Y]_{\alpha}^{\lambda}} \cdot \alpha(z) + \sum_{i=1}^k \lambda^i (\omega_i([X, Y]_{\alpha}, \alpha(z)) + ad_{\omega_i(X, \bullet) \circ \tilde{\alpha}(Y)} \cdot \alpha(z)) + \sum_{i, j=1}^k \lambda^{i+j} ad_{\omega_i(\omega_j(X, \bullet) \circ \tilde{\alpha}(Y))} \cdot \alpha(z).$$

Le membre droit est égal à :

$$\begin{aligned} ad_{\tilde{\alpha}(X)}^{\lambda} \cdot (ad_Y^{\lambda} \cdot z) &= ad_{\tilde{\alpha}(X)} \cdot (ad_Y \cdot z) + \sum_{i=1}^k \lambda^i (\omega_i(\tilde{\alpha}(X), ad_Y \cdot z) + ad_{\tilde{\alpha}(X)} \cdot \omega_i(Y, z)) \\ &+ \sum_{i, j=1}^k \lambda^{i+j} \omega_i(\tilde{\alpha}(X), \omega_j(Y, z)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad_{\tilde{\alpha}(Y)}^{\lambda} \cdot (ad_X^{\lambda} \cdot z) &= ad_{\tilde{\alpha}(Y)} \cdot (ad_X \cdot z) + \sum_{i=1}^k \lambda^i (\omega_i(\tilde{\alpha}(Y), ad_X \cdot z) + ad_{\tilde{\alpha}(Y)} \cdot \omega_i(X, z)) \\ &+ \sum_{i, j=1}^k \lambda^{i+j} \omega_i(\tilde{\alpha}(Y), \omega_j(X, z)). \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de  $\lambda^l$ , on obtient les conditions (3.1.4), (3.1.5) et (3.1.6) respectivement.

### Remarques 3.1.2.

1. L'équation (3.1.4) signifie que  $\omega_1$  est un 2-cocycle.
2. Si  $\mathfrak{g}_{\lambda}$  est une déformation d'ordre  $k$ , alors on déduit de l' Eq.(3.1.6) que  $(\mathfrak{g}, \omega_k, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.
3. En particulier, une déformation infinitésimale de  $\mathfrak{g}_{\lambda}$  engendrée par  $\omega : \wedge^n \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  et donnée par :

$$[\cdot, \dots, \cdot]_{\lambda} = [\cdot, \dots, \cdot] + \lambda \omega(\cdot, \dots, \cdot).$$

L'application linéaire  $\omega$  engendre une déformation infinitésimale de l'algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $\mathfrak{g}$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) Le quadruplet  $(\mathfrak{g}, \omega, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée multiplicative.
- (b) L'application  $\omega$  est un 2-cocycle de  $\mathfrak{g}$  à coefficients dans la représentation adjointe. Autrement dit,  $\omega$  satisfait la condition (2.3.5) pour  $\rho = ad$ .

**Définition 3.1.2.** Deux déformations formelles  $\mathfrak{g}_{\lambda}$  et  $\mathfrak{g}_{\lambda'}$ , d'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  sont considérées comme équivalentes, s'il existe un isomorphisme formel  $\phi_{\lambda} : \mathfrak{g}_{\lambda} \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda'}$ , où  $\phi_{\lambda} = \sum_{i \geq 0} \lambda^i \phi_i$ ,  $\phi_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  sont des applications linéaires de degré zéro satisfaisant :

$$\phi_0 = id_{\mathfrak{g}}, \quad \phi_i \circ \alpha = \alpha \circ \phi_i, \tag{3.1.8}$$

$$\phi_\lambda \circ [x_1, \dots, x_n]_\lambda = [\phi_\lambda(x_1), \dots, \phi_\lambda(x_n)]_{\lambda'} \quad (3.1.9)$$

Deux déformations équivalentes seront notées par  $\mathfrak{g}_\lambda \sim \mathfrak{g}_{\lambda'}$ .

**Remarque 3.1.1.** Une déformation formelle  $\mathfrak{g}_\lambda$  est dite triviale si  $\mathfrak{g}_\lambda \sim \mathfrak{g}$ .

**Théorème 3.1.2.** Soient  $\mathfrak{g}_\lambda$  et  $\mathfrak{g}_{\lambda'}$  deux déformations équivalentes engendrées par  $\omega$  et  $\omega'$  respectivement. Alors  $\omega$  et  $\omega'$  appartiennent à la même classe de cohomologie  $\mathcal{H}_{\alpha, \mu}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

**Preuve 3.1.2.** Il suffit de prouver que  $\omega - \omega' \in B_{\alpha, \mu}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

Soit  $\mathfrak{g}_\lambda \sim \mathfrak{g}_{\lambda'}$ . Une identification des coefficients de  $\lambda$  dans (3.1.8) nous donne :

$$\omega(x_1, \dots, x_n) + \phi_1[x_1, \dots, x_n] = \omega'(x_1, \dots, x_n) + [\phi(x_1), \dots, x_n] + \dots + [x_1, \dots, \phi(x_n)].$$

Alors :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \dots, x_n) - \omega'(x_1, \dots, x_n) &= -\phi[x_1, \dots, x_n] + [\phi(x_1), \dots, x_n] + \dots + [x_1, \dots, \phi(x_n)] \\ &= -\phi[x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \varepsilon(x_i, X^i) [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, \phi(x_i)] \\ &= \delta^1 \phi(X, x_n). \end{aligned}$$

Cela termine la preuve.

## 3.2 Opérateurs de Nijenhuis sur les algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Motivé par les déformations infinitésimalement triviales, on définit les opérateurs de Nijenhuis sur les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées multiplicatives. En relation avec ces opérateurs, on introduit la notion de structure produit sur les algèbres  $n$ -Hom-Lie colorées. En outre, on montre qu'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée admet une structure produit si et seulement si elle admet une décomposition, voir [64] pour le cas non-gradué.

### 3.2.1 Définitions et constructions

Soit  $\mathfrak{g}_\lambda := (\mathfrak{g}[[\lambda]], [\cdot, \dots, \cdot]_\lambda, \varepsilon, \alpha)$  une déformation d'ordre  $(n-1)$  d'une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée.

**Définition 3.2.1.** La déformation  $\mathfrak{g}_\lambda$  est dite *infinitésimalement triviale* s'il existe une application linéaire de degré zéro  $\mathcal{N} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tel que  $\mathcal{T}_\lambda = id + \lambda \mathcal{N} : \mathfrak{g}_\lambda \rightarrow \mathfrak{g}$  soit un morphisme d'algèbre. Autrement dit, si pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$  on a :

$$\mathcal{T}_\lambda \circ \alpha = \alpha \circ \mathcal{T}_\lambda, \quad (3.2.1)$$

$$\mathcal{T}_\lambda [x_1, \dots, x_n]_\lambda = [\mathcal{T}_\lambda(x_1), \dots, \mathcal{T}_\lambda(x_n)]. \quad (3.2.2)$$

La condition (3.2.1) est équivalente à  $\mathcal{N} \circ \alpha = \alpha \circ \mathcal{N}$ .

Le membre gauche de l'Eq. (3.2.2) est égal à :

$$\begin{aligned} & [x_1, \dots, x_n] + \lambda(\omega_1(x_1, \dots, x_n) + \mathcal{N}[x_1, \dots, x_n]) \\ & + \sum_{j=1}^{n-2} \lambda^{j+1}(\mathcal{N}\omega_j(x_1, \dots, x_n) + \omega_{j+1}(x_1, \dots, x_n)) + \lambda^n \mathcal{N}\omega_{n-1}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Le membre droit est égal à :

$$\begin{aligned} & [x_1, \dots, x_n] + \lambda \sum_{i_1=1}^n [x_1, \dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, x_n] + \lambda^2 \sum_{i_1 < i_2}^n [x_1, \dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, \mathcal{N}x_{i_2}, \dots, x_n] + \dots \\ & + \lambda^{n-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} [x_1, \dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, \mathcal{N}x_{i_2}, \dots, \mathcal{N}x_{i_{n-1}}, x_n] + \lambda^n [\mathcal{N}x_1, \dots, \mathcal{N}x_2, \dots, \mathcal{N}x_n]. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, pour tout  $2 \leq l \leq n-1$ , on obtient :

$$\omega_1(x_1, \dots, x_n) + \mathcal{N}[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i_1=1}^n [x_1, \dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, x_n], \quad (3.2.3)$$

$$\mathcal{N}\omega_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = [\mathcal{N}x_1, \dots, \mathcal{N}x_2, \dots, \mathcal{N}x_n], \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{N}\omega_l(x_1, \dots, x_n) + \omega_{l-1}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} [x_1, \dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, \mathcal{N}x_{i_2}, \dots, \mathcal{N}x_{i_l}, \dots, x_n]. \quad (3.2.5)$$

Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée,  $\mathcal{N} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  une application linéaire de degré zéro. On définit un crochet  $n$ -aire  $[\cdot, \dots, \cdot]_{\mathcal{N}}^1 : \wedge^n \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  par :

$$[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}}^1 = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, \mathcal{N}x_i, \dots, x_n] - \mathcal{N}[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Par induction, on définit une série des crochets  $n$ -aires  $[\cdot, \dots, \cdot]_{\mathcal{N}}^j : \wedge^n \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  par :

$$[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}}^j = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} [\dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, \mathcal{N}x_{i_2}, \dots, \mathcal{N}x_{i_j}, \dots] - \mathcal{N}[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}}^{j-1} \quad \forall 2 \leq j \leq n-1.$$

En particulier, on a :

$$[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}}^{n-1} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} [\mathcal{N}x_{i_1}, \dots, \mathcal{N}x_{i_{n-1}}, x_n] - \mathcal{N}[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}}^{n-2}. \quad (3.2.6)$$

Les notations ci-dessus explique la définition suivante.

**Définition 3.2.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Une application de degré zéro  $\mathcal{N} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est un **opérateur de Nijenhuis** si elle commute avec  $\alpha$  et satisfait :

$$[\mathcal{N}x_1, \dots, \mathcal{N}x_2, \dots, \mathcal{N}x_n] = \mathcal{N}[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}}^{n-1}. \quad (3.2.7)$$

On peut écrire cette dernière de la manière suivante :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \mathcal{N}^{n-j} \left( \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} [\dots, \mathcal{N}x_{i_1}, \dots, \mathcal{N}x_{i_2}, \dots, \mathcal{N}x_{i_j}, \dots] \right) = 0. \quad (3.2.8)$$

On a illustré que toute déformation infinitésimalement triviale engendre un opérateur de Nijenhuis. Maintenant, on va traiter inversement le résultat. En clair, on va prouver que tout opérateur de Nijenhuis engendre une déformation infinitésimalement triviale.

**Théorème 3.2.1.** Soit  $\mathcal{N}$  un opérateur de Nijenhuis sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . Alors le crochet  $n$ -aire :

$$[x_1, \dots, x_n]_\lambda = [x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{N}^i}, \quad (3.2.9)$$

définit une déformation infinitésimalement triviale de  $\mathfrak{g}$ .

**Preuve 3.2.1.** Elle découle de la caractérisation ci-dessus, de l'identité (3.2.2), du Théorème 3.1.1 et du Lemme 1.3.1.

**Proposition 3.2.1.** Soient  $\mathcal{N}$  un opérateur de Nijenhuis bijectif sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ ,  $a \in \mathfrak{g}_0$  tel que  $\alpha(a) = a$  et  $\mathcal{N}(a) \in Z(\mathfrak{g})$ . Alors  $\mathcal{N}$  est un opérateur de Nijenhuis sur l'algèbre  $(n-1)$ -Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \dots, \cdot\}_a, \varepsilon, \alpha)$ , où  $\{\cdot, \dots, \cdot\}_a = [a, \cdot, \dots, \cdot]$ .

En particulier, l'équation de l'opérateur de Nijenhuis sur une algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  s'écrit comme suit :

$$[\mathcal{N}x, \mathcal{N}y] = \mathcal{N}[\mathcal{N}x, y] + \mathcal{N}[x, \mathcal{N}y] - \mathcal{N}^2[x, y].$$

**Corollaire 3.2.1.** Soient  $\mathcal{N}$  un opérateur de Nijenhuis sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  et  $a$  un élément de degré zéro. Si  $\mathcal{N}$  est bijectif, alors il est un opérateur de Nijenhuis sur l'algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}_a, \varepsilon, \alpha)$  tel que  $\mathcal{N}(a) \in Z(\mathfrak{g})$ , où  $\{\cdot, \cdot, \cdot\}_a = [a, \cdot, \cdot]$ .

### 3.2.2 Structures produits sur les algèbres $n$ -Hom-Lie colorées

Dans cette section, on étudie la structure produit sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée en tant qu'opérateur de Nijenhuis vérifiant une condition bien déterminée. On montre que cette structure produit mène à une décomposition de l'algèbre. Par la suite, on introduit la notion de structure produit stricte sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et on donne un exemple.

**Définition 3.2.3.** Soit  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Une **quasi structure produit** sur  $\mathcal{G}$  est une application linéaire de degré zéro  $\mathcal{P} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , ( $\mathcal{P} \neq \pm Id_{\mathfrak{g}}$ ) qui satisfait  $\mathcal{P}^2 = Id_{\mathfrak{g}}$ . Une quasi structure produit est appelée **structure produit** sur  $\mathcal{G}$  si c'est un opérateur de Nijenhuis.

**Remarque 3.2.1.** On note qu'une structure produit sur une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée est une application linéaire de degré zéro  $\mathcal{P} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfaisant les propriétés suivantes pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= Id, \quad \mathcal{P}\alpha = \alpha\mathcal{P}, \\ [\mathcal{P}x_1, \mathcal{P}x_2, \dots, \mathcal{P}x_n] &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \left( \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j}^n [\dots, \mathcal{P}x_{i_1}, \dots, \mathcal{P}x_{i_j}, \dots] \right), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\text{où } \mu_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

**Théorème 3.2.2.** Soit  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Alors  $\mathcal{G}$  admet une structure produit si et seulement si  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$  admet une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ , où  $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{g}_\gamma)_+$  et  $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathfrak{g}_\gamma)_-$  sont les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et  $-1$  respectivement. Notons qu'ils sont des Hom-sous-algèbres colorées et  $\mathfrak{g}_\gamma = (\mathfrak{g}_\gamma)_+ \oplus (\mathfrak{g}_\gamma)_-$ .

**Preuve 3.2.2.** Soit  $\mathcal{P}$  une structure produit sur  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . D'après l'Eq. (3.2.10), on a pour tout élément  $x_i \in \mathfrak{g}_+$  :

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n] &= [\mathcal{P}x_1, \dots, \mathcal{P}x_n] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \left( \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} [\dots, \mathcal{P}x_{i_1}, \dots, \mathcal{P}x_{i_2}, \dots, \mathcal{P}x_{i_j}, \dots] \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \binom{n}{j} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} [x_1, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Donc :

$$[x_1, \dots, x_n] = \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} \mathcal{P}[x_1, \dots, x_n] - \sum_{2j < n} \binom{n}{2j} [x_1, \dots, x_n], \quad \text{si } n \text{ est pair}, \quad (3.2.12)$$

$$[x_1, \dots, x_n] = \sum_{2j < n} \binom{n}{2j} \mathcal{P}[x_1, \dots, x_n] - \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} [x_1, \dots, x_n], \quad \text{si } n \text{ est impair}. \quad (3.2.13)$$

D'après la formule binomiale, on a :

$$\sum_{2j < n} \binom{n}{2j} - \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} = (-1)^{n+1}. \quad (3.2.14)$$

On applique l'Eq.(3.2.14) aux Eqs.(3.2.12)-(3.2.13), pour tout  $x_i \in \mathfrak{g}_+$ , on obtient  $\mathcal{P}[x_1, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n]$ . De plus, on a  $\mathcal{P} \circ \alpha(x) = \alpha \circ \mathcal{P}(x) = \alpha(x)$ , ce qui signifie que  $\alpha(x) \subseteq \mathfrak{g}_+$ . Donc  $\mathfrak{g}_+$  est une Hom-sous-algèbre colorée de  $\mathfrak{g}$ . De manière analogue, on montre que  $\mathfrak{g}_-$  est une Hom-sous-algèbre colorée.

Réciproquement, on définit une application linéaire de degré zéro  $\mathcal{P} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  par :

$$\mathcal{P}(x + y) = x - y \quad \forall x \in \mathfrak{g}_+ \text{ et } y \in \mathfrak{g}_-. \quad (3.2.15)$$

On a  $\mathcal{P}^2(x + y) = \mathcal{P}(x - y) = x + y$ , cela signifie que  $\mathcal{P}^2 = \text{Id}$ . Puisque  $x \in \mathfrak{g}_+$ , alors  $\alpha(x) \in \mathfrak{g}_+$ . Donc  $\mathcal{P} \circ \alpha(x) = \alpha(x) = \alpha \circ \mathcal{P}(x)$ . Par ailleurs,  $\mathcal{P} \circ \alpha(y) = \alpha \circ \mathcal{P}(y)$ . Pour prouver l'Eq (3.2.10) pour tout  $x_i \in \mathfrak{g}_+$ , on distingue deux cas :

**Cas 1:** Si  $n$  est pair. Puisque  $\mathfrak{g}_+$  est une Hom-sous-algèbre colorée alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \left( \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} [\dots, \mathcal{P}x_{i_1}, \dots, \mathcal{P}x_{i_2}, \dots, \mathcal{P}x_{i_j}, \dots] \right) \\ &= \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} \mathcal{P}[x_1, \dots, x_n] - \sum_{2j < n} \binom{n}{2j} [x_1, \dots, x_n] \\ &= \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} [x_1, \dots, x_n] - \sum_{2j < n} \binom{n}{2j} [x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} - \sum_{2j < n} \binom{n}{2j} \right) [x_1, \dots, x_n] \\
 (3.2.14) \quad &\stackrel{=}{=} [\mathcal{P}x_1, \mathcal{P}x_2, \dots, \mathcal{P}x_n].
 \end{aligned}$$

**Cas 2:** Si  $n$  est impair, on a :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \left( \sum_{i_1 < i_2 \dots < i_j} [\dots, \mathcal{P}x_{i_1}, \dots, \mathcal{P}x_{i_2}, \dots, \mathcal{P}x_{i_j}, \dots] \right) \\
 &= \left( \sum_{2j < n} \binom{n}{2j} - \sum_{2j+1 < n} \binom{n}{2j+1} \right) [x_1, \dots, x_n] \\
 (3.2.14) \quad &\stackrel{=}{=} [\mathcal{P}x_1, \mathcal{P}x_2, \dots, \mathcal{P}x_n].
 \end{aligned}$$

De manière analogue, on vérifie l'Eq (3.2.10) pour tout  $x_i \in \mathfrak{g}_-$ . Alors  $\mathcal{P}$  est une structure produit sur  $\mathcal{G}$ .

Soient  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée et  $\Theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  une application linéaire de degré  $\gamma$ . Alors  $\Theta$  est dans le **centroïde** de  $\mathcal{G}$  si elle vérifie :

$$\Theta \circ \alpha = \alpha \circ \Theta, \quad (3.2.16)$$

$$\Theta[x_1, x_2, \dots, x_n] = [\Theta x_1, x_2, \dots, x_n] \quad \forall x_i \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (3.2.17)$$

L'identité ci-dessus est équivalente à :

$$\Theta[x_1, x_2, \dots, x_n] = \varepsilon(\gamma, X_i) [x_1, \dots, \underbrace{\Theta x_i}_{i\text{-ème place}}, \dots, x_n]. \quad (3.2.18)$$

**Définition 3.2.4.** Une quasi structure produit  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{G}$  est appelée **structure produit stricte** si elle est dans le centroïde de  $\mathcal{G}$ .

**Lemme 3.2.1.** Soit  $\mathcal{P}$  une structure produit stricte sur  $\mathcal{G}$ , alors  $\mathcal{P}$  est une structure produit sur  $\mathcal{G}$  tel que  $[\mathfrak{g}_+, \dots, \mathfrak{g}_+, \underbrace{\mathfrak{g}_+}_{i\text{-ème place}}, \mathfrak{g}_-, \dots, \mathfrak{g}_-] = 0$ , pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ .

**Preuve 3.2.3.** L'identité (3.2.10) est équivalente à :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \left( \sum_{i_1 < i_2 \dots < i_j} [\dots \mathcal{P}x_{i_1}, \dots, \mathcal{P}x_{i_2}, \dots, \mathcal{P}x_{i_j}, \dots] \right) = 0.$$

Si  $\mathcal{P}$  est une structure produit stricte sur  $\mathcal{G}$ , alors on a :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \left( \sum_{i_1 < i_2 \dots < i_j} [\dots \mathcal{P}x_{i_1}, \dots, \mathcal{P}x_{i_2}, \dots, \mathcal{P}x_{i_j}, \dots] \right) \\
 &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \left( \sum_{i_1 < i_2 \dots < i_j} \mathcal{P}^{\mu_{n-j}} \mathcal{P}^{\mu_j} [x_1, \dots, x_n] \right) \\
 &= \left( \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \right) \mathcal{P}^{\mu_n} [x_1, \dots, x_n] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De ce fait  $\mathcal{P}$  est une structure produit.

Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  fixé, soit  $(k, l)$  tel que  $0 < k \leq i < l \leq n$ , où  $x_k \in \mathfrak{g}_+$  et  $x_l \in \mathfrak{g}_-$ . D'une part, de l'Eq. (3.2.17), on a :

$$\mathcal{P}[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = [\mathcal{P}x_1, \dots, x_i, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n].$$

D'autre part, de l'Eq. (3.2.18) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] &= [x_1, \dots, x_i, \mathcal{P}x_{i+1}, \dots, x_n] \\ &= - [x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Par conséquent  $[\mathfrak{g}_+, \dots, \mathfrak{g}_+, \underbrace{\mathfrak{g}_+}_{i\text{-ème place}}, \mathfrak{g}_-, \dots, \mathfrak{g}_-] = 0$ .

**Proposition 3.2.2.** Soit  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \dots, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre  $n$ -Hom-Lie colorée. Alors  $\mathcal{G}$  admet une structure produit stricte si et seulement si  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$  admet une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ , où  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$  sont des Hom-sous-algèbres colorées de  $\mathfrak{g}$  tel que :

$$[\mathfrak{g}_+, \dots, \mathfrak{g}_+, \underbrace{\mathfrak{g}_+}_{i\text{-ème place}}, \mathfrak{g}_-, \dots, \mathfrak{g}_-] = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n-1.$$

**Preuve 3.2.4.** La première implication découle immédiatement du Lemme 3.2.1. Pour la deuxième implication, on applique le Théorème 3.2.2. L'opérateur  $\mathcal{P}$  définie par l'Eq.(3.2.15) est une quasi structure produit et pour tout  $x_k = x_k^+ + x_k^- \in \mathfrak{g}$ , où  $x_k^+ \in \mathfrak{g}_+$  et  $x_k^- \in \mathfrak{g}_-$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \mathcal{P}[x_1^+ + x_1^-, x_2^+ + x_2^-, \dots, x_n^+ + x_n^-] \\ &= \mathcal{P}[x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+] + \mathcal{P}[x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-] \\ &= [x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+] - [x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-] \\ &= [\mathcal{P}x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+] + [\mathcal{P}x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-] \\ &= [\mathcal{P}x_1, x_2, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}$  est une structure produit stricte sur  $\mathcal{G}$ .

**Exemple 3.2.1.** Soit  $\mathfrak{g}_\alpha = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]_\alpha, \varepsilon, \alpha)$  l'algèbre 4-Hom-Lie colorée construite dans l'Exemple 1.3.2. On définit une application linéaire de degré zéro  $\mathcal{P} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  par :

$$\mathcal{P}(e_1) = e_1, \quad \mathcal{P}(e_2) = e_2, \quad \mathcal{P}(e_3) = -e_3, \quad \mathcal{P}(e_4) = -e_4 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(e_5) = -e_5.$$

Il est aisé de montrer que  $\mathcal{P}$  est une structure produit stricte, ainsi qu'elle est une structure produit. Du Théorème 3.2.2, on déduit que les Hom-sous-algèbres colorées  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_-$  sont engendrées par  $\langle e_1, e_2 \rangle$  et  $\langle e_3, e_4, e_5 \rangle$  respectivement. Par conséquent :

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_{(0,0)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{(0,1)} \oplus \mathfrak{g}_{(1,0)} \oplus \mathfrak{g}_{(1,1)}.$$

## Opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres 3-Hom-Lie colorées

On commence ce chapitre par introduire la notion d'opérateur de Reynolds sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée qui s'avère être un opérateur de Reynolds généralisé particulier sur une paire 3-HomLieRep colorée. En outre, on fournit quelques exemples et résultats de caractérisation. Par ailleurs, on étudie les structures complexes généralisées twistées sur les modules des algèbres 3-Hom-Lie colorées.

### 4.1 Constructions des algèbres Reynolds 3-Hom-Lie colorées

Dans cette section, on présente la notion d'opérateur de Reynolds sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée et on décrit la propriété de réplication des algèbres Reynolds 3-Hom-Lie colorées. On constate que les opérateurs de Reynolds et les dérivations des algèbres 3-Hom-Lie colorées sont étroitement liés.

**Définition 4.1.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre 3-Hom-Lie colorée, alors une application linéaire  $\mathcal{R} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré zéro est un **opérateur de Reynolds** si elle satisfait :

$$\mathcal{R} \circ \alpha(x) = \alpha \circ \mathcal{R}(x), \quad (4.1.1)$$

$$[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] = \mathcal{R} \left( [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, z] + [\mathcal{R}x, y, \mathcal{R}z] + [x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] - [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] \right) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (4.1.2)$$

Une algèbre 3-Hom-Lie colorée avec un opérateur de Reynolds  $\mathcal{R}$  est dite **algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée**, on la note par  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$ .

**Théorème 4.1.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée. On définit un crochet ternaire  $[\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathcal{R}} : \wedge^3 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré zéro par :

$$[x, y, z]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, z] + [\mathcal{R}x, y, \mathcal{R}z] + [x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] - [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z]. \quad (4.1.3)$$

Alors  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathcal{R}}, \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  est une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée. En outre,  $\mathcal{R}$  est un morphisme d'algèbres 3-Hom-Lie colorées.

Cette proposition est une motivation du Théorème 2.1.1.

**Proposition 4.1.1.** Soient  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds Hom-Lie colorée et  $\tau : \mathfrak{g}_e \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction quasi-trace. Alors  $\mathcal{G}_\tau = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_\tau, \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  est une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée si et seulement si :

$$\cup_{x,y,z} \varepsilon(x,z)\tau(x) \mathcal{R}[\mathcal{R}y, \mathcal{R}z] = 0 \quad \forall x,y,z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (4.1.4)$$

**Preuve 4.1.1.** Soient  $x,y,z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , d'une part on a :

$$[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z]_\tau = \tau \circ \mathcal{R}(x) [\mathcal{R}y, \mathcal{R}z] + \varepsilon(x,y+z)\tau \circ \mathcal{R}(y) [\mathcal{R}z, \mathcal{R}x] + \varepsilon(x+y,z)\tau \circ \mathcal{R}(z) [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y].$$

D'autre part, on a :

$$[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, z]_\tau = \tau \circ \mathcal{R}(x) [\mathcal{R}y, z] + \varepsilon(x,y+z)\tau \circ \mathcal{R}(y) [z, \mathcal{R}x] + \varepsilon(x+y,z)\tau(z) [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y],$$

$$[\mathcal{R}x, y, \mathcal{R}z]_\tau = \tau \circ \mathcal{R}(x) [y, \mathcal{R}z] + \varepsilon(x,y+z)\tau(y) [\mathcal{R}z, \mathcal{R}x] + \varepsilon(x+y,z)\tau \circ \mathcal{R}(z) [\mathcal{R}x, y],$$

$$[x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z]_\tau = \tau(x) [\mathcal{R}y, \mathcal{R}z] + \varepsilon(x,y+z)\tau \circ \mathcal{R}(y) [\mathcal{R}z, x] + \varepsilon(x+y,z)\tau \circ \mathcal{R}(z) [x, \mathcal{R}y].$$

D'où  $\mathcal{G}_\tau = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_\tau, \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  est une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée.

Motivé par le Théorème 4.1.1 et la Proposition 4.1.1, on présente la construction suivante.

**Corollaire 4.1.1.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée et  $\tau : \mathfrak{g}_e \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction quasi-trace. On définit une application trilinéaire  $[\cdot, \cdot, \cdot]_{\tau \circ \mathcal{R}} : \wedge^3 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré zéro par :

$$[x, y, z]_{\tau \circ \mathcal{R}} = [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, z]_\tau + [\mathcal{R}x, y, \mathcal{R}z]_\tau + [x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z]_\tau - [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z]_\tau. \quad (4.1.5)$$

Alors,  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\tau \circ \mathcal{R}}, \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  est une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée. De plus,  $\mathcal{R}$  est un morphisme d'algèbres.

On peut construire une algèbre Hom-Lie colorée à partir d'une algèbre 3-Hom-Lie colorée et un élément de degré zéro comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 4.1.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  une algèbre 3-Hom-Lie colorée. Pour tout  $x_e \in \mathfrak{g}_e$  tel que  $x_e \in \ker(\alpha - Id)$ , on a  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{x_e}, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre Hom-Lie colorée, où :

$$[x, y]_{x_e} = [x_e, x, y] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \quad (4.1.6)$$

Rappelons qu'un **opérateur de Rota-Baxter** sur une algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est une application linéaire  $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré zéro qui satisfait :

$$\alpha \circ R(x) = R \circ \alpha(x), \quad (4.1.7)$$

$$[Rx, Ry] = R([Rx, y] + [x, Ry]) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \quad (4.1.8)$$

**Proposition 4.1.3.** *Supposons les mêmes hypothèses que celles de la proposition 4.1.2 tel que  $x_e \in \text{Ker}(\mathcal{R} - \text{Id})$ . Alors  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  est une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée si et seulement si  $\mathcal{R}$  est un opérateur de Rota-Baxter sur l'algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{x_e}, \varepsilon, \alpha)$ .*

**Preuve 4.1.2.** Soient  $x, y \in \mathfrak{g}$  et  $x_e \in \mathfrak{g}_e$  tel que  $x_e \in \text{Ker}(\mathcal{R} - \text{Id})$ . On a :

$$\begin{aligned} & [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y]_{x_e} - \mathcal{R}([\mathcal{R}x, y]_{x_e} + [x, \mathcal{R}y]_{x_e}) \\ &= [x_e, Rx, Ry] - \mathcal{R}([x_e, \mathcal{R}x, y] + [x_e, x, \mathcal{R}y] + [x_e, \mathcal{R}x, \mathcal{R}y] - [x_e, \mathcal{R}x, \mathcal{R}y]) \\ &= [\mathcal{R}x_e, \mathcal{R}x, \mathcal{R}y] - \mathcal{R}([\mathcal{R}x_e, \mathcal{R}x, y] + [\mathcal{R}x_e, x, \mathcal{R}y] + [x_e, \mathcal{R}x, \mathcal{R}y] - [\mathcal{R}x_e, \mathcal{R}x, \mathcal{R}y]). \end{aligned}$$

Cela termine la preuve.

**Définition 4.1.2.** Une algèbre Hom-pre-Lie colorée  $(A, \star, \varepsilon, \alpha)$  est un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $A$  muni d'une application bilinéaire de degré zéro  $\star : A \otimes A \rightarrow A$  et une application linéaire de degré zéro  $\alpha : A \rightarrow A$  qui satisfont :

$$(x \star y) \star \alpha(z) - \alpha(x) \star (y \star z) = \varepsilon(x, y) \left( (y \star x) \star \alpha(z) - \alpha(y) \star (x \star z) \right) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}(A).$$

**Proposition 4.1.4.** Soit  $\mathcal{R}$  un opérateur de Rota-Baxter sur une algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . On définit  $\star : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  par :

$$x \star_{\mathcal{R}} y = [\mathcal{R}x, y] \quad \forall x, y \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (4.1.9)$$

Alors  $(\mathfrak{g}, \star_{\mathcal{R}}, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre Hom-pre-Lie colorée.

**Corollaire 4.1.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée. Alors  $(A, \star_e, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre Hom-pre-Lie colorée, où l'application bilinéaire  $\star_e : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est donnée par :

$$x \star_e y = [\mathcal{R}x_e, \mathcal{R}x, y]. \quad (4.1.10)$$

Ensuite, on illustre la relation entre les opérateurs de Reynolds et les dérivations des algèbres de 3-Hom-Lie colorées. Mais d'abord, rappelons qu'une **dérivation de degré  $\gamma$**  d'une algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est une application linéaire  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré  $\gamma$  qui satisfait :

$$\alpha \circ D(x) = D \circ \alpha(x), \quad (4.1.11)$$

$$D[x, y, z] = [Dx, y, z] + \varepsilon(\gamma, x)[x, Dy, z] + \varepsilon(\gamma, x + y)[x, y, Dz] \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}). \quad (4.1.12)$$

**Proposition 4.1.5.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée. Si  $\mathcal{R}$  est bijective, alors l'application linéaire  $(\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}\text{Id}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est une dérivation de degré zéro de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée.

**Preuve 4.1.3.** Il est clair que  $(\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}Id) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  commute avec  $\alpha$ . On effectue un changement de variable comme suit :  $X = \mathcal{R}x$ ,  $Y = \mathcal{R}y$  et  $Z = \mathcal{R}z$ . Puisque  $\mathcal{R}$  est bijectif, alors l'Eq.(4.1.2) peut être reformulée de la manière suivante :

$$\mathcal{R}^{-1}[X, Y, Z] = [\mathcal{R}^{-1}X, Y, Z] + [X, \mathcal{R}^{-1}Y, Z] + [X, Y, \mathcal{R}^{-1}Z] - [X, Y, Z].$$

Ce qui implique que :

$$(\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}Id)[X, Y, Z] = [(\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}Id)X, Y, Z] + [X, (\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}Id)Y, Z] + [X, Y, (\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}Id)Z].$$

D'où  $(\mathcal{R}^{-1} - \frac{1}{2}Id)$  est une dérivation de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ .

Réciproquement, on peut construire un opérateur de Reynolds en partant d'une dérivation.

**Proposition 4.1.6.** Soit  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  une dérivation de degré zéro de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . Si l'application linéaire  $(\mathcal{R}^{-1} + \frac{1}{2}Id) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est inversible, alors  $(\mathcal{R}^{-1} + \frac{1}{2}Id)^{-1}$  est un opérateur de Reynolds.

## 4.2 Opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires 3-HomLieRep colorées

Dans ce paragraphe, on étudie tout d'abord les produits semi-direct twistés d'algèbres 3-Hom-Lie colorées induites par les algèbres Hom-Lie colorées. Puis, on introduit la notion d'opérateur de Reynolds généralisé sur une paire 3-HomLieRep colorée. Cet opérateur est caractérisé en termes de graphe du produit semi-direct twisté. Par conséquent, un opérateur de Reynolds généralisé donne lieu à une structure d'algèbre 3-Hom-Lie colorée sur l'espace des modules. En outre, on donne quelques constructions d'opérateurs de Reynolds généralisés et des exemples.

**Définition 4.2.1.** Soit  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire HomLieRep colorée. Pour tout 2-cocycle  $H$  de degré zéro de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de  $\mathcal{G}$ , la somme directe  $\mathfrak{g} \oplus M$  est munie d'une structure d'algèbre Hom-Lie colorée définie par :

$$\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(x + u) = \alpha(x) + \mu(u), \quad (4.2.1)$$

$$[x + u, y + v]_{\rho}^H = \left( [x, y], \rho(x)v - \varepsilon(x, y)\rho(y)u + H(x, y) \right) \quad \forall x + u, y + v \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M). \quad (4.2.2)$$

C'est ce qu'on appelle **produit semi-direct H-twisté**. Il se note par  $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^H M$ .

**Remarques 4.2.1.**

- Notons que  $\mathfrak{g} \oplus M$  est un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué, où  $(\mathfrak{g} \oplus M)_{\gamma} = \mathfrak{g}_{\gamma} \oplus M_{\gamma}$ . Cela implique que  $\overline{x + u} = \bar{x} = \bar{u}$  pour tout  $x + u \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$ .
- Un produit semi-direct est un produit semi-direct H-twisté, où  $H = 0$ .

On définit  $H_\tau : \wedge^3 \mathfrak{g} \rightarrow M$  par :

$$H_\tau(x, y, z) = \tau(x)H(y, z) + \varepsilon(x, y + z)\tau(y)H(z, x) + \varepsilon(x + y, z)\tau(z)H(x, y). \quad (4.2.3)$$

Alors  $H_\tau$  est un 2-cocycle de degré zero de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée induite  $\mathcal{G}_\tau = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_\tau, \varepsilon, \alpha)$  à coefficients dans  $(M, \rho_\tau, \mu)$ .

**Proposition 4.2.1.** Soient  $\mathcal{G} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire Hom-LieRep colorée et  $\tau$  une fonction quasi-trace sur  $\mathcal{G}$ . La somme directe  $\mathfrak{g} \oplus M$  est munie d'une structure d'algèbre 3-Hom-Lie colorée donnée par:

$$\begin{aligned} & [(x + u), (y + v), (z + w)]_{\rho_\tau}^{H_\tau} \\ &= \left( [x, y, z]_\tau, \rho_\tau(x, y)w - \varepsilon(y, z)\rho_\tau(x, z)v + \varepsilon(x, y + z)\rho_\tau(y, z)u + H_\tau(x, y, z) \right), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

pour tout  $x + u, y + v, z + w \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$  tel que  $\tau(x + u) = \tau(x)$ . C'est le produit semi-direct twisté de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée induite.

**Remarque 4.2.1.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire 3-HomLieRep colorée et  $H \in \mathcal{Z}_{\alpha, \mu}^p(\mathfrak{g}, M)$ . Si on remplace  $\rho_\tau$  par  $\rho$  et  $H_\tau$  par  $H$  dans l'Eq.(4.2.4), on trouve le produit semi-direct twisté de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée.

**Définition 4.2.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire 3-HomLieRep colorée. Une application linéaire de degré zéro  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  est un **opérateur de Reynolds généralisé** sur une paire 3-HomLieRep colorée, si elle satisfait :

$$T \circ \mu = \alpha \circ T, \quad (4.2.5)$$

$$[Tu, Tv, Tw] = T\left(\rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw)\right), \quad (4.2.6)$$

pour tout  $u, v$  et  $w \in \mathcal{H}(M)$ .

**Remarque 4.2.2.** Si  $H = 0$ , on retrouve la définition d'un opérateur de Rota-Baxter relatif sur une paire 3-HomLieRep colorée.

**Exemple 4.2.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds 3-HomLie colorée. On peut réécrire l'Eq.(4.1.2) de la manière suivante :

$$[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] = \mathcal{R}\left(ad_{(\mathcal{R}x, \mathcal{R}y)}(z) - \varepsilon(y, z)ad_{(\mathcal{R}x, \mathcal{R}z)}(y) + \varepsilon(x, y + z)ad_{(\mathcal{R}y, \mathcal{R}z)}(x) - ad_{(\mathcal{R}x, \mathcal{R}y)}\mathcal{R}z\right).$$

Il est clair que  $\mathcal{R}$  un opérateur de Reynolds généralisé par rapport à la représentation adjointe et le 2-cocycle  $H(x, y, z) = -[x, y, z]$ .

**Définition 4.2.3.** Soient  $T$  et  $T'$  deux opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires 3-Hom-LieRep colorées  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  et  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \cdot, \cdot]', \varepsilon, \alpha', \rho')$ . Un **morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés**

$T$  et  $T'$  se compose d'un morphisme d'algèbres 3-Hom-lie colorées  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  et d'un morphisme  $\psi : M \rightarrow M'$  tel que :

$$\psi \circ \mu(u) = \mu' \circ \psi(u) \quad (4.2.7)$$

$$\phi \circ T(u) = T' \circ \psi(u), \quad (4.2.8)$$

$$\psi(\rho(x, y)u) = \rho'(\phi(x), \phi(y))\psi(u), \quad (4.2.9)$$

$$\psi(\mathcal{H}(x, y, z)) = \mathcal{H}'(\phi(x), \phi(y), \phi(z)), \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, u \in M. \quad (4.2.10)$$

En particulier, si les deux morphismes  $\phi$  et  $\psi$  sont bijectifs alors  $(\phi, \psi)$  est dite **isomorphisme**.

En utilisant le produit semi-direct twisté, on peut caractériser les opérateurs de Reynolds généralisés en termes de graphe.

**Lemme 4.2.1.** Une application linéaire de degré zéro  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  est un opérateur de Reynolds généralisé si et seulement si le  $\mathbf{Gr}(T) = \{(Tu, u) | u \in M\}$  est une Hom-sous-algèbre colorée du produit semi-direct twisté.

**Preuve 4.2.1.** Soient  $(Tu, u), (Tv, v)$  et  $(Tw, w) \in \mathbf{Gr}(T)$ , on a

$$\begin{aligned} & [(Tu + u), (Tv + v), (Tw + w)]_{\rho}^H \\ &= \left( [Tu, Tv, Tw], \rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw) \right). \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{Gr}(T)$  est une Hom-sous-algèbre colorée du produit semi-direct H-twisté  $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^H M$ , alors :

$$[Tu, Tv, Tw] = T\left(\rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw)\right).$$

On a  $\alpha \circ T(u) = T \circ \mu(u)$ . D'où  $T$  est un opérateur de Reynolds généralisé. Inversement, si  $T$  est un opérateur de Reynolds généralisé, on a :

$$\begin{aligned} & [(Tu + u), (Tv + v), (Tw + w)]_{\rho}^H \\ &= \left( T(\rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw)), \right. \\ & \quad \left. \rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw) \right) \in \mathbf{Gr}(T). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(Tu + u) = \alpha \circ T(u) + \mu(u) = T \circ \mu(u) + \mu(u) \in \mathbf{Gr}(T).$$

Par conséquent,  $\mathbf{Gr}(T)$  est une Hom-sous-algèbre colorée du produit semi-direct H-twisté.

Le corollaire ci-après est une conséquence du Lemme 4.2.1 et du fait que  $\mathbf{Gr}(T)$  et  $M$  sont isomorphes.

**Corollaire 4.2.1.** Soit  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Reynolds généralisé. Alors, on a une structure d'algèbre 3-Hom-Lie colorée sur  $M$  définie par le morphisme  $\mu$  et l'application trilinéaire  $\varepsilon$ -antisymétrique de degré zéro suivante :

$$[u, v, w]_T = \rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw).$$

En outre,  $T$  est un morphisme d'algèbres 3-Hom-Lie colorées.

**Proposition 4.2.2.** Si  $\omega$  une 1-cochaine bijective de degré zéro de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée. Alors  $T = \omega^{-1} : M \rightarrow \mathfrak{g}$  est un opérateur de Reynolds généralisé, où  $H = -\delta^1\omega$ .

**Preuve 4.2.2.** Soit  $\omega \in C_{\alpha, \mu}^1(\mathfrak{g}, M)$  est une 1-cochaine bijective de degré zéro. Puisque  $H = -\delta^1\omega$  est un 2-cocycle, alors :

$$\begin{aligned} H(Tu, Tv, Tw) &= -\delta^1\omega(Tu, Tv, Tw) \\ &= \rho(Tu, Tv)\omega(w) - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)\omega(v) + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)\omega(u) - \omega[Tu, Tv, Tw]. \end{aligned}$$

En appliquant  $T = \omega^{-1}$  des deux côtés, on obtient :

$$[Tu, Tv, Tw] = T\left(\rho(Tu, Tv)\omega(w) - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)\omega(v) + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)\omega(u) + H(Tu, Tv, Tw)\right).$$

Dans la suite, on illustre que l'identité est un opérateur de Reynolds généralisé sur l'algèbre 3-Hom-Lie colorée déformée par un opérateur de Nijenhuis.

Un **opérateur de Nijenhuis** sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est une application linéaire de degré zéro  $\mathcal{N} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui commute avec  $\alpha$  et satisfaisant :

$$\begin{aligned} [\mathcal{N}x, \mathcal{N}y, \mathcal{N}z] &= \mathcal{N}\left([\mathcal{N}x, \mathcal{N}y, z] + [\mathcal{N}x, y, \mathcal{N}z] + [x, \mathcal{N}y, \mathcal{N}z] \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{N}[\mathcal{N}x, y, z] - \mathcal{N}[x, \mathcal{N}y, z] - \mathcal{N}[x, y, \mathcal{N}z] + \mathcal{N}^2[x, y, z]\right) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Notons que le crochet :

$$\begin{aligned} [x, y, z]_{\mathcal{N}} &= [\mathcal{N}x, \mathcal{N}y, z] + [\mathcal{N}x, y, \mathcal{N}z] + [x, \mathcal{N}y, \mathcal{N}z] \\ &\quad - \mathcal{N}[\mathcal{N}x, y, z] - \mathcal{N}[x, \mathcal{N}y, z] - \mathcal{N}[x, y, \mathcal{N}z] + \mathcal{N}^2[x, y, z] \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

détermine une algèbre 3-Hom-Lie colorée sur  $\mathfrak{g}$ . Cette algèbre sera notée par  $\mathfrak{g}_{\mathcal{N}} = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathcal{N}}, \varepsilon, \alpha)$ .

**Exemple 4.2.2.** Avec les notations ci-dessus, l'application bilinéaire  $ad^{\mathcal{N}}$  définie par :

$$ad^{\mathcal{N}}(x, y)z = [\mathcal{N}x, \mathcal{N}y, z] \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g},$$

est une représentation de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée multiplicative  $\mathfrak{g}_{\mathcal{N}}$  sur  $\mathfrak{g}$  par rapport à l'application  $\alpha$ . De plus,  $H : \wedge^3 \mathfrak{g}_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathfrak{g}$  définie par :

$$H(x, y, z) = -\mathcal{N}[\mathcal{N}x, y, z] - \mathcal{N}[x, \mathcal{N}y, z] - \mathcal{N}[x, y, \mathcal{N}z] + \mathcal{N}^2[x, y, z],$$

est un 2-cocycle. Donc l'identité  $id : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{N}}$  est un opérateur de Reynolds généralisé.

**Lemme 4.2.2.** Soient  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire 3-HomLieRep colorée et  $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^H M$  le produit semi-direct twisté. Pour tout  $\omega \in C_{\alpha, \mu}^1(\mathfrak{g}, M)$  de degré zéro, le quadruplet  $(\mathfrak{g} \oplus M, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\rho}^{H+\delta\omega}, \varepsilon, \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M})$  est une algèbre 3-Hom-Lie colorée, où le crochet ternaire est donné par :

$$\begin{aligned} & [(x+u), (y+v), (z+w)]_{\rho}^{H+\delta\omega} \\ &= ([x, y, z], \rho(x, y)w - \varepsilon(y, z)\rho(x, z)v + \varepsilon(x, y+z)\rho(y, z)u + H(x, y, z) + \delta\omega(x, y, z)). \end{aligned}$$

En outre, l'application  $\psi$  définie ci-dessous est un morphisme d'algèbres.

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^H M &\rightarrow \mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^{H+\delta\omega} M \\ (x, u) &\rightarrow (x, u - \omega(x)) \end{aligned}$$

**Preuve 4.2.3.** Soient  $(x, u), (y, v), (z, w) \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$ , on a :

$$\alpha_{\mathfrak{g} \oplus M} \circ \psi(x, u) = (\alpha(x), \mu(u - \omega(x))) = (\alpha(x), \mu(u) - \omega(\alpha(x))) = \psi \circ \alpha_{\mathfrak{g} \oplus M}(x, u).$$

Aussi :

$$\begin{aligned} & \psi[(x+u), (y+v), (z+w)]_{\rho}^H \\ &= \psi([x, y, z], \rho(x, y)w - \varepsilon(y, z)\rho(x, z)v + \varepsilon(x, y+z)\rho(y, z)u + H(x, y, z)) \\ &= ([x, y, z], \rho(x, y)w - \varepsilon(y, z)\rho(x, z)v + \varepsilon(x, y+z)\rho(y, z)u + H(x, y, z) - \omega[x, y, z]) \\ &= ([x, y, z], \rho(x, y)(w - \omega(z)) - \varepsilon(y, z)\rho(x, z)(v - \omega(y)) + \varepsilon(x, y+z)\rho(y, z)(u - \omega(x)) + H(x, y, z) + \delta\omega(x, y, z)) \\ &= [(x, u - \omega(x)), (y, v - \omega(y)), (z, w - \omega(z))]_{\rho}^{H+\delta\omega} \\ &= [\psi(x, u), \psi(y, v), \psi(z, w)]_{\rho}^{H+\delta\omega}. \end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat.

En partant d'un opérateur de Reynolds généralisé  $T$  et une 1-cochaine, on peut construire un nouvel opérateur de Reynolds généralisé sous certaines conditions.

**Théorème 4.2.1.** Soient  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire 3-HomLieRep colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  et  $\omega \in C_{\alpha, \mu}^1(\mathfrak{g}, M)$  de degré zéro. Si l'endomorphisme  $(Id_M - \omega \circ T) : M \rightarrow M$  est inversible, alors l'application linéaire  $T \circ (Id_M - \omega \circ T)^{-1} : M \rightarrow \mathfrak{g}$  est un opérateur de Reynolds généralisé, où le 2-cocycle est déterminé par  $(H + \delta\omega)$ .

**Preuve 4.2.4.** Soient  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Reynolds généralisé et  $\omega \in C_{\alpha, \beta}^1(\mathfrak{g}, M)$  de degré zéro tel que l'opérateur  $(Id_M - \omega \circ T)$  soit inversible. Alors pour tout  $u' \in M$ , il existe  $u \in M$  tel que  $u' = (Id_M - \omega \circ T)u$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{Gr}(T \circ (Id_M - \omega \circ T)^{-1}) &= \left\{ (T \circ (Id_M - \omega \circ T)^{-1})u', u' \mid u' \in M \right\} \\ &= \left\{ (Tu, (Id_M - \omega \circ T)u) \mid u \in M \right\} \\ &= \psi(\text{Gr}(T)) \subseteq \mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^{H+\delta\omega} M. \end{aligned}$$

Il découle du Lemme 4.2.1 que  $T \circ (Id_M - \omega \circ T)^{-1}$  est un opérateur de Reynolds généralisé.

**Définition 4.2.4.** Soient  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Reynolds généralisé et  $\omega$  un 1-cocycle de degré zéro. Alors  $\omega$  est dite 1-cocycle  $T$ -admissible si l'application  $(Id_M + \omega \circ T) : M \rightarrow M$  est inversible.

**Proposition 4.2.3.** Soit  $\omega$  un 1-cocycle  $T$ -admissible. Alors  $T \circ (Id_M + \omega \circ T)^{-1} : M \rightarrow \mathfrak{g}$  est un opérateur de Reynolds généralisé. C'est la **transformation de gauge** de  $T$ . On la note  $T_\omega$ .

**Preuve 4.2.5.** D'après le Lemme 1.3.1, l'application bilinéaire  $\psi' : \mathfrak{g} \ltimes_\rho^H M \rightarrow \mathfrak{g} \ltimes_\rho^H M$  donnée par  $\psi'(x, u) = (x, u + \omega(x))$  définit un endomorphisme d'algèbre 3-Hom-Lie colorée. On considère le sous espace  $\Gamma$ -gradué déformé :

$$\psi'(\mathbf{Gr}(T)) = \{(Tu, u + (\omega \circ T)u) \mid u \in M\} \subset \mathfrak{g} \ltimes_\rho^H M.$$

Alors  $\psi'(\mathbf{Gr}(T))$  est une Hom-sous-algèbre colorée. D'autre part, l'opérateur  $(Id_M + \omega \circ T)$  est inversible implique que  $\psi'(\mathbf{Gr}(T))$  est le graphe de  $(T \circ (Id_M + \omega \circ T)^{-1})$ . D'où  $T_\omega$  est un opérateur de Reynolds généralisé.

**Proposition 4.2.4.** Soient  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Reynolds généralisé et  $\omega$  un 1-cocycle  $T$ -admissible. Alors les structures d'algèbres 3-Hom-Lie colorées sur  $M$  induites par des opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T_\omega$  sont isomorphes.

**Preuve 4.2.6.** Notons que le quadruplet  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_{T_\omega}, \varepsilon, \mu)$  est une algèbre 3-Hom-Lie colorée. On considère l'endomorphisme  $Id_M + \omega \circ T : M \rightarrow M$ , il est clair qu'elle commute avec  $\mu$ . De plus :

$$\begin{aligned} & [(Id_M + \omega \circ T)u, (Id_M + \omega \circ T)v, (Id_M + \omega \circ T)w]_{T_\omega} \\ &= \rho(Tu, Tv)(Id_M + \omega \circ T)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)(Id_M + \omega \circ T)v \\ & \quad + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)(Id_M + \omega \circ T)u + H(Tu, Tv, Tw) \\ &= \rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u + H(Tu, Tv, Tw) \\ & \quad + \rho(Tu, Tv)(\omega \circ T)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)(\omega \circ T)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)(\omega \circ T)u \\ &= [u, v, w]_T + \omega([Tu, Tv, Tw]) \\ &= [u, v, w]_T + \omega \circ T([u, v, w]_T) \\ &= (Id_M + \omega \circ T)([u, v, w]_T). \end{aligned}$$

Cela prouve que  $(Id_M + \omega \circ T)$  est un isomorphisme d'algèbres 3-Hom-Lie colorées.

### 4.3 Structures complexes généralisées twistées

Le but de cette section est d'introduire les structures complexes généralisées twistées sur les modules des algèbres 3-Hom-Lie colorées induites par les algèbres Hom-Lie colorées. En outre, on donne le lien entre les structures complexes généralisées twistées et les opérateurs de Reynolds généralisés, ainsi que quelques constructions et exemples.

Soit  $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^H M$  un produit semi-direct twisté d'algèbre Hom-Lie colorée. Toute application linéaire  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  doit être de la forme :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} N & T \\ \sigma & -S \end{pmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Pour certaines applications linéaires de degré zéro  $N \in \text{End}_0(\mathfrak{g})$ ,  $S \in \text{End}_0(M)$ ,  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  et  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow M$ . Ces applications sont les **composantes de la structure** de  $\mathcal{J}$ .

**Définition 4.3.1.** Une *structure complexe généralisée twistée* sur un module  $M$  d'algèbre Hom-Lie colorée est une application bilinéaire de degré zéro  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $\alpha \circ N = N \circ \alpha$  et  $\mu \circ S = S \circ \mu$ ,
- $\alpha \circ T = T \circ \mu$  et  $\sigma \circ \alpha = \mu \circ \sigma$ ,
- $\mathcal{J}$  est un quasi complexe :  $\mathcal{J}^2 = -\text{id}$ ,
- la condition d'intégrabilité :

$$[\mathcal{J}(x+u), \mathcal{J}(y+v)]_{\rho}^H = [(x+u), (y+v)]_{\rho}^H + \mathcal{J}\left([\mathcal{J}(x+u), (y+v)]_{\rho}^H + [(x+u), \mathcal{J}(y+v)]_{\rho}^H\right),$$

pour tout  $(x+u), (y+v) \in \mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$ .

**Remarque 4.3.1.** Une *structure complexe généralisée twistée* est un opérateur de Nijenhuis sur le produit semi-direct twisté qui satisfait  $\mathcal{J}^2 = -\text{id}$ .

**Théorème 4.3.1.** Une application bilinéaire  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  de la forme (4.3.1) est une *structure complexe généralisée twistée* sur un module  $M$  d'algèbre Hom-Lie colorée, si et seulement si, ses composantes satisfont les identités suivantes pour tout  $x, y \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$  et  $u, v \in \mathcal{H}(M)$  :

$$NT = TS, \quad (4.3.2)$$

$$N^2 + T\sigma = -\text{id}, \quad (4.3.3)$$

$$S\sigma = \sigma N, \quad (4.3.4)$$

$$S^2 + \sigma T = -\text{id}, \quad (4.3.5)$$

$$[Tu, Tv] = T\left(\rho(Tu)v - \varepsilon(u, v)\rho(Tv)u\right), \quad (4.3.6)$$

$$\rho(Tu)Sv - \varepsilon(u, v)\rho(Tv)Su - H(Tu, Tv) = S\left(\rho(Tu)v - \varepsilon(u, v)\rho(Tv)u\right), \quad (4.3.7)$$

$$[Nx, Tv] - N[x, Tv] = T\left(\rho(Nx)v - \rho(x)Sv + H(x, Tv)\right), \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned} & \rho(Nx)Sv + \varepsilon(u, v)\rho(Tu)\sigma x - H(Nx, Tv) + \rho(x)v \\ & = S\left(\rho(Nx)v - \rho(x)Sv + H(x, Tv)\right) - \sigma[x, Tv], \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$[Nx, Ny] - [x, y] - N\left([Nx, y] + [x, Ny]\right)$$

$$= T(\rho(x)\sigma y - \varepsilon(x,y)\rho(y)\sigma x + H(Nx,y) + H(x,Ny)), \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} & \rho(Nx)\sigma y - \varepsilon(x,y)\rho(Ny)\sigma x + H(Nx,Ny) - H(x,y) - \sigma([Nx,y] + [x,Ny]) \\ &= -S(\rho(x)\sigma y - \varepsilon(x,y)\rho(y)\sigma x + H(Nx,y) + H(x,Ny)). \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

**Preuve 4.3.1.** La condition  $\mathcal{J}^2 = -\text{id}$  est identique à :

$$\begin{pmatrix} N^2(x) + NT(u) + T\sigma(x) - TS(u) \\ \sigma N(x) + \sigma T(u) - S\sigma(x) + S^2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -u \end{pmatrix}.$$

Ce qui est équivalent aux identités (4.3.2)-(4.3.5). Puis, on considère la condition d'intégrabilité; pour  $u, v \in \mathcal{H}(M)$ , le critère d'intégrabilité est équivalent aux conditions (4.3.6) et (4.3.7). Pour  $x \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$  et  $u \in \mathcal{H}(M)$ , l'intégrabilité est équivalente aux Eqs.(4.3.8)-(4.3.9). Et pour  $x, y \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$ , on obtient les identités (4.3.10) et (4.3.11).

Motivé par l'Eq.(4.2.2), on introduit la notion de structure complexe généralisée twistée sur un module d'algèbre 3-Hom-Lie colorée.

**Définition 4.3.2.** Une structure complexe généralisée twistée sur un module  $M$  d'algèbre 3-Hom-Lie colorée est une application bilinéaire de degré zéro  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  qui satisfait

- $\alpha \circ N = N \circ \alpha$  et  $\mu \circ S = S \circ \mu$ ,
- $\alpha \circ T = T \circ \mu$  et  $\sigma \circ \alpha = \mu \circ \sigma$ ,
- $\mathcal{J}$  est un quasi complexe :  $\mathcal{J}^2 = -\text{id}$ ,
- la condition d'intégrabilité

$$\begin{aligned} & [\mathcal{J}(x+u), \mathcal{J}(y+v), \mathcal{J}(z+w)]_\rho^H = \mathcal{J}[\mathcal{J}(x+u), \mathcal{J}(y+v), (z+w)]_\rho^H + \mathcal{J}[\mathcal{J}(x+u), (y+v), \mathcal{J}(z+w)]_\rho^H \\ & + \mathcal{J}[(x+u), \mathcal{J}(y+v), \mathcal{J}(z+w)]_\rho^H + [\mathcal{J}(x+u), (y+v), (z+w)]_\rho^H + [(x+u), \mathcal{J}(y+v), (z+w)]_\rho^H \\ & + [(x+u), (y+v), \mathcal{J}(z+w)]_\rho^H - \mathcal{J}[(x+u), (y+v), (z+w)]_\rho^H. \end{aligned}$$

Pour tout  $(x+u), (y+v)$  et  $(z,w)$  dans  $\mathcal{H}(\mathfrak{g} \oplus M)$ .

**Remarque 4.3.2.** Une structure complexe généralisée est une structure complexe généralisée twistée, où le 2-cocycle  $H = 0$ .

**Théorème 4.3.2.** Une application linéaire  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  de la forme (4.3.1) est une structure complexe généralisée twistée sur un module  $M$  d'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $\mathfrak{g}$ , si et seulement si, ses composantes satisfont aux identités suivantes :

$$NT = TS, \quad (4.3.12)$$

$$N^2 + T\sigma = -\text{id}, \quad (4.3.13)$$

$$S\sigma = \sigma N, \quad (4.3.14)$$

$$S^2 + \sigma T = -\text{id}, \tag{4.3.15}$$

$$[Tu, Tv, Tw] = T\left(\rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u\right), \tag{4.3.16}$$

$$\begin{aligned} & \rho(Tu, Tv)Sw - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)Sv + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)Su - H(Tu, Tv, Tw) \\ = & S\left(\rho(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)u\right), \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

$$\begin{aligned} & [Nx, Tv, Tw] - N[x, Tv, Tw] \\ = & T\left(\rho(Nx, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Nx, Tw)v - \rho(x, Tv)Sw + \varepsilon(v, w)\rho(x, Tw)Sv + H(x, Tv, Tw)\right), \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

$$\begin{aligned} & \rho(Nx, Tv)Sw - \varepsilon(v, w)\rho(Nx, Tw)Sv - \varepsilon(u, v + w)\rho(Tv, Tw)\sigma x - H(Nx, Tu, Tw) \\ = & S\left(\rho(Nx, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho(Nx, Tw)v - \rho(x, Tv)Sw + \varepsilon(v, w)\rho(x, Tw)Sv + H(x, Tv, Tw)\right) \\ & - \sigma[x, Tv, Tw] - \rho(x, Tv)w + \varepsilon(v, w)\rho(x, Tw)v, \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

$$\begin{aligned} & [Nx, Ny, Tw] - [x, y, Tw] - N\left([Nx, y, Tw] + [x, Ny, Tw]\right) \\ = & T\left(\rho(Nx, Ny)w - \rho(x, y)w - \rho(Nx, y)Sw + \varepsilon(u, v + w)\rho(y, Tw)\sigma x + H(Nx, y, Tw)\right) \\ & - \rho(x, Ny)Sw - \varepsilon(v, w)\rho(x, Tw)\sigma y + H(x, Ny, Tw), \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

$$\begin{aligned} & \rho(Nx, y)w + \rho(x, Ny)w - \rho(x, y)Sw + H(x, y, Tw) + \sigma\left([Nx, y, Tw] + [x, Ny, Tw]\right) \\ & + \rho(Nx, Ny)Sw + \varepsilon(u, v)\rho(Nx, Tw)\sigma y - \varepsilon(u, v + w)\rho(Ny, Tw)\sigma x - H(Nx, Ny, Tw) \\ = & S\left(\rho(x, y)w + \rho(Nx, Ny)w - \rho(Nx, y)Sw + \varepsilon(u, v + w)\rho(y, Tw)\sigma x + H(Nx, y, Tw)\right) \\ & - \rho(x, Ny)Sw - \varepsilon(u, v)\rho(x, Tw)\sigma y + H(x, Ny, Tw), \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

$$\begin{aligned} & [Nx, Ny, Nz] - [Nx, y, z] - [x, Ny, z] - [x, y, Nz] + N[x, y, z] \\ & - N\left([Nx, Ny, z] + [Nx, y, Nz] + [x, Ny, Nz]\right) \\ = & T\left(\rho(x, Ny)\sigma z - \varepsilon(y, z)\rho(x, Nz)\sigma y + H(x, Ny, Nz) + \rho(Nx, y)\sigma z - \varepsilon(x, y + z)\rho(y, Nz)\sigma x \right. \\ & \left. + H(Nx, y, Nz) - \varepsilon(y, z)\rho(Nx, z)\sigma y + \varepsilon(x, y + z)\rho(Ny, z)\sigma x + H(Nx, Ny, z) - H(x, y, z)\right), \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned} & \rho(Nx, Ny)\sigma z - \varepsilon(y, z)\rho(Nx, Nz)\sigma y + \varepsilon(x, y + z)\rho(Ny, Nz)\sigma x + H(Nx, Ny, Nz) \\ & - \sigma\left([Nx, Ny, z] + [Nx, y, Nz] + [x, Ny, Nz] - [x, y, z]\right) \\ = & S\left(\rho(x, Ny)\sigma z - \varepsilon(y, z)\rho(x, Nz)\sigma y + H(x, Ny, Nz) + \rho(Nx, y)\sigma z + \varepsilon(x, y + z)\rho(y, Nz)\sigma x \right. \\ & \left. + H(Nx, y, Nz) - \varepsilon(y, z)\rho(Nx, z)\sigma y + \varepsilon(x, y + z)\rho(Ny, z)\sigma x + H(Nx, Ny, z) + H(x, y, z)\right), \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

pour tout  $x, y \in \mathcal{H}(\mathfrak{g})$  et  $u, v \in \mathcal{H}(M)$ .

**Exemple 4.3.1.** Soit  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Rota-Baxter relatif sur une paire 3-Hom-LieRep colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$ . Si  $T$  est bijectif, alors  $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T^{-1} & 0 \end{pmatrix}$  est une structure complexe généralisée sur le module  $M$  de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée.

**Corollaire 4.3.1.** Soit  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  une structure complexe généralisée twistée sur un module  $M$  d'algèbre 3-Hom-Lie colorée. Alors  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  est un opérateur de Rota-Baxter relatif. De plus,  $\text{Gr}(T, S) = \{(Tu, Su) | u \in M\}$  est une Hom-sous algèbre colorée du produit semi-direct twisté  $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho}^{-H} M$ .

**Théorème 4.3.3.** Soit  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  une structure complexe généralisée twistée sur un module

$M$  d'algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . Alors  $\mathcal{J}$  est une structure complexe généralisée  $H_\tau$ -twistée sur  $M$  de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée induite  $\mathcal{G}_\tau = (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_\tau, \varepsilon, \alpha)$ .

**Preuve 4.3.2.** Soient  $\mathcal{J} : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  une structure complexe généralisée twistée sur un module  $(M, \rho, \mu)$  d'algèbre Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  et  $\tau$  une fonction quasi-trace. Pour tout  $u, v, w \in M$ , on a :

$$\begin{aligned} & [Tu, Tv, Tw]_\tau \\ \stackrel{(2.1.12)}{=} & \tau(Tu)[Tv, Tw] + \varepsilon(u, v + w)\tau(Tv)[Tw, Tu] + \varepsilon(u + v, w)\tau(Tw)[Tu, Tv] \\ \stackrel{(4.3.6)}{=} & T\left(\tau(Tu)\rho(Tv)w - \varepsilon(u, v)\tau(Tv)\rho(Tu)w - \varepsilon(v, w)\tau(Tu)\rho(Tw)v \right. \\ & \left. + \varepsilon(u + v, w)\tau(Tw)\rho(Tu)v + \varepsilon(u, v + w)\tau(Tv)\rho(Tw)u - \varepsilon(u + v, w)\varepsilon(u, v)\tau(Tw)\rho(Tv)u\right) \\ \stackrel{(2.1.11)}{=} & T\left(\rho_\tau(Tu, Tv)w - \varepsilon(v, w)\rho_\tau(Tu, Tw)v + \varepsilon(u, v + w)\rho_\tau(Tv, Tw)u\right). \end{aligned}$$

Alors l'Eq.(4.3.16) est démontrée. De la même manière, les Eqs.(4.3.17)- (4.3.21) seront démontrées. D'où  $\mathcal{J}$  est une structure complexe généralisée  $H_\tau$ -twistée sur  $M$  de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée induite.

**Définition 4.3.3.** Une **structure complexe** sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  est un opérateur de Nijenhuis  $\mathcal{I} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui satisfait  $\mathcal{I}^2 = -\text{Id}_\mathfrak{g}$ .

**Définition 4.3.4.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire 3-Hom-LieRep colorée. Une **structure complexe** sur le module  $M$  est un couple d'applications linéaires de degré zéro  $(\mathcal{I}, \mathcal{I}_M)$  qui satisfait :

- $\mathcal{I}_M$  est un endomorphisme de degré zéro sur  $M$  qui commute avec  $\mu$  tel que  $\mathcal{I}_M^2 = -\text{id}_M$ .
- $\mathcal{I}$  est une structure complexe sur l'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ .
- Pour tout  $x, y \in \mathfrak{g}$  et  $u \in M$  :

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{I}x, \mathcal{I}y)\mathcal{I}_M u = & \mathcal{I}_M\left(\rho(\mathcal{I}x, \mathcal{I}y)u + \rho(\mathcal{I}x, y)\mathcal{I}_M u + \rho(x, \mathcal{I}y)\mathcal{I}_M u - \rho(x, y)u\right) \\ & + \rho(\mathcal{I}x, y)u + \rho(x, \mathcal{I}y)u + \rho(x, y)\mathcal{I}_M u. \end{aligned}$$

**Proposition 4.3.1.** Un couple d'applications linéaires de degré zéro  $(\mathcal{I}, \mathcal{I}_M)$  est une structure complexe sur un module  $M$  d'algèbre 3-Hom-Lie colorée si et seulement si  $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}_M : \mathfrak{g} \oplus M \rightarrow \mathfrak{g} \oplus M$  est une structure complexe sur le produit semi-direct  $\mathfrak{g} \ltimes_\rho M$ .

**Exemple 4.3.2.** Soit  $(\mathcal{I}, \mathcal{I}_M)$  une structure complexe sur un module  $M$  d'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_M \end{pmatrix}$  est une structure complexe généralisée sur le module  $M$  de l'algèbre 3-Hom-Lie colorée.

## Cohomologie de type Maurer-Cartan des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep

Notre objectif dans ce chapitre est d'introduire la notion d'opérateur de Reynolds généralisé sur un système triple de Lie muni d'une représentation (paire L.t.sRep). Par ailleurs, on construit une  $L_\infty$ -algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont des opérateurs de Reynolds généralisés. Cela nous permet de définir la cohomologie de Yamaguti d'un opérateur de Reynolds généralisé. Cette cohomologie peut être considérée comme la cohomologie de Yamaguti d'un certain système triple de Lie à coefficients dans une représentation donnée. En outre, on étudie les déformations des opérateurs de Reynolds généralisés du point de vue cohomologique en déterminant la classe d'obstruction d'une extension d'une déformation d'ordre  $n$ .

### 5.1 Opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires L.t.sRep

Dans cette section, on introduit la notion d'opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep qui est une généralisation des opérateurs de Reynolds de poids non nul sur un système triple de Lie. Cette notion a été étudiée sur les algèbres de Lie et 3-Lie dans [27] et [23, 71] respectivement. Par la suite, on donne quelques exemples et une caractérisation en termes de graphe d'un opérateur de Reynolds généralisé.

#### 5.1.1 Opérateurs de Reynolds de poids non nul sur les systèmes triples de Lie

**Définition 5.1.1.** Soient  $(L, [\cdot, \cdot])$  une algèbre de Lie et  $\lambda$  un scalaire non nul. Un **opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$**  sur une algèbre de Lie est une application linéaire  $\mathcal{R} : L \rightarrow L$  qui satisfait :

$$[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y] = \mathcal{R}\left([\mathcal{R}x, y] + [x, \mathcal{R}y] + \lambda[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y]\right) \quad \forall x, y \in L. \quad (5.1.1)$$

**Remarque 5.1.1.** Si  $\lambda = 1$ , on retrouve la condition d'un opérateur de Reynolds sur une algèbre de Lie qui est donnée dans [27].

**Définition 5.1.2.** Un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{K}$ ) sur un système triple de Lie  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est une application linéaire  $\mathcal{R} : L \rightarrow L$  qui vérifie :

$$[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] = \mathcal{R}([\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, z] + [x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] + [\mathcal{R}x, y, \mathcal{R}z] + \lambda[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z]). \quad (5.1.2)$$

On note par  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \mathcal{R})$  un système triple de Lie de Reynolds de poids  $\lambda$ .

**Exemple 5.1.1.** Pour un nombre complexe fixé  $q$ , il y a une structure de système triple de Lie analogue à l'algèbre de Lie de type Block introduite dans [19], qui est engendrée par la base  $B(q) = \{L_{m,i} | m, i \in \mathbb{Z}\}$  et définie par le crochet ternaire suivant :

$$[L_{m,i}, L_{n,j}, L_{p,k}] = (n(i+q) - m(j+q))(p(i+j+q) - (m+n)(p+q))L_{m+n+p, i+j+k}.$$

Soit  $B(q)_{\geq 0} = \{L_{m,i} | m, i \in \mathbb{Z}_+\}$ , alors l'application linéaire  $\mathcal{R} : B(q)_{\geq 0} \rightarrow B(q)_{\geq 0}$  définie par

$$\mathcal{R}(L_{m,i}) = \frac{-1}{\lambda(m+i+1)} L_{m,i} \quad \forall m \in B(q)_{\geq 0} \quad \lambda \neq 0, \quad (5.1.3)$$

est un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur  $B(q)_{\geq 0}$ .

**Définition 5.1.3.** Soient  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \mathcal{R})$  et  $(L', [\cdot, \cdot, \cdot]', \mathcal{R}')$  deux systèmes triples de Lie de Reynolds. Une application linéaire  $\alpha : L \rightarrow L'$  est un **morphisme** de systèmes triples de Lie de Reynolds si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha \circ \mathcal{R} &= \mathcal{R}' \circ \alpha \\ \alpha[x, y, z] &= [\alpha(x), \alpha(y), \alpha(z)]' \quad \forall x, y, z \in L. \end{aligned}$$

En d'autres termes, si  $\alpha$  est un morphisme de systèmes triples de Lie qui vérifie  $\alpha \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}' \circ \alpha$ .

**Théorème 5.1.1.** Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \mathcal{R})$  un système triple de Lie de Reynolds de poids  $\lambda$ . On définit  $[\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathcal{R}}$  sur l'espace vectoriel  $L$  comme suit :

$$[x, y, z]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, z] + [\mathcal{R}x, y, \mathcal{R}z] + [x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] + \lambda[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] \quad \forall x, y, z \in L. \quad (5.1.4)$$

Alors  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathcal{R}}, \mathcal{R})$  est un système triple de Lie de Reynolds de poids  $\lambda$ . De plus,  $\mathcal{R}$  est un morphisme de systèmes triples de Lie.

**Proposition 5.1.1.** Soit  $\mathcal{R} : L \rightarrow L$  un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur une algèbre de Lie. Alors  $\mathcal{R}$  est un opérateur de Reynolds de poids  $2\lambda$  sur le système triple de Lie induit.

**Exemple 5.1.2.** Soit  $W$  l'algèbre de Witt engendrée par les éléments de la base  $\{l_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Le crochet de Lie est défini par l'équation suivante :

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1.5)$$

D'après le Théorème 1.2.1, on a un système triple de Lie défini par le crochet suivant :

$$[l_m, l_n, l_p] = (m - n)(m + n - p)l_{m+n+p} \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z}.$$

On définit sur l'algèbre  $W_{\geq 0} = \text{span}\{l_n | n \geq 0\}$  un opérateur  $\mathcal{R} : W_{\geq 0} \rightarrow W_{\geq 0}$  par :

$$\mathcal{R}(l_m) = \frac{-1}{\lambda(m+1)} l_m \quad \forall m \in W_{\geq 0} \text{ et } \lambda \neq 0. \quad (5.1.6)$$

Notons que  $\mathcal{R}$  est un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur l'algèbre de Lie  $W_{\geq 0}$ . En appliquant la Proposition 5.1.1, on trouve que  $\mathcal{R}$  est un opérateur de Reynolds de poids  $2\lambda$  sur le système triple de Lie induit. Cet exemple sera également considéré dans la suite lorsque on introduit la structure de Nijenhuis des systèmes triples de Lie.

### 5.1.2 Opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires L.t.sRep

Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  une paire L.t.sRep. Pour tout 3-cocycle  $\mathcal{H} \in \mathcal{Z}_{L.t.s.}^3(L, M)$ , on a une structure de système triple de Lie sur la somme direct  $L \oplus M$  donnée par :

$$[x + u, y + v, z + w]_{\mathcal{H}} = \left( [x, y, z], \theta(y, z)u - \theta(x, z)v + D(x, y)w + \mathcal{H}(x, y, z) \right). \quad (5.1.7)$$

Ce système triple de Lie est appelé **produit semi-direct twisté** et noté par  $L \ltimes_{\theta}^{\mathcal{H}} M$ .

Désormais,  $\mathcal{H}$  désignera toujours un 3-cocycle.

**Définition 5.1.4.** Une application linéaire  $T : M \rightarrow L$  est un **opérateur de Reynolds généralisé** sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ , si elle vérifie :

$$[Tu, Tv, Tw] = T \left( D(Tu, Tv)w + \theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \right) \quad \forall u, v, w \in M. \quad (5.1.8)$$

**Exemple 5.1.3.** Un opérateur de **Rota-Baxter** de poids zéro sur un système triple de Lie  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est une application linéaire  $\mathcal{R} : L \rightarrow L$  satisfaisant :

$$[\mathcal{R}(x), \mathcal{R}(y), \mathcal{R}(z)] = \mathcal{R} \left( [\mathcal{R}(x), \mathcal{R}(y), z] + [\mathcal{R}(x), y, \mathcal{R}(z)] + [x, \mathcal{R}(y), \mathcal{R}(z)] \right) \quad \forall x, y, z \in L.$$

Tout opérateur de Rota-Baxter de poids zéro sur un système triple de Lie est un opérateur de Reynolds généralisé, où la représentation est la représentation régulière et le 3-cocycle  $\mathcal{H}$  est trivial.

**Exemple 5.1.4.** Tout opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur un système triple de Lie  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est un opérateur de Reynolds généralisé par rapport à la représentation régulière, où le 3-cocycle  $\mathcal{H}$  est défini par;

$$\mathcal{H}(x, y, z) = \lambda[x, y, z] \quad \forall x, y, z \in L.$$

**Exemple 5.1.5.** Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  une paire L.t.sRep. Supposons que  $\varphi \in \mathcal{C}_{L.t.s.}^1(L, M)$  soit une cochaîne bijective. Alors  $\varphi^{-1} : M \rightarrow L$  est un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep, où  $\mathcal{H} = -\delta^1 \varphi$ . En effet, on a :

$$\delta^1 \varphi(Tu, Tv, Tw) = D(Tu, Tv)w - \theta(Tu, Tw)v + \theta(Tv, Tw)u - \varphi([Tu, Tv, Tw]) \quad \forall u, v, w \in M.$$

En appliquant  $\varphi^{-1}$  aux deux membres de l'équation, on obtient le résultat.

**Définition 5.1.5.** Soient  $T$  et  $T'$  deux opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep. Un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T'$  est la donnée d'un morphisme de système triple de Lie  $\phi : L \rightarrow L$  et d'un endomorphisme  $\psi : M \rightarrow M$  qui satisfont :

$$\phi \circ T = T' \circ \psi, \quad (5.1.9)$$

$$\psi(\theta(x, y)u) = \theta(\phi(x), \phi(y))\psi(u), \quad (5.1.10)$$

$$\psi(\mathcal{H}(x, y, z)) = \mathcal{H}(\phi(x), \phi(y), \phi(z)) \quad \forall x, y, z \in L, u \in M. \quad (5.1.11)$$

En particulier, si  $\phi$  et  $\psi$  sont tous deux bijectifs, alors  $(\phi, \psi)$  est dite **isomorphisme**.

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_{L.t.s.}^1(L, M)$  une cochaîne, on définit  $\kappa_\varphi : L \oplus M \rightarrow L \oplus M$  par  $\kappa_\varphi = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ \varphi & Id \end{pmatrix}$ .

**Proposition 5.1.2.** Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  une paire L.t.sRep. Alors  $\kappa_\varphi$  est un isomorphisme de produits semi-direct twistés  $L \rtimes_{\theta}^{\mathcal{H}'} M$  et  $L \rtimes_{\theta}^{\mathcal{H}} M$ , où  $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \delta^1 \varphi$ .

L'identité (5.1.8) peut être caractérisée par le graphe de  $T$  étant une sous-algèbre.

**Proposition 5.1.3.** Une application linéaire  $T : M \rightarrow L$  est un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  si et seulement si le graphe  $Gr(T) = \{(Tu, u) \mid u \in M\}$  est une sous-algèbre du produit semi-direct twisté  $L \rtimes_{\theta}^{\mathcal{H}} M$ .

**Preuve 5.1.1.** Soit  $T : M \rightarrow L$  une application linéaire. Pour tout  $u, v, w \in M$ , on a :

$$\begin{aligned} & [Tu + u, Tv + v, Tw + w]_{\mathcal{H}} \\ &= \left( [Tu, Tv, Tw], \theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v + D(Tu, Tv)w + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique que le graphe  $Gr(T)$  est une sous-algèbre du produit semi-direct twisté  $L \rtimes_{\theta}^{\mathcal{H}} M$  si et seulement si  $T$  satisfait :

$$[Tu, Tv, Tw] = T \left( \theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v + D(Tu, Tv)w + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \right).$$

Ce qui signifie que  $T$  est un opérateur de Reynolds généralisé.

Puisque  $M$  et  $Gr(T)$  sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 5.1.1.** Soit  $T : M \rightarrow L$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Alors il existe une structure de système triple de Lie sur  $M$  donnée par :

$$[u, v, w]_T = \theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v + D(Tu, Tv)w + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \quad \forall u, v, w \in M. \quad (5.1.12)$$

En outre,  $T$  est un morphisme de systèmes triples de Lie.

**Définition 5.1.6.** Soit  $T : M \rightarrow L$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . L'application  $\varphi \in \mathcal{Z}_{L.t.s.}^1(L, M)$  est dite **1-cocycle  $T$ -admissible** si l'endomorphisme  $(Id + \varphi \circ T) : M \rightarrow M$  est bijectif.

**Proposition 5.1.4.** Soit  $\varphi$  est un 1-cocycle  $T$ -admissible alors  $T \circ (Id + \varphi \circ T)^{-1} : M \rightarrow L$  est un opérateur de Reynolds généralisé. On note cet opérateur par  $T_\varphi$ .

**Preuve 5.1.2.** Soit  $\varphi \in \mathcal{Z}_{L.t.s.}^1(L, M)$  un 1-cocycle  $T$ -admissible. D'après les Propositions 5.1.2 et 5.1.3, on a :

$$\kappa_\varphi(Gr(T)) = \{(Tu, u + \varphi(Tu)) \mid u \in M\} \subseteq L \rtimes_{\theta}^{\mathcal{H}'} M,$$

est une sous-algèbre du produit semi-direct twisté  $L \rtimes_{\theta}^{\mathcal{H}'} M$ , où  $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \delta^1 \varphi$ . Etant donnée que  $(Id + \varphi \circ T) : M \rightarrow M$  est un isomorphisme, donc  $\kappa_\varphi(Gr(T))$  est le graphe de l'application  $T \circ (Id + \varphi \circ T)^{-1} : M \rightarrow L$ . Ce qui implique que  $T \circ (Id + \varphi \circ T)^{-1}$  est un opérateur de Reynolds généralisé.

En suivant le Corollaire 5.1.1, on peut montrer que les structures de système triple de Lie induites par les opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T_\varphi$  sont isomorphes.

**Proposition 5.1.5.** Soient  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé et  $\varphi$  un 1-cocycle  $T$ -admissible. Alors les structures de système triple de Lie sur  $M$  induites par  $T$  et  $T_\varphi$  sont isomorphes.

**Preuve 5.1.3.** On considère l'application linéaire  $(Id + \varphi \circ T) : M \rightarrow M$ . Pour tout  $u, v, w \in M$ , on a

$$\begin{aligned} & [(Id + \varphi \circ T)u, (Id + \varphi \circ T)v, (Id + \varphi \circ T)w]_{T_\varphi} \\ = & \theta(Tu, Tv)(Id + \varphi \circ T)w - \theta(Tu, Tw)(Id + \varphi \circ T)v \\ & + D(Tv, Tw)(Id + \varphi \circ T)u + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \\ = & \theta(Tu, Tv)w - \theta(Tu, Tw)v + D(Tv, Tw)u + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \\ & + \theta(Tu, Tv)(\varphi \circ T)w - \theta(Tu, Tw)(\varphi \circ T)v + D(Tv, Tw)(\varphi \circ T)u \\ \stackrel{(5.2.20)}{=} & [u, v, w]_T + \varphi([Tu, Tv, Tw]) \\ = & [u, v, w]_T + \varphi \circ T([u, v, w]_T) \\ = & (Id + \varphi \circ T)[u, v, w]_T. \end{aligned}$$

Donc  $(Id + \varphi \circ T)$  est un isomorphisme de systèmes triples de Lie.

Dans [27], l'auteur a introduit la notion d'opérateur de Reynolds généralisé sur une paire LieRep  $(L, [\cdot, \cdot], \rho)$  avec un 2-cocycle  $H$  dans la cohomologie de Chevalley-Eilenberg, en tant qu'application linéaire  $T : M \rightarrow L$  vérifiant :

$$[Tu, Tv] = T\left(\rho(Tu)v + \rho(Tv)u + H(Tu, Tv)\right) \quad \forall u, v \in M.$$

**Proposition 5.1.6.** Soit  $T : M \rightarrow L$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire LieRep  $(L, [\cdot, \cdot], \rho)$ . Alors  $T$  est aussi un opérateur de Reynolds généralisé sur la paire L.t.sRep induite.

## 5.2 Cohomologie de Yamaguti des opérateurs de Reynolds généralisés

Dans ce paragraphe, on construit une  $L_\infty$ -algèbre dont les éléments de Maurer-Cartan sont les opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep. Cette caractérisation nous permet de définir la cohomologie des opérateurs de Reynolds généralisés. Par la suite, on l'interprète comme la cohomologie de Yamaguti du système triple de Lie induit à coefficients dans une représentation adaptée.

### 5.2.1 Caractérisation de Maurer-Cartan

Une permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  est appelée  $(i, n-i)$ -shuffle si  $\sigma(1) < \dots < \sigma(i)$  et  $\sigma(i+1) < \dots < \sigma(n)$ . Si  $i = 0$  ou  $i = n$ , on suppose que  $\sigma = Id$ . L'ensemble des  $(i, n-i)$ -shuffles sera noté  $\mathbb{S}_{(i, n-i)}$ .

**Définition 5.2.1.** Une  $L_\infty$ -algèbre est un espace vectoriel  $\mathbb{Z}$ -gradué  $(\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k)$  muni d'une famille d'applications linéaires de degré 1;  $l_k : \otimes^k \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ( $k \geq 1$ ) qui satisfont pour tout élément homogène  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$  :

(i) La symétrie graduée :

$$l_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) l_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n.$$

(ii) L'identité de Jacobi généralisée :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{(i, n-i)}} \varepsilon(\sigma) l_{n-i+1}(l_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

**Définition 5.2.2.** Un élément de Maurer-Cartan d'une  $L_\infty$ -algèbre  $(\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$  est un élément  $\pi \in \mathfrak{g}^0$  satisfaisant l'équation de Maurer-Cartan suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_n(\pi, \dots, \pi) = 0. \quad (5.2.1)$$

Soit  $\pi$  un élément de Maurer-Cartan d'une  $L_\infty$ -algèbre  $(\mathfrak{g}, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$ . On définit une série d'applications linéaires  $l_k^\pi : \otimes^k \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré 1 par :

$$l_k^\pi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_{n+k}(\underbrace{\pi, \dots, \pi}_n, x_1, \dots, x_k) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g} \text{ et } k \geq 1. \quad (5.2.2)$$

**Théorème 5.2.1.** [37] Avec les notations ci-dessus,  $(\mathfrak{g}, \{l_i^\pi\}_{i=1}^{+\infty})$  est une  $L_\infty$ -algèbre qui est obtenue en twistant avec un élément de Maurer-Cartan  $\pi$  de la  $L_\infty$ -algèbre  $(\mathfrak{g}, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$ . En outre,  $\pi + \pi'$  est un élément de Maurer-Cartan de  $(\mathfrak{g}, \{l_i\}_{i=1}^{+\infty})$  si et seulement si  $\pi'$  est un élément de Maurer-Cartan de la  $L_\infty$ -algèbre twistée  $(\mathfrak{g}, \{l_i^\pi\}_{i=1}^{+\infty})$ .

Soit  $L$  un espace vectoriel. On considère l'espace vectoriel gradué  $\mathfrak{C}^*(L, L) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{C}^n(L, L)$ , où  $\mathfrak{C}^n(L, L)$  est l'espace des applications multilinéaires  $P \in \text{Hom}(\underbrace{(\wedge^2 L) \otimes \dots \otimes (\wedge^2 L)}_{n \geq 0} \otimes L, L)$  qui satisfont :

$$P(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_{n-1}, x, x, y) = 0, \quad (5.2.3)$$

$$\cup_{x, y, z} P(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_{n-1}, x, y, z) = 0. \quad (5.2.4)$$

Le degré d'un élément dans  $\mathfrak{C}^n(L, L)$  est défini comme étant  $n$ . On définit pour tout  $P \in \mathfrak{C}^p(L, L)$  et  $Q \in \mathfrak{C}^q$  :

$$[P, Q]_{L.t.s.} = P \circ Q - (-1)^{pq} Q \circ P, \quad (5.2.5)$$

où  $P \circ Q \in \mathfrak{C}^{p+q}(L, L)$  est donné par :

$$\begin{aligned} & (P \circ Q)(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{p+q}, x) \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{(k-1)q} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}(k-1, q)} (-1)^\sigma P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \dots, \mathfrak{X}_{\sigma(k-1)}, Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)}, \dots, \mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)}, x_{k+q}) \wedge y_{k+q}, \mathfrak{X}_{k+q+1}, \dots, \mathfrak{X}_{p+q}, x) \\ &+ \sum_{k=1}^p (-1)^{(k-1)q} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}(k-1, q)} (-1)^\sigma P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \dots, \mathfrak{X}_{\sigma(k-1)}, x_{k+q} \wedge Q(\mathfrak{X}_{\sigma(k)}, \dots, \mathfrak{X}_{\sigma(k+q-1)}, y_{k+q}), \mathfrak{X}_{k+q+1}, \dots, \mathfrak{X}_{p+q}, x) \\ &+ \sum_{\sigma \in \mathbb{S}(p, q)} (-1)^{pq} (-1)^\sigma P(\mathfrak{X}_{\sigma(1)}, \dots, \mathfrak{X}_{\sigma(p)}, Q(\mathfrak{X}_{\sigma(p+1)}, \dots, \mathfrak{X}_{\sigma(p+q-1)}, \mathfrak{X}_{\sigma(p+q)}, x)), \end{aligned}$$

pour tout  $(k-1, q)$ -shuffle  $\sigma$ .

**Proposition 5.2.1.** *L'espace vectoriel gradué  $\mathfrak{C}^*(L, L)$  muni du crochet gradué défini par (5.2.5) est une algèbre de Lie graduée.*

**Proposition 5.2.2.** *Soit  $L$  un espace vectoriel. Alors  $\pi \in \mathfrak{C}^1(L, L)$  définit une structure de système triple de Lie sur  $L$  si et seulement si  $[\pi, \pi]_{L.t.s.} = 0$ , c'est-à-dire que  $\pi$  est un élément de Maurer-Cartan de l'algèbre de Lie graduée  $(\mathfrak{C}^*(L, L), [\cdot, \cdot]_{L.t.s.})$ . En outre,  $(\mathfrak{C}^*(L, L), [\cdot, \cdot]_{L.t.s.}, d_\pi)$  est une algèbre de Lie différentielle graduée, où  $d_\pi$  est définie par :*

$$d_\pi := (-1)^{n-1}[\pi, \cdot]_{L.t.s.} \quad (5.2.6)$$

Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  une paire L.t.sRep. On écrit simplement  $\pi : \wedge^2 L \otimes L \rightarrow L$  pour indiquer la structure de système triple de Lie  $[\cdot, \cdot, \cdot]$ . Alors  $\pi + \theta + \mathcal{H}$  correspond au produit semi-direct du système triple de Lie sur  $L \oplus M$  défini pour tout  $x, y, z \in L$  et  $u, v, w \in M$  par :

$$[x + u, y + v, z + w]_{\mathcal{H}} = \left( [x, y, z], \theta(y, z)u - \theta(x, z)v + D(x, y)w + \mathcal{H}(x, y, z) \right). \quad (5.2.7)$$

On obtient donc :

$$[\pi + \theta + \mathcal{H}, \pi + \theta + \mathcal{H}]_{L.t.s.} = 0.$$

On considère l'espace vectoriel gradué  $\mathfrak{C}^*(M, L) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{C}^n(M, L)$ , où  $\mathfrak{C}^n(M, L)$  est l'ensemble des applications linéaires  $f \in \text{Hom}(\underbrace{(\wedge^2 M) \otimes \dots \otimes (\wedge^2 M)}_{n \geq 0} \otimes M, L)$  satisfaisant :

$$f(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, u, u, v) = 0, \quad (5.2.8)$$

$$\cup_{u, v, w} f(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, u, v, w) = 0 \quad \forall \mathfrak{u}_i \in \otimes^2 M, 1 \leq i \leq n-1. \quad (5.2.9)$$

On définit

$$l_3 : \mathfrak{C}^p(M, L) \times \mathfrak{C}^q(M, L) \times \mathfrak{C}^r(M, L) \rightarrow \mathfrak{C}^{p+q+r+1}(M, L),$$

$$l_4 : \mathfrak{C}^p(M, L) \times \mathfrak{C}^q(M, L) \times \mathfrak{C}^r(M, L) \times \mathfrak{C}^s(M, L) \rightarrow \mathfrak{C}^{p+q+r+s+1}(M, L)$$

par :

$$l_3(P, Q, R) = [[[\pi + \theta, P]_{L.t.s.}, Q]_{L.t.s.}, R]_{L.t.s.},$$

$$l_4(P, Q, R, S) = [[[[\mathcal{H}, P]_{L.t.s.}, Q]_{L.t.s.}, R]_{L.t.s.}, S]_{L.t.s.}.$$

Maintenant, on présente la caractérisation de Maurer-Cartan des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire LieRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ .

**Proposition 5.2.3.** *L'espace vectoriel gradué  $\mathfrak{C}^*(M, L)$  est une  $L_\infty$ -algèbre avec  $\{l_1 = l_2 = 0, l_3(\cdot, \cdot, \cdot), l_4(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)\}$  et les crochets supérieures sont triviaux.*

**Théorème 5.2.2.** *Une application linéaire  $T : M \rightarrow L$  est un opérateur de Reynolds généralisé si et seulement si  $T$  est une solution de l'équation de Maurer-Cartan de la  $L_\infty$ -algèbre  $(\mathfrak{C}^*(M, L), l_3, l_4)$ . En d'autres termes :*

$$\frac{1}{3!}l_3(T, T, T) + \frac{1}{4!}l_4(T, T, T, T) = 0.$$

**Preuve 5.2.1.** Pour tout  $T \in Hom(M, L)$ , on a :

$$l_4(T, T, T, T)(u, v, w) = -24T(\mathcal{H}(Tu, Tv, Tw)). \quad (5.2.10)$$

D'après la preuve du Théorème 4.4 dans [24], on a :

$$l_3(T, T, T)(u, v, w) = 6\left([Tu, Tv, Tw] - T(\theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v + D(Tu, Tv)w)\right). \quad (5.2.11)$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3!}l_3(T, T, T) + \frac{1}{4!}l_4(T, T, T, T)\right)(u, v, w) \\ &= [Tu, Tv, Tw] - T(\theta(Tv, Tw)u - \theta(Tu, Tw)v + D(Tu, Tv)w + \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw)). \end{aligned}$$

Par conséquent, une application linéaire  $T \in Hom(M, L)$  est un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire  $L.t.sRep(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$  si et seulement si  $T$  est un élément de Maurer-Cartan de la  $L_\infty$ -algèbre  $(C^*(M, L), l_3, l_4)$ .

**Proposition 5.2.4.** Soit  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire  $L.t.sRep(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Alors  $C^*(M, L)$  est muni d'une structure de  $L_\infty$ -algèbre twistée donnée par :

$$l_1^T(P) = \frac{1}{2}l_3(T, T, P) + \frac{1}{6}l_4(T, T, T, P), \quad (5.2.12)$$

$$l_2^T(P, Q) = l_3(T, P, Q) + \frac{1}{2}l_4(T, T, P, Q), \quad (5.2.13)$$

$$l_3^T(P, Q, R) = l_3(P, Q, R) + l_4(T, P, Q, R), \quad (5.2.14)$$

$$l_4^T(P, Q, R, S) = l_4(P, Q, R, S), \quad (5.2.15)$$

$$l_k^T = 0, \quad k \geq 5, \quad (5.2.16)$$

pour tout  $P \in C^p(M, L), Q \in C^q(M, L), R \in C^r(M, L)$  et  $S \in C^s(M, L)$ . En outre, pour toute application linéaire  $T' : M \rightarrow L$ , la somme  $T + T'$  est un opérateur de Reynolds généralisé si et seulement si  $T'$  est un élément de Maurer-Cartan de la  $L_\infty$ -algèbre  $(C^*(M, L), l_1^T, l_2^T, l_3^T, l_4^T)$ , c'est-à-dire que l'application  $T'$  vérifie :

$$l_1^T(T') + \frac{1}{2!}l_2^T(T', T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T', T', T') + \frac{1}{4!}l_4^T(T', T', T', T') = 0.$$

**Preuve 5.2.2.** En ce qui concerne la première partie du théorème. Puisque  $T$  est un élément de Maurer-Cartan de la  $L_\infty$ -algèbre  $(C^*(M, L), l_3, l_4)$ , d'après le Théorème 5.2.1,  $C^*(M, L)$  est muni d'une structure de  $L_\infty$ -algèbre twistée. En ce qui concerne la seconde partie. Selon le Théorème 5.2.2,  $T + T'$  est un opérateur de Reynolds généralisé si et seulement si :

$$\frac{1}{3!}l_3(T + T', T + T', T + T') + \frac{1}{4!}l_4(T + T', T + T', T + T', T + T') = 0. \quad (5.2.17)$$

En soulignant le fait que  $\frac{1}{3!}l_3(T, T, T) + \frac{1}{4!}l_4(T, T, T, T) = 0$ . La condition ci-dessus est équivalente à ;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3!}\left(3l_3(T, T, T') + 3l_3(T, T', T') + l_3(T', T', T')\right) \\ & + \frac{1}{4!}\left(4l_4(T, T, T, T') + 6l_4(T, T, T', T') + 4l_4(T, T', T', T') + l_4(T', T', T', T')\right) = 0. \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$l_1^T(T') + \frac{1}{2!}l_2^T(T', T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T', T', T') + \frac{1}{4!}l_4^T(T', T', T', T') = 0.$$

Ce qui implique que  $T'$  est un élément de Maurer-Cartan de la  $L_\infty$ -algèbre twistée  $(C^*(M, L), l_1^T, l_2^T, l_3^T, l_4^T)$ .

Cette caractérisation nous permet de définir la cohomologie des opérateurs de Reynolds généralisés. En effet, pour  $n \geq 0$ , on définit sur l'espace  $C_T^n(M, L) = Hom(\underbrace{\otimes^2 M \otimes \dots \otimes \otimes^2 M}_{n \geq 0} \wedge M, L)$  l'opérateur différentiel  $d_T : C_T^n(M, L) \rightarrow C_T^{n+1}(M, L)$  par :

$$d_T(f) = l_1^T(f) = \frac{1}{2}l_3(T, T, f) + \frac{1}{6}l_4(T, T, T, f). \quad (5.2.18)$$

Les groupes cohomologiques correspondants sont :

$$H_T^n(M, L) = \frac{Z_T^n(M, L)}{B_T^n(M, L)} = \frac{\{f \in C_T^n(M, L) | d_T(f) = 0\}}{\{d_T(g) | g \in C_T^{n-1}(M, L)\}}.$$

## 5.2.2 Cohomologie de Yamaguti

Soit une structure de système triple de Lie de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Etant donnée une structure de système triple de Lie sur l'espace de la représentation  $M$ , on construit une représentation de l'espace des représentations (vu comme un système triple de Lie) sur la paire L.t.sRep (vue comme un espace vectoriel) comme suit : on définit une application bilinéaire  $\theta_T : \otimes^2 M \rightarrow End(L)$  par :

$$\theta_T(u, v)x = [x, Tu, Tv] - T(D(x, Tu)v - \theta(x, Tv)u + \mathcal{H}(x, Tu, Tv)) \quad \forall u, v \in M, x \in L. \quad (5.2.19)$$

**Proposition 5.2.5.** Avec les notations ci-dessus,  $(L, \theta_T)$  est une représentation du système triple de Lie  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$ .

**Preuve 5.2.3.** Notons que :

$$\begin{aligned} D_T(u, v)x &= \theta_T(v, u)x - \theta_T(u, v)x \\ &= [Tu, Tv, x] - T(\theta(Tv, x))u - \theta(Tu, x)v + \mathcal{H}(Tu, Tv, x) \quad \forall u, v \in M \text{ and } x \in L. \end{aligned}$$

D'après les Eqs. (1.2.1)-(1.2.5), (1.2.10)-(1.2.11) et (5.1.8)-(5.1.12), pour tout  $u_i \in M, 1 \leq i \leq 4, x \in L$ , on a :

$$\begin{aligned} & \theta_T(u_3, u_4)\theta_T(u_1, u_2) - \theta_T(u_2, u_4)\theta_T(u_1, u_3) - \theta_T(u_1, [u_2, u_3, u_4]_T) + D_T(u_2, u_3)\theta_T(u_1, u_4)x \\ &= [[x, Tu_1, Tu_2], Tu_3, Tu_4] + [Tu_2, [x, Tu_1, Tu_3], Tu_4] + [Tu_2, Tu_3, [x, Tu_1, Tu_4]] \\ & \quad - [x, Tu_1, [Tu_2, Tu_3, Tu_4]] + T(\theta(Tu_3, Tu_4)\theta(x, Tu_2)u_1 - \theta(Tu_3, Tu_4)\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_2) \\ & \quad - \theta(Tu_3, Tu_4)D(x, Tu_1)u_2 + \theta(Tu_2, Tu_4)\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_3) - \theta(Tu_2, Tu_4)\theta(x, Tu_3)u_1 \\ & \quad + \theta(Tu_2, Tu_4)D(x, Tu_1)u_3 + D(x, Tu_1)\theta(Tu_3, Tu_4)u_2 - D(x, Tu_1)\theta(Tu_2, Tu_4)u_3 \\ & \quad + D(x, Tu_1)D(Tu_2, Tu_3)u_4 + D(x, Tu_1)\mathcal{H}(Tu_2, Tu_3, Tu_4) + \mathcal{H}(x, Tu_1, [Tu_2, Tu_3, Tu_4]) \\ & \quad - \theta(x, [Tu_2, Tu_3, Tu_4])u_1 + D(Tu_3, Tu_2)\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_4) + D(Tu_2, Tu_3)\theta(x, Tu_4)u_1 \\ & \quad + D(Tu_3, Tu_2)D(x, Tu_1)u_2 - D([x, Tu_1, Tu_2], Tu_3)u_4 + D([x, Tu_1, Tu_2], Tu_4)u_3 \\ & \quad + \theta([x, Tu_1, Tu_2], Tu_4)u_3 - \theta([x, Tu_1, Tu_3], Tu_4)u_2 - D([x, Tu_1, Tu_4], Tu_3)u_2 \\ & \quad + \theta([x, Tu_1, Tu_4], Tu_2)u_3 + D([x, Tu_1, Tu_4], Tu_2)u_3 - \theta([x, Tu_1, Tu_4], Tu_3)u_2) \\ &= T(\mathcal{H}(x, Tu_1, [Tu_2, Tu_3, Tu_4]) \\ & \quad + D(x, Tu_1)\mathcal{H}(Tu_2, Tu_3, Tu_4) - \mathcal{H}([x, Tu_1, Tu_2], Tu_3, Tu_4) \\ & \quad - \mathcal{H}(Tu_2, [x, Tu_1, Tu_3], Tu_4) - \mathcal{H}(Tu_2, Tu_3, [x, Tu_1, Tu_4]) - \theta(Tu_3, Tu_4)\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \theta(Tu_2, Tu_4)\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_3) - D(Tu_2, Tu_3)\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_4) \\
 & = T(\delta^3\mathcal{H}(x, Tu_1, Tu_2, Tu_3, Tu_4)) = 0.
 \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \theta_T(u_3, u_4)D_T(u_1, u_2) - D_T(u_1, u_2)\theta_T(u_3, u_4) + \theta_T([u_1, u_2, u_3]_T, u_4) + \theta_T(u_3, [u_1, u_2, u_4]_T)x \\
 & = [[Tu_1, Tu_2, x], Tu_3, Tu_4] + [x, [Tu_1, Tu_2, Tu_3], Tu_4] + [x, Tu_3, [Tu_1, Tu_2, Tu_4]] \\
 & \quad - [Tu_1, Tu_2, [x, Tu_3, Tu_4]] + T\left(\theta(Tu_3, Tu_4)\theta(Tu_1, x)u_2 - \theta(Tu_3, Tu_4)\theta(Tu_2, x)u_1 \right. \\
 & \quad - \theta(Tu_3, Tu_4)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, x) - \mathcal{H}([Tu_1, Tu_2, x], Tu_3, Tu_4) + D(Tu_1, Tu_2)\mathcal{H}(x, Tu_3, Tu_4) \\
 & \quad - D(Tu_1, Tu_2)\theta(x, Tu_4)u_3 + D(Tu_1, Tu_2)D(x, Tu_3)u_4 + \mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, [x, Tu_3, Tu_4]) \\
 & \quad + \theta(x, Tu_4)\theta(Tu_2, Tu_3)u_1 - \theta(x, Tu_4)\theta(Tu_1, Tu_3)u_2 + \theta(x, Tu_4)D(Tu_1, Tu_2)u_3 \\
 & \quad + \theta(x, Tu_4)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, Tu_3) - D(x, [Tu_1, Tu_2, Tu_3])u_4 - \mathcal{H}(x, [Tu_1, Tu_2, Tu_3], Tu_4) \\
 & \quad + \theta(x, [Tu_1, Tu_2, Tu_4])u_3 - D(x, Tu_3)\theta(Tu_2, Tu_4)u_1 + D(x, Tu_3)\theta(Tu_1, Tu_4)u_2 \\
 & \quad - D(x, Tu_3)D(Tu_1, Tu_2)u_4 - D(x, Tu_3)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, Tu_1) - \mathcal{H}(x, Tu_3, [Tu_1, Tu_2, Tu_4]) \\
 & \quad - D([Tu_1, Tu_2, x], Tu_3)u_4 + \theta([Tu_1, Tu_2, x], Tu_4)u_3 - \theta(Tu_2, [x, Tu_3, Tu_4])u_1 \\
 & \quad \left. - \theta(Tu_1, [x, Tu_3, Tu_4])u_2\right) \\
 & = T\left(\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, [x, Tu_3, Tu_4]) - \mathcal{H}([Tu_1, Tu_2, x], Tu_3, Tu_4) + D(Tu_1, Tu_2)\mathcal{H}(x, Tu_3, Tu_4) \right. \\
 & \quad - \mathcal{H}(x, [Tu_1, Tu_2, Tu_3], Tu_4) - \mathcal{H}(x, Tu_3, [Tu_1, Tu_2, Tu_4]) - \theta(Tu_3, Tu_4)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, x) \\
 & \quad \left. + \theta(x, Tu_4)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, Tu_3) - D(x, Tu_3)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, Tu_4)\right) \\
 & = T(\delta^3\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, x, Tu_3, Tu_4)) = 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\theta_T$  est une représentation du système triple de Lie  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$  sur  $L$ .

**Remarque 5.2.1.** On appelle cette représentation **la représentation induite** par  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$ .

Il découle de la proposition précédente qu'on peut considérer la cohomologie de Yamaguti de L.t.s.  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$  à coefficients dans la représentation  $(L, \theta_T)$ . Plus précisément, pour chaque  $n \geq 0$ , on désigne par  $\mathfrak{C}^{2n+1}(M, L)$  l'ensemble des  $(2n + 1)$ -cochaines de Yamaguti de  $M$  à coefficients dans  $L$ . Une  $(2n + 1)$ -cochaîne  $\varphi \in \mathfrak{C}^{2n+1}(M, L)$  est une application multilinéaire de  $M$  dans  $L$  qui satisfait :

$$\begin{aligned}
 \varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}, v, v, u) &= 0, \\
 \cup_{u, v, w} \varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}, u, v, w) &= 0.
 \end{aligned}$$

L'opérateur cobord correspondant  $\delta_T^{2n-1} : \mathfrak{C}^{2n-1}(M, L) \rightarrow \mathfrak{C}^{2n+1}(M, L)$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \delta_T^{2n-1}\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}) \\
 & = \theta_T(v_{2n}, v_{2n+1})\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}) - \theta_T(v_{2n-1}, v_{2n+1})\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}, v_{2n}) \\
 & \quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} D_T(v_{2k-1}, v_{2k})\varphi(v_1, v_2, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, v_{2n+1}) \\
 & \quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \varphi(v_1, v_2, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, [v_{2k-1}, v_{2k}, v_j]_T, \dots, v_{2n+1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}), Tv_{2n}, Tv_{2n+1}] - TD(\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}), Tv_{2n})v_{2n+1} \\
 &\quad + T\theta(\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}), Tv_{2n+1})v_{2n} - T\mathcal{H}(\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}), Tv_{2n}, Tv_{2n+1}) \\
 &\quad - [\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}, v_{2n}), Tv_{2n-1}, Tv_{2n+1}] + TD(\varphi(v_1, \dots, v_{2n-2}, v_{2n}), Tv_{2n-1})v_{2n+1} \\
 &\quad - T\theta(\varphi(v_1, \dots, v_{2n-2}, v_{2n}), Tv_{2n+1})v_{2n-1} + T\mathcal{H}(\varphi(v_1, \dots, v_{2n-2}, v_{2n}), Tv_{2n-1}, Tv_{2n+1}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \left( [Tv_{2k-1}, Tv_{2k}, \varphi(v_1, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, v_{2n+1})] \right. \\
 &\quad \quad - T\theta(Tv_{2k}, \varphi(v_1, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, v_{2n+1}))v_{2k-1} + T\theta(Tv_{2k-1}, \varphi(v_1, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, v_{2n+1}))v_{2k} \\
 &\quad \quad \left. - T\mathcal{H}(Tv_{2k-1}, Tv_{2k}, \varphi(v_1, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, v_{2n+1})) \right) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \left( \varphi(v_1, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, \theta(Tv_{2k}, Tv_j)v_{2k-1} - \theta(Tv_{2k-1}, Tv_j)v_{2k}, \dots, v_{2n+1}) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \varphi(v_1, v_2, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, D(Tv_{2k-1}, Tv_{2k})v_j + \mathcal{H}(Tv_{2k-1}, Tv_{2k}, Tv_j), \dots, v_{2n+1}) \right).
 \end{aligned}$$

Avec cet opérateur, les cochaines de Yamaguti forment un complexe

$$\mathfrak{C}^1(M, L) \xrightarrow{\delta_T^1} \mathfrak{C}^3(M, L) \xrightarrow{\delta_T^3} \mathfrak{C}^5(M, L) \longrightarrow \dots,$$

tel que  $\delta_T^{2n+1} \circ \delta_T^{2n-1} = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . En particulier, une cochaîne  $\varphi \in \mathfrak{C}^1(M, L)$  est un cocycle si :

$$\begin{aligned}
 &T\mathcal{H}(\varphi(v_1), Tv_2, Tv_3) \\
 &= [\varphi(v_1), Tv_2, Tv_3] + [Tv_1, \varphi(v_2), Tv_3] + [Tv_1, Tv_2, \varphi(v_3)] + T\theta(\varphi(v_1), Tv_3)v_2 \\
 &\quad - TD(\varphi(v_1), Tv_2)v_3 + TD(\varphi(v_2), Tv_1)v_3 - T\theta(\varphi(v_2), Tv_3)v_1 + T\mathcal{H}(\varphi(v_2), Tv_1, Tv_3) \\
 &\quad - TD(\varphi(v_1), Tv_2)v_3 - T\theta(Tv_2, \varphi(v_3))v_1 + T\theta(Tv_1, \varphi(v_3))v_2 - T\mathcal{H}(Tv_1, Tv_2, \varphi(v_3)) \\
 &\quad - \varphi(\theta(Tv_2, Tv_3)v_1) - \varphi(\theta(Tv_1, Tv_3)v_2) + \varphi(D(Tv_1, Tv_2)v_3) + \varphi(\mathcal{H}(Tv_1, Tv_2, Tv_3)). \tag{5.2.20}
 \end{aligned}$$

Pour tout  $\chi = (x_1, x_2) \in L \otimes L$ , on définit  $\partial_T(\chi) : M \rightarrow L$  par :

$$\partial_T(\chi)u = T\left(D(\chi)u + \mathcal{H}(\chi, Tu)\right) - [\chi, Tu] \quad \forall u \in M. \tag{5.2.21}$$

**Proposition 5.2.6.** Soit  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Alors  $\partial_T(\chi)$  est un cocycle du système triple de Lie  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$  à coefficients dans  $(L, \theta_T)$ .

**Preuve 5.2.4.** Pour tout  $u_1, u_2, u_3 \in M$ , on a :

$$\begin{aligned}
 &\delta_T^1 \circ \partial_T(\chi)(u_1, u_2, u_3) \\
 &= [TD(\chi)u_1, Tu_2, Tu_3] + [Tu_1, TD(\chi)u_2, Tu_3] + [Tu_1, Tu_2, TD(\chi)u_3] + [T\mathcal{H}(\chi, Tu_1), Tu_2, Tu_3] \\
 &\quad + [Tu_1, T\mathcal{H}(\chi, Tu_2), Tu_3] + [Tu_1, Tu_2, T\mathcal{H}(\chi, Tu_3)] - [[\chi, Tu_1], Tu_2, Tu_3] \\
 &\quad - [Tu_1, [\chi, Tu_2], Tu_3] - [Tu_1, Tu_2, [\chi, Tu_3]] + [\chi, [Tu_1, Tu_2, Tu_3]] \\
 &\quad - T\left(D(TD(\chi)u_1, Tu_2)u_3 + D(T\mathcal{H}(\chi)u_1, Tu_2)u_3 - D([\chi, Tu_1], Tu_2)u_3 \right. \\
 &\quad \quad \left. - \theta(TD(\chi)u_1, Tu_3)u_2 - \theta(T\mathcal{H}(\chi)u_1, Tu_3)u_2 + \theta([\chi, Tu_1], Tu_3)u_2 \right. \\
 &\quad \quad \left. + \mathcal{H}(TD(\chi)u_1, Tu_2, Tu_3) + \mathcal{H}(T\mathcal{H}(\chi, Tu_1), Tu_2, Tu_3) - \mathcal{H}([\chi, Tu_1], Tu_2, Tu_3) \right. \\
 &\quad \quad \left. - D(TD(\chi)u_2, Tu_1)u_3 - D(T\mathcal{H}(\chi, Tu_2), Tu_1)u_3 + D([\chi, Tu_2], Tu_1)u_3 \right. \\
 &\quad \quad \left. + \theta(TD(\chi)u_2, Tu_3)u_1 + \theta(T\mathcal{H}(\chi, Tu_2), Tu_3)u_1 - \theta([\chi, Tu_2], Tu_3)u_1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathcal{H}(Tu_1, TD(\chi)u_2, Tu_3) - \mathcal{H}(Tu_1, T\mathcal{H}(\chi, Tu_2), Tu_1) + \mathcal{H}(Tu_1, [\chi, Tu_2], Tu_3) \\
 & + \theta(Tu_2, TD(\chi)u_3)u_1 + \theta(Tu_2, T\mathcal{H}(\chi, Tu_3))u_1 - \theta(Tu_2, [\chi, Tu_3])u_1 \\
 & - \theta(Tu_1, TD(\chi)u_3)u_2 - \theta(Tu_1, T\mathcal{H}(\chi, Tu_3))u_2 + \theta(Tu_1, [\chi, Tu_3])u_2 \\
 & + \mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, TD(\chi)u_3) + \mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, T\mathcal{H}(\chi, Tu_3)) - \mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, [\chi, Tu_3]) \\
 & - TD(\chi)(\theta(Tu_2, Tu_3)u_1 - \theta(Tu_1, Tu_3)u_2 + D(Tu_1, Tu_2)u_3 + \mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, Tu_3)) \\
 & - \mathcal{H}(\chi, [Tu_1, Tu_2, Tu_3]) + [\chi, [Tu_1, Tu_2, Tu_3]] \\
 & \stackrel{(1.2.2)(5.1.8)}{=} T \left( \theta(Tu_2, Tu_3)D(\chi)u_1 - \theta(Tu_1, Tu_3)D(\chi)u_2 + D(Tu_1, Tu_2)D(\chi)u_3 \right. \\
 & \quad - \theta(Tu_1, Tu_3)\mathcal{H}(\chi, Tu_2) + D(Tu_1, Tu_2)\mathcal{H}(\chi, Tu_3) + D([\chi, Tu_1], Tu_2)u_3 - \theta([\chi, Tu_1], Tu_3)u_2 \\
 & \quad + \mathcal{H}([\chi, Tu_1], Tu_2, Tu_3) - D([\chi, Tu_2], Tu_1)u_3 + \theta([\chi, Tu_2], Tu_2)u_1 + \mathcal{H}(Tu_1, [\chi, Tu_2], Tu_3) \\
 & \quad + \theta(Tu_2, [\chi, Tu_3])u_1 - \theta(Tu_1, [\chi, Tu_3])u_2 + \mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, [\chi, Tu_3]) - \mathcal{H}(\chi, [Tu_1, Tu_2, Tu_3]) \\
 & \quad \left. - D(\chi)\theta(Tu_2, Tu_3)u_1 + D(\chi)\theta(Tu_1, Tu_3)u_2 - D(\chi)D(Tu_1, Tu_2)u_3 - D(\chi)\mathcal{H}(Tu_1, Tu_2, Tu_3) \right) \\
 & \stackrel{(1.2.11)}{=} T \left( (\theta(Tu_2, Tu_3)D(\chi) + \theta(Tu_2, [\chi, Tu_3]) + \theta([\chi, Tu_2], Tu_2) - D(\chi)\theta(Tu_2, Tu_3))u_1 \right. \\
 & \quad - (\theta(Tu_1, Tu_3)D(\chi) - \theta([\chi, Tu_1], Tu_3) - \theta(Tu_1, [\chi, Tu_3]) + D(\chi)\theta(Tu_1, Tu_3))u_2 \\
 & \quad \left. + (D(Tu_1, Tu_2)D(\chi) + D([\chi, Tu_1], Tu_2) - D([\chi, Tu_2], Tu_1) - D(\chi)D(Tu_1, Tu_2))u_3 \right) \\
 & \stackrel{(1.2.4)(1.2.5)}{=} 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\partial_T(\chi)$  est un cocycle.

On désigne l'espace des  $(2n - 1)$ -cochaines par :

$$\mathcal{C}_T^{2n-1}(M, L) = \begin{cases} L \otimes L & \text{si } n = 0, \\ \mathcal{C}^{2n-1}(M, L) & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (5.2.22)$$

Aussi l'opérateur cobord  $\Lambda_T : \mathcal{C}_T^{2n-1}(M, L) \rightarrow \mathcal{C}_T^{2n+1}(M, L)$  par :

$$\Lambda_T = \begin{cases} \partial_T & \text{si } n = 0, \\ \delta_T & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (5.2.23)$$

Maintenant, on précise les groupes de la cohomologie des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep.

**Définition 5.2.3.** Soit  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . On note l'espace des cocycles par  $\mathcal{Z}^*(M, L)$ , l'espace des cobords par  $\mathcal{B}^*(M, L)$  et les groupes de cohomologie par :

$$\mathbf{H}_T^*(M, L) = \mathcal{Z}^*(M, L) / \mathcal{B}^*(M, L).$$

Ce sont les groupes de cohomologie correspondent à l'opérateur de Reynolds généralisé.

On va prouver, en utilisant un élément de Maurer-Cartan  $T$  de la  $L_\infty$ -algèbre  $(C^*(M, L), l_3, l_4)$ , que l'opérateur cobord  $\Lambda_T$  coïncide avec la différentielle  $d_T$  définie par l'Eq.(5.2.18).

**Théorème 5.2.3.** Soit  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Alors

$$d_T(f) = (-1)^{n-1} \Lambda_T(f) \quad \forall f \in \text{Hom}(\underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{2n-1}, L), \quad n \geq 1. \quad (5.2.24)$$

**Preuve 5.2.5.** Dans [24], les auteurs ont montré que :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}l_3(T, T, f)(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}) \\
 &= [[[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, f]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}) \\
 &= (-1)^{n-1} [[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.} \left( f(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, u_n), v_n, u_{n+1} \right) \\
 &\quad + (-1)^{n-1} [[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.} \left( u_n, f(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, v_n), u_{n+1} \right) \\
 &\quad + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} (-1)^{i-1} [[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.} \left( \mathfrak{u}_i, f(\mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}) \right) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_k, [[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_i, u_{k+1}), v_{k+1}, \mathfrak{u}_{k+2}, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1} \right) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_k, u_{k+1}, [[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_i, v_{k+1}), \mathfrak{u}_{k+2}, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1} \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_n, [[\pi + \theta, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_i, u_{n+1}) \right) \\
 &= (-1)^{n-1} \delta_T^{2n-1}(f).
 \end{aligned}$$

En rajoutant un argument, on montre que  $d_T(f) = \frac{1}{2}l_3(T, T, f) + \frac{1}{6}l_4(T, T, T, f) = (-1)^{n-1} \partial_T(f)$ . En effet;

$$\begin{aligned}
 & l_4(T, T, T, f)(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}) \\
 &= [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, f]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}) \\
 &= [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.} \left( f(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, u_n), v_n, u_{n+1} \right) \\
 &\quad + [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.} \left( u_n, f(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, v_n), u_{n+1} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} (-1)^{i-1} [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.} \left( \mathfrak{u}_i, f(\mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}) \right) \\
 &\quad - (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \\
 &\quad f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_k, [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_i, u_{k+1}), v_{k+1}, \mathfrak{u}_{k+2}, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1} \right) \\
 &\quad - (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \\
 &\quad f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_k, u_{k+1}, [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_i, v_{k+1}), \mathfrak{u}_{k+2}, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1} \right) \\
 &\quad - (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_i, \dots, \mathfrak{u}_n, [\mathcal{H}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}, T]_{L.t.s.}(\mathfrak{u}_i, u_{n+1}) \right) \\
 &= (-1)^{n-1} 6 \left\{ (-1)^{n+1} \left( -T\mathcal{H}(f(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, u_n), Tv_n, Tu_{n+1}) - T\mathcal{H}(f(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}, v_n), Tu_{n+1}, Tu_n)) \right) \right. \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} T\mathcal{H}(f(\mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_j, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1}), Tu_j, T_j) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n (-1)^j f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_j, \dots, \mathfrak{u}_n, \mathcal{H}(Tu_j, Tv_j, Tu_{n+1}) \right) \\
 &\quad + \sum_{1 \leq j < k \leq n} (-1)^j \\
 &\quad \left. f \left( \mathfrak{u}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{u}}_j, \dots, \mathfrak{u}_{k-1}, \mathcal{H}(Tu_j, Tv_j, Tu_k), v_k + u_k, \mathcal{H}(Tu_j, Tv_j, Tv_k), \mathfrak{u}_{k+1}, \dots, \mathfrak{u}_n, u_{n+1} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

La preuve est terminée.

**Proposition 5.2.7.** Soit  $(\phi, \psi)$  un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T'$  sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Alors :

- l'application  $\psi$  est un morphisme de systèmes triples de Lie.
- Le diagramme suivant commute pour tout  $u, v \in M$  :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & L \\ \theta_T(u,v) \downarrow & & \downarrow \theta_{T'}(\psi(u), \psi(v)) \\ L & \xrightarrow{\phi} & L \end{array}$$

où  $(L, \theta_T)$  et  $(L, \theta_{T'})$  sont les représentations induites des systèmes triples de Lie.

En se basant sur la proposition 5.1.2, on montre la pertinence de la théorie de cohomologie. Soit  $(\phi, \psi)$  un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T'$ , tel que  $\psi$  soit bijective. On note par  $C_T^{2n-1}(M, L)$  l'espace des  $(2n - 1)$ -cochaines de système triple de Lie  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$  à coefficients dans la représentation  $(L, \theta_T)$ . On définit :

$$\begin{cases} \Theta : L \otimes L \rightarrow L \otimes L & \text{si } n = 0, \\ \Theta : C_T^{2n-1}(M, L) \rightarrow C_{T'}^{2n-1}(M, L) & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

par :

$$\begin{cases} \Theta(\chi) = \phi(\chi) = (\phi(x_1), \phi(x_2)) & \forall \chi = (x_1, x_2) \in L \otimes L & \text{si } n = 0, \\ \Theta(\varphi)(u_1, \dots, u_{2n-1}) = \phi(\varphi(\psi^{-1}(u_1), \dots, \psi^{-1}(u_{2n-1}))) & \forall u_i \in M & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

**Théorème 5.2.4.** Avec les notations ci-dessus,  $\Theta$  est une cochaîne des complexes  $(C_T^*(M, L), \Lambda_T)$  et  $(C_{T'}^*(M, L), \Lambda_{T'})$ . Par conséquent, elle induit un morphisme  $\bar{\Theta}$  des groupes de cohomologie  $\mathbf{H}_T^*(M, L)$  et  $\mathbf{H}_{T'}^*(M, L)$ .

**Preuve 5.2.6.** Pour  $n = 0$ . Soient  $\chi \in L \otimes L$  et  $(\phi, \psi)$  un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T'$ . En appliquant les Eqs.(5.1.9), (5.1.10), et (5.1.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \Theta \circ \partial_T(\chi)u &= \Phi(\partial_T(\chi)(\psi^{-1}(u))) \\ &= \phi \circ T(D(\chi)(\psi^{-1}(u)) + \mathcal{H}(\chi, T(\psi^{-1}(u)))) - \phi[\chi, T(\psi^{-1}(u))] \\ &= T' \circ \psi(D(\chi)(\psi^{-1}(u)) + \mathcal{H}(\chi, T(\psi^{-1}(u)))) - [\phi(\chi), \phi \circ T(\psi^{-1}(u))] \\ &= T'(D(\phi(\chi))\psi(\psi^{-1}(u)) + \mathcal{H}(\phi(\chi), \phi \circ T(\psi^{-1}(u)))) - [\phi(\chi), T' \circ \psi(\psi^{-1}(u))] \\ &= T'(D(\phi(\chi))u + \mathcal{H}(\phi(\chi), T'u)) - [\phi(\chi), T'u] \\ &= T'(D(\Theta(\chi))u + \mathcal{H}(\Theta(\chi), T'u)) - [\Theta(\chi), T'u] \\ &= \partial_{T'}(\Theta(\chi))u. \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 1$ . Soit  $\varphi \in C_T^{2n-1}(M, L)$ . On a :

$$\begin{aligned} &\delta_T' \Theta(\varphi)(v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}) \\ &= \theta_T'(v_{2n}, v_{2n+1})\Theta(\varphi)(v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}) - \theta_T'(v_{2n-1}, v_{2n+1})\Theta(\varphi)(v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}, v_{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} D'_T(v_{2k-1}, v_{2k}) \Theta(\varphi)(v_1, v_2, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, v_{2n+1}) \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \Theta(\varphi)(v_1, v_2, \dots, \widehat{v}_{2k-1}, \widehat{v}_{2k}, \dots, [v_{2k-1}, v_{2k}, v_j]'_T, \dots, v_{2n+1}) \\
 & = \theta'_T(v_{2n}, v_{2n+1}) \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n-1}))) - \theta'_T(v_{2n-1}, v_{2n+1}) \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n}))) \\
 & + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} D'_T(v_{2k-1}, v_{2k}) \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(\widehat{v}_{2k-1}), \psi^{-1}(\widehat{v}_{2k}), \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, [\psi^{-1}(v_{2k-1}), \psi^{-1}(v_{2k}), \psi^{-1}(v_j)]'_T, \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & = \theta'_T(\psi \circ \psi^{-1}(v_{2n}), \psi \circ \psi^{-1}(v_{2n+1})) \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n-1}))) \\
 & - \theta'_T(\psi \circ \psi^{-1}(v_{2n-1}), \psi \circ \psi^{-1}(v_{2n+1})) \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n}))) \\
 & + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} D'_T(\psi \circ \psi^{-1}(v_{2k-1}), \psi \circ \psi^{-1}(v_{2k})) \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \phi(\varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, [\psi^{-1}(v_{2k-1}), \psi^{-1}(v_{2k}), \psi^{-1}(v_j)]_T, \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & = \phi(\theta_T(\psi^{-1}(v_{2n}), \psi^{-1}(v_{2n+1})) \varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n-1}))) \\
 & - \theta_T(\psi^{-1}(v_{2n-1}), \Psi^{-1}(v_{2n+1})) \varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n}))) \\
 & + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} D_T(\psi^{-1}(v_{2k-1}), \psi^{-1}(v_{2k})) \varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2k+1}^{2n+1} (-1)^{n+k+1} \varphi(\psi^{-1}(v_1), \dots, [\psi^{-1}(v_{2k-1}), \psi^{-1}(v_{2k}), \psi^{-1}(v_j)]_T, \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & = \phi(\delta_T \varphi(\psi^{-1}(v_1), \psi^{-1}(v_2), \dots, \psi^{-1}(v_{2n+1}))) \\
 & = \Theta(\delta_T \varphi)(v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}).
 \end{aligned}$$

La preuve est terminée.

### 5.3 Classes d'obstruction des opérateurs de Reynolds généralisés

Dans cette section, on exploite la théorie de la cohomologie de Yamaguti présentée dans la section précédente, afin de d'étudier les déformations formelles des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire L.t.sRep. En outre, on introduit une classe de cohomologie spéciale associée à une déformation d'ordre  $n$  et on montre qu'une déformation d'ordre  $n$  est extensible si et seulement si cette classe de cohomologie dans le troisième groupe de cohomologie est triviale. De ce fait, on appelle cette classe de cohomologie **la classe d'obstruction** d'une extension d'une déformation d'ordre  $n$ .

Soit  $\mathbb{K}[[\lambda]]$  l'anneau des séries formelles à une variable  $\lambda$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout espace vectoriel  $M$ , on note par  $M[[\lambda]]$  l'espace des séries formelles à coefficients dans  $M$ . Si de plus, on a une structure de système triple de Lie  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$  sur  $\mathbb{K}$ , alors on a une structure de système triple de Lie sur l'anneau  $\mathbb{K}[[\lambda]]$  dans  $L[[\lambda]]$  donnée par :

$$\left[ \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i x_i, \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j y_j, \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k z_k \right] = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i+j+k=s} \lambda^s [x_i, y_j, z_k] \quad \forall x_i, y_j, z_k \in L. \quad (5.3.1)$$

Pour toute représentation  $(M, \theta)$  de  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$ , il y a une représentation naturelle de système triple de Lie  $L[[\lambda]]$  sur le  $\mathbb{K}[[\lambda]]$ -module  $M[[\lambda]]$ , définie par :

$$\theta \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i x_i, \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j y_j \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k m_k \right) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{i+j+k=s} \lambda^s \theta(x_i, y_j) m_k \quad \forall x_i, y_j \in L, m_k \in M. \quad (5.3.2)$$

De même, un 3-cocycle  $\mathcal{H}$  peut être étendu à un 3-cocycle sur le système triple de Lie  $L[[\lambda]]$  à coefficients dans  $M[[\lambda]]$ , noté également  $\mathcal{H}$ . On considère une série formelle :

$$T_\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i T_i \quad T_i \in \mathcal{C}_T^1(M, L). \quad (5.3.3)$$

Il s'agit d'une cochaîne  $T_\lambda \in \mathcal{C}_T^1(M, L[[\lambda]])$ . On l'étend pour qu'elle soit une application de  $M[[\lambda]]$  sur  $L[[\lambda]]$ . On la note toujours par  $T_\lambda$ .

**Définition 5.3.1.** Si la série formelle  $T_\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i \lambda^i$ , où  $T_0 = T$ , satisfait l'équation suivante :

$$[T_\lambda u, T_\lambda v, T_\lambda w] = T_\lambda \left( D(T_\lambda u, T_\lambda v) w + \theta(T_\lambda v, T_\lambda w) u - \theta(T_\lambda u, T_\lambda w) v + \mathcal{H}(T_\lambda u, T_\lambda v, T_\lambda w) \right),$$

on dit qu'il s'agit d'une **déformation formelle** d'opérateur de Reynolds généralisé  $T$ .

**Remarque 5.3.1.** Si  $T_\lambda = T + \lambda T_1$  est un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ , on dit que  $T_1$  engendre une **déformation infinitésimale** de  $T$ .

En s'appuyant sur la relation entre l'opérateur de Reynolds généralisé et la structure d'un système triple de Lie, on obtient le résultat suivant :

**Proposition 5.3.1.** Soit  $T_\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i T_i$  une déformation formelle d'un opérateur de Reynolds généralisé  $T$  sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Alors le crochet  $[\cdot, \cdot, \cdot]_{T_\lambda}$  défini, pour tout  $u, v, w \in M$ , par :

$$[u, v, w]_{T_\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \lambda^k \left( D(T_i u, T_j v) w + \theta(T_i v, T_j w) u - \theta(T_i u, T_j w) v + \sum_{i+j+s=k} \mathcal{H}(T_i u, T_j v, T_s w) \right),$$

est une déformation formelle du système triple de Lie  $(M, [\cdot, \cdot, \cdot]_T)$  donné dans le Corollaire 5.1.1.

**Définition 5.3.2.** Soient  $T_\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i T_i$  et  $T'_\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i T'_i$  deux déformations formelles d'un opérateur de Reynolds généralisé  $T$  sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . On dit qu'elles sont **équivalentes** s'il existe un élément  $\chi \in L \wedge L$ ,  $\phi_i \in gl(L)$  et  $\psi_i \in gl(M)$  ( $i \geq 2$ ) tel que le couple :

$$\left( \phi_\lambda = Id_L + \lambda[\chi, -] + \sum_{i=2}^{+\infty} \lambda^i \phi_i, \quad \psi_\lambda = Id_V + \lambda D(\chi)(-) + \lambda \mathcal{H}(\chi, -) + \sum_{i=2}^{+\infty} \lambda^i \psi_i \right), \quad (5.3.4)$$

soit un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés  $T_\lambda$  et  $T'_\lambda$ . En particulier, une déformation  $T_\lambda$  est dite **triviale** s'il existe un élément  $\chi \in L \wedge L$ ,  $\phi_i \in gl(L)$  et  $\psi_i \in gl(M)$  ( $i \geq 2$ ) tel que le morphisme  $(\phi_\lambda, \psi_\lambda)$  défini par l'Eq.(5.3.4) donne une équivalence entre  $T_\lambda$  et  $T$ . Ce dernier étant considéré comme une déformation de lui-même.

**Théorème 5.3.1.** Si deux déformations formelles d'un opérateur de Reynolds généralisé  $T$  sont équivalentes, alors leurs infinitésimaux appartiennent à la même classe de cohomologie  $\mathbf{H}_T^1(M, L)$ .

**Définition 5.3.3.** Soit  $T$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . Si  $T_\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda^i T_i$  définit un  $\mathbb{K}[[\lambda]]/(\lambda^{n+1})$ -module de  $M[[\lambda]]/(\lambda^{n+1})$  sur le système triple de Lie  $L[[\lambda]]/(\lambda^{n+1})$  satisfaisant :

$$[T_\lambda u, T_\lambda v, T_\lambda w] = T_\lambda \left( D(T_\lambda u, T_\lambda v)w + \theta(T_\lambda v, T_\lambda w)u - \theta(T_\lambda u, T_\lambda w)v + \mathcal{H}(T_\lambda u, T_\lambda v, T_\lambda w) \right),$$

on dit que  $T_\lambda$  est une **déformation d'ordre  $n$**  de l'opérateur de Reynolds généralisé  $T$ .

**Définition 5.3.4.** Soit  $T_\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda^i T_i$  une déformation d'ordre  $n$  d'un opérateur de Reynolds généralisé  $T$  sur une paire L.t.sRep  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ . S'il existe une cochaîne  $T_{n+1} \in \mathcal{C}_T^1(M, L)$  tel que  $\tilde{T}_\lambda = T_\lambda + \lambda^{n+1} T_{n+1}$  soit une déformation d'ordre  $(n+1)$  de  $T$ , alors on dit que  $T_\lambda$  est **extensible**.

**Théorème 5.3.2.** Soit  $T_\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda^i T_i$  une déformation d'ordre  $n$  de  $T$ . Alors  $T_\lambda$  est extensible si et seulement si la classe de cohomologie  $[Obs^T] \in \mathbf{H}_T^3(M, L)$  est triviale, où  $Obs^T$  est une 3-cochaîne dans  $\mathcal{C}_T^3(M, L)$  définie par :

$$\begin{aligned} & Obs^T(u, v, w) \tag{5.3.5} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n+1 \\ i+j+k > n+1}} [T_i u, T_j v, T_k w] - T_i \left( D(T_j u, T_k v)w + \theta(T_j v, T_k w)u - \theta(T_j u, T_k w)v + \mathcal{H}(T_i u, T_j v, T_k w) \right). \end{aligned}$$

**Preuve 5.3.1.** Soit  $\tilde{T}_\lambda = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda^i T_i$  une extension de  $T_\lambda$ , alors pour tout  $u, v, w \in M$  on a :

$$[\tilde{T}_\lambda u, \tilde{T}_\lambda v, \tilde{T}_\lambda w] = \tilde{T}_\lambda \left( D(\tilde{T}_\lambda u, \tilde{T}_\lambda v)w + \theta(\tilde{T}_\lambda v, \tilde{T}_\lambda w)u - \theta(\tilde{T}_\lambda u, \tilde{T}_\lambda w)v + \mathcal{H}(\tilde{T}_\lambda u, \tilde{T}_\lambda v, \tilde{T}_\lambda w) \right).$$

En développant l'équation et en comparant les coefficients de  $\lambda^n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & [T_{n+1}u, T_\lambda v, T_\lambda w] + [T_\lambda u, T_{n+1}v, T_\lambda w] + [T_\lambda u, T_\lambda v, T_{n+1}w] - T(D(T_{n+1}u, T_\lambda v)w - \theta(T_{n+1}u, T_\lambda w)v \\ & + \mathcal{H}(T_{n+1}u, T_\lambda v, T_\lambda w) + D(T_\lambda u, T_{n+1}v)w + \theta(T_{n+1}v, T_\lambda w)u - \theta(T_\lambda u, T_{n+1}v)w + \mathcal{H}(T_\lambda u, T_{n+1}v, T_\lambda w) \\ & + \theta(T_\lambda v, T_{n+1}w)u - \theta(T_\lambda u, T_{n+1}w)v + \mathcal{H}(T_\lambda u, T_\lambda v, T_{n+1}w)) \\ & + \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n+1 \\ i+j+k > n+1}} [T_i u, T_j v, T_k w] - T_i \left( D(T_j u, T_k v)w + \theta(T_j v, T_k w)u - \theta(T_j u, T_k w)v + \mathcal{H}(T_i u, T_j v, T_k w) \right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$Obs^T = -\delta_T^1 T_{n+1}. \tag{5.3.6}$$

Ainsi, la classe de cohomologie  $[Obs^T]$  est triviale. Inversement, On suppose que la classe de cohomologie  $Obs^T$  est triviale, donc il existe une cochaîne  $T_{n+1} \in \mathcal{C}_T^1(M, L)$  tel que  $Obs^T = \delta_T^1(T_{n+1})$ . Soit  $\tilde{T}_\lambda = T_\lambda + \lambda^{n+1} T_{n+1}$ , alors  $\tilde{T}_\lambda$  satisfait :

$$\sum_{i+j+k=s=0}^{n+1} [T_i u, T_j v, T_k w] - T_i \left( D(T_j u, T_k v)w + \theta(T_j v, T_k w)u - \theta(T_j u, T_k w)v + \mathcal{H}(T_i u, T_j v, T_k w) \right).$$

Ce qui implique que  $\tilde{T}_\lambda$  est une déformation d'ordre  $(n+1)$  de  $T$ . D'où elle est une extension de  $T_\lambda$ .

**Définition 5.3.5.** Soit  $T_\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda^i T_i$  une déformation d'ordre  $n$  d'un opérateur de Reynolds généralisée  $T$ . La classe de cohomologie  $[Obs^T] \in \mathbf{H}_T^3(M, L)$  définie dans le Théorème 5.3.2 s'appelle **la classe d'obstruction** d'une extension de  $T_\lambda$ .

**Corollaire 5.3.1.** Si  $\mathbf{H}_T^3(M, L) = 0$ , alors tout 1-cocycle est l'infinitésimal d'une déformation formelle de  $T$ .

## Structures de Nijenhuis des algèbres 3-Hom-Lie colorées et des systèmes triples de Lie

On présente dans ce chapitre une nouvelle structure algébrique, appelée structure de Nijenhuis, qui généralise les algèbres 3-Hom-Lie colorées ainsi que les systèmes triples de Lie. Cette structure admet un lien avec les opérateurs de Nijenhuis et avec les opérateurs de Reynolds généralisés. En outre, on établit une relation entre la structure de Nijenhuis des systèmes triples de Lie et celle des algèbres de Lie.

### 6.1 Les algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées

Dans cette section, on introduit la notion de structure de Nijenhuis d'une algèbre 3-Hom-Lie colorée, où simplement dit une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée. On montre que cette dernière donne lieu à une algèbre 3-Hom-Lie colorée et une représentation sur elle-même. De même, on établit un lien entre les opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire 3-Hom-LieRep colorée et les algèbres 3-NS-Hom-Lie colorées. Donc, les algèbres 3-NS-Hom-Lie colorées peuvent être considérées comme des structures algébriques sous-jacentes des opérateurs de Reynolds généralisés.

**Définition 6.1.1.** Une *algèbre 3-Hom-pre-Lie colorée* est un quadruplet  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, \varepsilon, \alpha)$  constitué d'un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué  $\mathfrak{g}$ , d'une accolade trilinéaire de degré zéro:  $\{\cdot, \cdot, \cdot\} : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  et d'une application linéaire de degré zéro  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfaisant, pour tout élément homogène  $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ), les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \{\alpha(x_1), \alpha(x_1), \{y_1, y_2, y_3\}\} &= \{[x_1, x_2, y_1]^c, \alpha(y_2), \alpha(y_3)\} + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1) \{\alpha(y_1), [x_1, x_2, y_2]^c, \alpha(y_3)\} \\ &\quad + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{x_1, x_2, y_3\}\}, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned} \{[x_1, x_2, x_3]^c, \alpha(y_1), \alpha(y_2)\} &= \{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{x_3, y_1, y_2\}\} - \varepsilon(x_2, x_3) \{\alpha(x_1), \alpha(x_3), \{x_2, y_1, y_2\}\} \\ &\quad + \varepsilon(x_1, x_2 + x_3) \{\alpha(x_2), \alpha(x_3), \{x_1, y_1, y_2\}\}, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

où  $[\cdot, \cdot, \cdot]^c$  est défini par :

$$\varepsilon(x_3, x_1) [x_1, x_2, x_3]^c = \cup_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(x_3, x_1) \{x_1, x_2, x_3\}. \quad (6.1.3)$$

**Définition 6.1.2.** Soient  $\mathfrak{g}$  un espace vectoriel  $\Gamma$ -gradué muni d'une accolade de degré zéro, d'un crochet  $\varepsilon$ -antisymétrique aussi de degré zéro  $\{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_* : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , et d'une application linéaire de degré zéro  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Alors le quintuplet  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \alpha)$  est une **algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée**, s'il vérifie les propriétés suivantes pour tout élément homogène  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2, y_3$  de  $\mathfrak{g}$  :

$$\{x_1, x_2, x_3\} = -\varepsilon(x_1, x_2)\{x_2, x_1, x_3\}, \tag{6.1.4}$$

$$\begin{aligned} \{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_1, y_2, y_3\}\} &= \{[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_2), \alpha(y_3)\} + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\{\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3)\} \\ &+ \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{x_1, x_2, y_3\}\}, \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

$$\varepsilon(x_3, x_1)\{\{[[x_1, x_2, x_3]], \alpha(y_1), \alpha(y_2)\}\} = \cup_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(x_3, x_1)\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{x_3, y_1, y_2\}\}, \tag{6.1.6}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(y_3, y_1)[\alpha(x_1), \alpha(x_2), [[y_1, y_2, y_3]]_*] &= \cup_{y_1, y_2, y_3} \varepsilon(y_3, y_1)\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)[\alpha(y_1), \alpha(y_2), [[x_1, x_2, y_3]]_*] \\ &+ \cup_{y_1, y_2, y_3} \varepsilon(y_3, y_1)\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), [x_1, x_2, y_3]_*\} \\ &- \varepsilon(y_3, y_1)\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), [y_1, y_2, y_3]_*\}, \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

où le double crochet  $[[\cdot, \cdot, \cdot]]$  est défini par :

$$\varepsilon(x_3, x_1)[[x_1, x_2, x_3]] = \cup_{x_1, x_2, x_3} \varepsilon(x_3, x_1)\{x_1, x_2, x_3\} + \varepsilon(x_3, x_1)[x_1, x_2, x_3]_*.$$

**Remarque 6.1.1.** On obtient la notion d'une algèbre 3-pre-Lie colorée et d'une algèbre 3-NS-Lie colorée si dans les définitions précédentes l'application  $\alpha = Id$ .

**Remarque 6.1.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \alpha)$  une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée. D'une part, si  $\{\cdot, \cdot, \cdot\} = 0$ , on remarque que  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre 3-Hom-Lie colorée. D'autre part, si  $[\cdot, \cdot, \cdot]_* = 0$ , on note que  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre 3-Hom-pre-Lie colorée. Par conséquent, on dit qu'une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée est une généralisation des algèbres 3-Hom-Lie colorées et 3-Hom-pre-Lie colorées.

**Exemple 6.1.1.** Soit  $\mathcal{N} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Nijenhuis sur une algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$ . Alors

$$\begin{aligned} \{x, y, z\} &= [\mathcal{N}x, \mathcal{N}y, z], \\ [x, y, z]_* &= -\mathcal{N}\left([\mathcal{N}x, y, z] + [x, \mathcal{N}y, z] + [x, y, \mathcal{N}z] - \mathcal{N}[x, y, z]\right) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

définissent une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée.

**Exemple 6.1.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \mathcal{R})$  une algèbre de Reynolds 3-Hom-Lie colorée. Alors

$$\{x, y, z\} = [\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] \quad \text{et} \quad [x, y, z]_* = -[\mathcal{R}x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g},$$

forment une structure d'algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée sur  $\mathfrak{g}$ .

**Théorème 6.1.1.** Soit  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \alpha)$  une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée. Alors  $(\mathfrak{g}, [[\cdot, \cdot, \cdot]], \varepsilon, \alpha)$  est une algèbre 3-Hom-Lie colorée. En outre,  $(\mathfrak{g}, \varrho, \alpha)$  est une représentation de  $(\mathfrak{g}, [[\cdot, \cdot, \cdot]], \varepsilon, \alpha)$ , où  $\varrho : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  est une application bilinéaire de degré zéro définie par :

$$\varrho(x, y)z = \{x, y, z\} \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{6.1.8}$$

**Preuve 6.1.1.** Soient  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \mathfrak{g}$ , on a :

$$[[\alpha(x_1), \alpha(x_2), [[y_1, y_2, y_3]]]] - [[[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_2), \alpha(y_3)]] - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)[[\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3)]]$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)[[\alpha(y_1), \alpha(y_2), [[x_1, x_2, y_3]]]] \\
 \stackrel{(6.1.7)}{=} & \underline{[\alpha(x_1), \alpha(x_2), [[y_1, y_2, y_3]]_*} + \underline{\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), [y_1, y_2, y_3]_*\}} + \{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_1, y_2, y_3\}\}} \\
 & -\varepsilon(y_2, y_3)\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_1, y_3, y_2\}\} + \varepsilon(y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_2, y_3, y_1\}\} \\
 & + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\{[[y_1, y_2, y_3]], \alpha(x_1), \alpha(x_2)\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3) \\
 & \varepsilon(x_1, x_2)\{[[y_1, y_2, y_3]], \alpha(x_2), \alpha(x_1)\} - \underline{[[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_2), \alpha(y_3)]_*} - \{[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_2), \alpha(y_3)\} \\
 & + \varepsilon(y_2, y_3)\{[[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_3), \alpha(y_2)] - \underline{\varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(y_2), \alpha(y_3), [x_1, x_2, y_1]_*\}} \\
 & - \varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(y_2), \alpha(y_3), \{x_1, x_2, y_1\}\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3) \\
 & \{\alpha(y_2), \alpha(y_3), \{y_1, x_1, x_2\}\} + \varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3)\varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\{\alpha(y_2), \alpha(y_3), \{y_1, x_2, x_1\}\} \\
 & - \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1)[\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3)]_*} - \varepsilon((x_1 + x_2, y_1)\{\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3)\} \\
 & - \varepsilon(y_1, y_2 + y_3)\{[[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3), \alpha(y_1)\} + \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3)\{\alpha(y_1), \alpha(y_3), [x_1, x_2, y_2]_*\}} \\
 & + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3)\{\alpha(y_1), \alpha(y_3), \{x_1, x_2, y_2\}\} + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3) \\
 & \{\alpha(y_1), \alpha(y_3), \{y_2, x_1, x_2\}\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3)\varepsilon(x_1, x_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_3), \{y_2, x_2, x_1\}\} \\
 & - \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)[\alpha(y_1), \alpha(y_2), [[x_1, x_2, y_3]]_*} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), [x_1, x_2, y_3]_*\} \\
 & - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{x_1, x_2, y_3\}\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{y_3, x_1, x_2\}\} \\
 & + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(x_1, x_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{y_3, x_2, x_1\}\} + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\varepsilon(y_2, y_3) \\
 & \{\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_3]], \alpha(y_2)\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_2)\varepsilon(y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(y_2), [[x_1, x_2, y_3]], \alpha(y_1)\} \\
 \stackrel{(6.1.5), (6.1.6)}{=} & \underline{\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_1, y_2, y_3\}\}} - \varepsilon(y_2, y_3)\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_1, y_3, y_2\}\} + \varepsilon(y_1, y_2 + y_3) \\
 & \{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{y_2, y_3, y_1\}\} + \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\{[[y_1, y_2, y_3]], \alpha(x_1), \alpha(x_2)\}} \\
 & - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(x_1, x_2)\{[[y_1, y_2, y_3]], \alpha(x_2), \alpha(x_1)\} - \underline{\{[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_2), \alpha(y_3)\}} \\
 & + \varepsilon(y_2, y_3)\{[[[x_1, x_2, y_1]], \alpha(y_3), \alpha(y_2)] - \varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(y_2), \alpha(y_3), \{x_1, x_2, y_1\}\} \\
 & - \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(y_2), \alpha(y_3), \{y_1, x_1, x_2\}\}} + \varepsilon(x_1 + x_2 + y_1, y_2 + y_3) \\
 & \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\{\alpha(y_2), \alpha(y_3), \{y_1, x_2, x_1\}\} + \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\{\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3)\}} \\
 & - \varepsilon(y_1, y_2 + y_3)\{[[x_1, x_2, y_2]], \alpha(y_3), \alpha(y_1)\} + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3)\{\alpha(y_1), \alpha(y_3), \{x_1, x_2, y_2\}\} \\
 & + \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3)\{\alpha(y_1), \alpha(y_3), \{y_2, x_1, x_2\}\}} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(y_2, y_3) \\
 & \varepsilon(x_1, x_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_3), \{y_2, x_2, x_1\}\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), [x_1, x_2, y_3]_*\} \\
 & - \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{x_1, x_2, y_3\}\}} - \underline{\varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{y_3, x_1, x_2\}\}} \\
 & + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1 + y_2 + y_3)\varepsilon(x_1, x_2)\{\alpha(y_1), \alpha(y_2), \{y_3, x_2, x_1\}\} + \varepsilon(x_1 + x_2, y_1)\varepsilon(y_2, y_3) \\
 & \{\alpha(y_1), [[x_1, x_2, y_3]], \alpha(y_2)\} - \varepsilon(x_1 + x_2, y_2)\varepsilon(y_1, y_2 + y_3)\{\alpha(y_2), [[x_1, x_2, y_3]], \alpha(y_1)\} \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Ce qui signifie que  $[[\cdot, \cdot, \cdot]]$  définit une structure d'algèbre 3-Hom-Lie colorée sur  $\mathfrak{g}$ . De plus, les Eqs.(2.1.6)-(2.1.8) sont vérifiées. Donc le quintuplet  $(\mathfrak{g}, [[\cdot, \cdot, \cdot]], \varepsilon, \alpha, \rho)$  est une paire 3-HomLieRep pair colorée.

**Remarque 6.1.3.** L'algèbre 3-Hom-Lie colorée  $(\mathfrak{g}, [[\cdot, \cdot, \cdot]], \varepsilon, \alpha)$  définie dans le théorème précédent est dite algèbre 3-Hom-Lie colorée *sous-adjacente* et l'algèbre  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \alpha)$  est dite algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée *compatible*.

Le résultat suivant illustre que les algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées peuvent être considérées comme

des structures algébriques sous-jacentes des opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire 3-HomLieRep colorée.

**Théorème 6.1.2.** Soit  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire 3-Hom-LieRep colorée  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$ . On définit une accolade et un crochet comme suit :

$$\{u, v, w\} = \rho(Tu, Tv)w \quad \text{et} \quad [u, v, w]_* = H(Tu, Tv, Tw) \quad \forall u, v, w \in M. \quad (6.1.9)$$

Alors  $(M, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \mu)$  est une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée. On dit que c'est l'algèbre **induite**.

**Preuve 6.1.2.** Soient  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in M$ , on a :

$$\begin{aligned} & \{\mu(u_1), \mu(u_2), \{u_3, u_4, u_5\}\} \\ \stackrel{(6.1.9)}{=} & \rho(T \circ \mu(u_1), T \circ \mu(u_2))\rho(T(u_3), T(u_4))u_5 \\ = & \rho(\alpha \circ T(u_1), \alpha \circ T(u_2))\rho(T(u_3), T(u_4))u_5 \\ \stackrel{(2.1.7)}{=} & \rho([Tu_1, Tu_2, Tu_3], \alpha \circ T(u_4)) \circ \mu(u_5) + \varepsilon(u_1 + u_2, u_3)\rho(\alpha \circ T(u_3), [Tu_1, Tu_2, Tu_4]) \circ \mu(u_5) \\ & + \varepsilon(u_1 + u_2, u_3 + u_4)\rho(\alpha \circ T(u_3), \alpha \circ T(u_4))\rho(T(u_1), T(u_2))u_5 \\ = & \rho(T[[u_1, u_2, u_3]], T \circ \mu(u_4)) \circ \mu(u_5) + \varepsilon(u_1 + u_2, u_3)\rho(T \circ \mu(u_3), T[[u_1, u_2, u_4]]) \circ \mu(u_5) \\ & + \varepsilon(u_1 + u_2, u_3 + u_4)\rho(T \circ \mu(u_3), T \circ \mu(u_4))\rho(T(u_1), T(u_2))u_5 \\ = & \{[[u_1, u_2, u_3], \mu(u_4), \mu(u_5)] + \varepsilon(u_1 + u_2, u_3)\{\mu(u_3), [[u_1, u_2, u_4], \mu(u_5)]\} \\ & + \varepsilon(u_1 + u_2, u_3 + u_4)\{\mu(u_3), \mu(u_4), \{u_1, u_2, u_5\}\}. \end{aligned}$$

Ensuite, l'Eq.(6.1.5) est vérifiée. De manière analogue, on vérifie les équations (6.1.6) et (6.1.7). Par suite  $(M, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \mu)$  est une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée.

**Définition 6.1.3.** Soient  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \alpha)$  et  $(\mathfrak{g}', \{\cdot, \cdot, \cdot\}', [\cdot, \cdot, \cdot]'_*, \varepsilon, \alpha')$  deux algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées. Un **morphisme** d'algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées est une application linéaire de degré zéro  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  qui satisfait :

$$\psi \circ \alpha = \alpha' \circ \psi,$$

$$\psi\{x, y, z\} = \{\psi(x), \psi(y), \psi(z)\}' \quad (6.1.10)$$

$$\psi[x, y, z]_* = [\psi(x), \psi(y), \psi(z)]'_* \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \quad (6.1.11)$$

**Proposition 6.1.1.** Soit  $(\phi, \psi)$  un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés  $T$  et  $T'$  sur des paires 3-HomLieRep colorées  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  et  $(\mathfrak{g}', [\cdot, \cdot, \cdot]', \varepsilon, \alpha', \rho')$  respectivement. Alors  $\psi$  est un morphisme d'algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées induites  $(M, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \mu)$  et  $(M', \{\cdot, \cdot, \cdot\}', [\cdot, \cdot, \cdot]'_*, \varepsilon, \mu')$ .

**Preuve 6.1.3.** D'après l'Eq.(4.2.7), on a  $\psi \circ \mu = \mu' \circ \psi$ . De plus :

$$\begin{aligned} \psi\{u, v, w\} & \stackrel{(6.1.9)}{=} \psi \circ \rho(Tu, Tv)w \\ & \stackrel{(5.1.10)}{=} \rho'(\phi(Tu), \phi(Tv))\psi(w) \\ & \stackrel{(5.1.9)}{=} \rho'(T'(\psi(u)), T'(\psi(v)))\psi(w) \\ & = \{\psi(u), \psi(v), \psi(w)\}' \quad \forall u, v, w \in M. \end{aligned}$$

Ce qui implique que l'Eq.(6.1.10) est vérifiée. De la même manière, on vérifie l'équation (6.1.11). Alors  $\psi$  est un morphisme d'algèbres 3-Hom-NS-Lie colorées.

**Proposition 6.1.2.** Soit  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha, \rho)$  une paire 3-HomLieRep colorée. Alors il existe une structure compatible d'algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée sur  $\mathfrak{g}$  si et seulement s'il existe un opérateur de Reynolds généralisé inversible  $T$ . En outre, la structure de l'algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée sur  $\mathfrak{g}$  est déterminée par :

$$\{x, y, z\} = T(\rho(x, y)T^{-1}(z)), \quad [x, y, z]_* = T(H(x, y, z)) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

**Preuve 6.1.4.** Soit  $T : M \rightarrow \mathfrak{g}$  un opérateur de Reynolds généralisé inversible sur une paire 3-Hom-LieRep colorée. On applique le Théorème 6.1.2, on obtient une structure d'algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée sur  $M$  donnée par :

$$\{u, v, w\}_M = \rho(Tu, Tv)w \quad \text{et} \quad [u, v, w]_M^* = H(Tu, Tv, Tw) \quad \forall u, v, w \in M.$$

Etant donnée que  $T$  est bijectif, alors  $(\mathfrak{g}, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]_*, \varepsilon, \mu)$  est une algèbre 3-Hom-NS-Lie colorée, où :

$$\begin{aligned} \{x, y, z\} &= T\{T^{-1}(x), T^{-1}(y), T^{-1}(z)\}_M = T(\rho(x, y)T^{-1}(z)), \\ [x, y, z]_* &= T[T^{-1}(x), T^{-1}(y), T^{-1}(z)]_M = T(H(x, y, z)) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} & \{x, y, z\} - \varepsilon(y, z)\{x, z, y\} + \varepsilon(x, y + z)\{y, z, x\} + [x, y, z]_* \\ &= T\left(\rho(x, y)T^{-1}(z) - \varepsilon(y, z)\rho(x, z)T^{-1}(y) + \varepsilon(x, y + z)\rho(y, z)T^{-1}(x) + H(x, y, z)\right) \\ &= T\left(\rho(T \circ T^{-1}(x), T \circ T^{-1}(y))T^{-1}(z) - \varepsilon(y, z)\rho(T \circ T^{-1}(x), T \circ T^{-1}(z))T^{-1}(y) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon(x, y + z)\rho(T \circ T^{-1}(y), T \circ T^{-1}(z))T^{-1}(x) + H(T \circ T^{-1}(x), T \circ T^{-1}(y), T \circ T^{-1}(z))\right) \\ &= [T \circ T^{-1}(x), T \circ T^{-1}(y), T \circ T^{-1}(z)] \\ &= [x, y, z]. \end{aligned}$$

Réciproquement, On a l'identité  $Id : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est un opérateur de Reynolds généralisé sur  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot, \cdot], \varepsilon, \alpha)$  relatif à la représentation  $(\mathfrak{g}, \rho)$ .

## 6.2 Systèmes triples de NS-Lie

Notre objectif dans cette section est d'étudier la structure de Nijenhuis d'un système triple de Lie ou système triple de NS-Lie comme généralisation des systèmes triples de Lie et des pre-systèmes triples de Lie. Ainsi, on montre que les algèbres de Lie, les algèbres de NS-Lie, les systèmes triples de Lie et les systèmes triples de NS-Lie sont étroitement liés.

### 6.2.1 Définitions et constructions

**Définition 6.2.1.** Soit  $L$  un espace vectoriel muni de deux applications trilinéaires  $\{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot] : \otimes^3 L \rightarrow L$ . Le triplet  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est appelé système triple de NS-Lie, si les identités suivantes sont vérifiées :

$$[y_1, y_2, y_3] = -[y_2, y_1, y_3], \quad \cup_{y_1, y_2, y_3} [y_1, y_2, y_3] = 0, \quad (6.2.1)$$

$$\{x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]]\} = \{\{x_1, x_2, y_1\}, y_2, y_3\} - \{\{x_1, x_2, y_2\}, y_1, y_3\} + \{y_1, y_2, \{x_1, x_2, y_3\}\}^*, \quad (6.2.2)$$

$$\{x_1, x_2, \{y_1, y_2, y_3\}\}^* = \{\{x_1, x_2, y_1\}^*, y_2, y_3\} + \{y_1, [[x_1, x_2, y_2]], y_3\} + \{y_1, y_2, [[x_1, x_2, y_3]]\}, \quad (6.2.3)$$

$$[x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]]] = [[[x_1, x_2, y_1]], y_2, y_3] + [y_1, [[x_1, x_2, y_2]], y_3] + [y_1, y_2, [[x_1, x_2, y_3]]]$$

$$\begin{aligned}
 & + \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\} - \{x_1, x_2, y_2, y_1, y_3\} + \{y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]\}^* \\
 & - \{x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]\}^*, \tag{6.2.4}
 \end{aligned}$$

pour tout  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in L$ , où  $\{\cdot, \cdot, \cdot\}^*$  et  $[[\cdot, \cdot, \cdot]]$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 \{y_1, y_2, y_3\}^* &= \{y_3, y_2, y_1\} - \{y_3, y_1, y_2\}, \\
 [[y_1, y_2, y_3]] &= \{y_1, y_2, y_3\}^* + \{y_1, y_2, y_3\} - \{y_2, y_1, y_3\} + [y_1, y_2, y_3]. \tag{6.2.5}
 \end{aligned}$$

**Remarque 6.2.1.** On constate que si l'accolade  $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$  est triviale, alors  $(A, [[\cdot, \cdot, \cdot]])$  est un système triple de Lie. Si le crochet  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  est triviale alors  $(A, \{\cdot, \cdot, \cdot\}^*)$  est un système triple de pre-Lie. De ce fait, un système triple de NS-Lie est une généralisation de système triple de Lie et système triple de pre-Lie, voir [53] pour plus de détails sur les système triple de pre-Lie.

Un système triple de NS-Lie donne lieu à un système triple de Lie et une représentation sur lui-même.

**Théorème 6.2.1.** Soit  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [[\cdot, \cdot, \cdot]])$  un système triple de NS-Lie. Alors  $(L, [[\cdot, \cdot, \cdot]])$  est un système triple de Lie qu'appelle système triple de Lie *sous-adjacent* et il est noté par  $\mathfrak{L}$ . En outre,  $(L, \varrho)$  est une représentation de  $\mathfrak{L}$ , où  $\varrho : L \otimes L \rightarrow \text{End}(L)$  est déterminée par :

$$\varrho(x, y)z = \{z, x, y\} \quad \forall x, y, z \in L.$$

**Preuve 6.2.1.** Ce n'est pas difficile de prouver que  $[[\cdot, \cdot, \cdot]]$  satisfait (1.2.1). D'après les Eqs.(6.2.2)-(6.2.4), pour tout  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in L$ , on a :

$$\begin{aligned}
 & [[x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]]]] - [[[[x_1, x_2, y_1], y_2, y_3]] - [[y_1, [[x_1, x_2, y_2], y_3]] - [[y_1, y_2, [[x_1, x_2, y_3]]]] \\
 = & \{x_1, x_2, \{y_1, y_2, y_3\}\}^* + \{x_1, x_2, \{y_3, y_2, y_1\}\}^* - \{x_1, x_2, \{y_3, y_1, y_2\}\}^* - \{x_1, x_2, \{y_2, y_1, y_3\}\}^* \\
 & - \{x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]\}^* - \{x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]]\} + \{x_2, x_1, [[y_1, y_2, y_3]]\} - [x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]] \\
 & - \{y_3, y_2, [[x_1, x_2, y_1]]\} + \{y_3, [[x_1, x_2, y_1], y_2\} - \{\{x_1, x_2, y_1\}^*, y_2, y_3\} - \{\{x_1, x_2, y_1\}, y_2, y_3\} \\
 & + \{\{x_2, x_1, y_1\}^*, y_2, y_3\} - \{[x_1, x_2, y_1], y_2, y_3\} + \{y_2, [[x_1, x_2, y_1], y_3\} - [[x_1, x_2, y_1], y_2, y_3 \\
 & - \{y_3, [[x_1, x_2, y_2], y_1\} + \{y_3, y_1, [[x_1, x_2, y_2]]\} - \{y_1, [[x_1, x_2, y_2], y_3\} + \{\{x_1, x_2, y_2\}^*, y_1, y_3\} \\
 & + \{\{x_1, x_2, y_2\}, y_1, y_3\} - \{\{x_2, x_1, y_2\}, y_1, y_3\} + \{[x_1, x_2, y_2], y_1, y_3\} - [y_1, [[x_1, x_2, y_2], y_3] \\
 & - \{\{x_1, x_2, y_3\}^*, y_2, y_1\} + \{\{x_1, x_2, y_3\}^*, y_1, y_2\} - \{y_1, y_2, \{x_1, x_2, y_3\}\}^* + \{y_1, y_2, \{x_2, x_1, y_3\}\}^* \\
 & - \{y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]\}^* + \{y_1, y_2, [[x_1, x_2, y_3]]\} - [y_1, y_2, [[x_1, x_2, y_3]]] \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

Cela implique que  $\mathfrak{L}$  est un système triple de Lie. On applique les Eqs.(6.2.2)-(6.2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \varrho(x_1, x_2)\varrho(y_1, y_2) - \varrho(y_2, x_2)\varrho(y_1, x_1) - \varrho(y_1, [[y_2, x_1, x_2]]) + D_\varrho(y_2, x_1)\varrho(y_1, x_2) &= 0, \\
 \varrho(x_1, x_2)D_\varrho(y_1, y_2) - D^*(y_1, y_2)\varrho(x_1, x_2) + \varrho([[y_1, y_2, x_1]], x_2) + \varrho(x_1, [[y_1, y_2, x_2]]) &= 0,
 \end{aligned}$$

où  $D_\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1) - \varrho(x_1, x_2)$ . Alors  $\varrho$  est une représentation de  $\mathfrak{L}$  sur  $L$ . Par conséquent  $(L, [[\cdot, \cdot, \cdot]], \varrho)$  est une paire L.t.sRep.

Un système triple de NS-Lie peut être considéré comme une structure algébrique sous-jacente d'un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire L.t.sRep.

**Théorème 6.2.2.** Soit  $T : M \rightarrow L$  un opérateur de Reynolds généralisé sur une paire  $L.t.sRep$ . Alors

$$\{u, v, w\} = \theta(Tv, Tw)u \quad \text{et} \quad [u, v, w] = \mathcal{H}(Tu, Tv, Tw) \quad (6.2.6)$$

définissent une structure de système triple de NS-Lie sur  $M$ . Il s'agit du système triple de NS-Lie induit.

**Preuve 6.2.2.** Pour tout  $u, v, w \in L$ , il est clair que :

$$[u, v, w] = -[v, u, w] \quad \text{et} \quad \cup_{u,v,w} [u, v, w] = 0.$$

De plus, pour tout  $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in M$ , d'après les Eqs.(1.2.3)-(1.2.4) et l'Eq.(6.2.5), on a :

$$\begin{aligned} & \{u_1, u_2, [[v_1, v_2, v_3]]\} - \{\{u_1, u_2, v_1\}, v_2, v_3\} + \{\{u_1, u_2, v_2\}, v_1, v_3\} - \{v_1, v_2, \{u_1, u_2, v_3\}\} \\ &= \{u_1, u_2, \{v_1, v_2, v_3\}^*\} + \{u_1, u_2, \{v_1, v_2, v_3\}\} - \{u_1, u_2, \{v_2, v_1, v_3\}\} + \{u_1, u_2, [v_1, v_2, v_3]\} \\ & \quad - \{\{u_1, u_2, v_1\}, v_2, v_3\} + \{\{u_1, u_2, v_2\}, v_1, v_3\} - \{v_1, v_2, \{u_1, u_2, v_3\}\}^* \\ &= \{u_1, u_2, \{v_3, v_2, v_1\}\} - \{u_1, u_2, \{v_3, v_1, v_2\}\} + \{u_1, u_2, \{v_1, v_2, v_3\}\} - \{u_1, u_2, \{v_2, v_1, v_3\}\} \\ & \quad + \{u_1, u_2, [v_1, v_2, v_3]\} - \{\{u_1, u_2, v_1\}, v_2, v_3\} + \{\{u_1, u_2, v_2\}, v_1, v_3\} - \{\{u_1, u_2, v_3\}, v_2, v_1\} \\ & \quad + \{\{u_1, u_2, v_3\}, v_1, v_2\} \\ &= \theta(Tu_2, [Tv_1, Tv_2, Tv_3])u_1 - \theta(Tv_2, Tv_3)\theta(Tu_2, Tv_1)u_1 + \theta(Tv_1, Tv_3)\theta(Tu_2, Tv_2)u_1 \\ & \quad - \theta(Tv_2, Tv_1)\theta(Tu_2, Tv_3)u_1 + \theta(Tv_1, Tv_2)\theta(Tu_2, Tv_3)u_1 = 0. \end{aligned}$$

Cela implique que l'Eq.(6.2.2) est vérifiée. De même pour l'Eq.(6.2.3). Et puisque  $\mathcal{H}$  est un 3-cocycle de  $L$  à coefficients dans  $M$ , alors l'Eq.(6.2.4) est vérifiée. D'où,  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est un système triple de NS-Lie.

**Corollaire 6.2.1.** Le système triple de Lie sous-adjacent  $(M, [[\cdot, \cdot, \cdot]])$  du système triple de NS-Lie défini précédemment est explicitement le système triple de Lie défini dans le Corollaire 5.1.1.

**Définition 6.2.2.** Un morphisme de systèmes triples de NS-Lie  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  et  $(L', \{\cdot, \cdot, \cdot\}', [\cdot, \cdot, \cdot]')$  est une application linéaire  $\psi : L \rightarrow L'$  qui satisfait :

$$\psi\{x, y, z\} = \{\psi(x), \psi(y), \psi(z)\}' \quad \text{et} \quad \psi[x, y, z] = [\psi(x), \psi(y), \psi(z)]' \quad \forall x, y, z \in L.$$

**Proposition 6.2.1.** Soient  $T$  et  $T'$  deux opérateurs de Reynolds généralisés sur une paire  $L.t.sRep (L, [\cdot, \cdot, \cdot], \theta)$ ,  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  et  $(L', \{\cdot, \cdot, \cdot\}', [\cdot, \cdot, \cdot]')$  les systèmes triples de NS-Lie induits. Si  $(\phi, \psi)$  est un morphisme d'opérateurs de Reynolds généralisés, alors  $\psi$  est un morphisme de systèmes triples de Lie induits.

**Preuve 6.2.3.** Il est facile de la prouver en utilisant les Eqs.(5.1.9)-(5.1.11) et l'Eq.(6.2.6).

Notons qu'un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$  sur un système triple de Lie est un opérateur de Reynolds généralisé particulier sur une paire  $L.t.sRep$ .

**Corollaire 6.2.2.** Soit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot], \mathcal{R})$  un Reynolds système triple de Lie de poids  $\lambda$ . Alors  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, \lambda[\cdot, \cdot, \cdot] \circ (\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}))$  est un système triple de NS-Lie, où

$$\{x, y, z\} = [x, \mathcal{R}y, \mathcal{R}z] \quad \forall x, y, z \in L.$$

**Exemple 6.2.1.** L'exemple 5.1.2 sera développé pour un système triple de NS-Lie. En effet, on définit un opérateur de Reynolds  $\mathcal{R}$  de poids  $\lambda$  sur l'algèbre de Lie pour construire un opérateur de Reynolds généralisé sur le système triple de Lie induit  $(L, [[\cdot, \cdot], \cdot])$ . De plus, d'après le corollaire 6.2.2, on a un système triple de NS-Lie sur  $W_{\geq 0}$  défini par :

$$\begin{aligned} \{l_m, l_n, l_p\} &= [l_m, \mathcal{R}(l_n), \mathcal{R}(l_p)] = \frac{1}{\lambda^2(n+1)(p+1)} [l_m, l_n, l_p] \\ &= \frac{(m-n)(m+n-p)}{\lambda^2(n+1)(p+1)} l_{m+n+p}, \end{aligned}$$

et;

$$2\lambda[\mathcal{R}(l_m), \mathcal{R}(l_n), \mathcal{R}(l_p)] = 2 \frac{(m-n)(m+n-p)}{\lambda^2(m+1)(n+1)(p+1)} l_{m+n+p}.$$

Donc  $\mathcal{R}$  est un opérateur de Reynolds généralisé sur le système triple de Lie induit  $(L, [\cdot, \cdot, \cdot])$ .

**Exemple 6.2.2.** On considère un opérateur de Reynolds de poids  $\lambda$ ;  $\mathcal{R} : B(q)_{\geq 0} \rightarrow B(q)_{\geq 0}$  sur le système triple de Lie  $(B(q)_{\geq 0}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  défini dans l'Exemple 5.1.1. Il découle du corollaire 6.2.2, que  $B(q)_{\geq 0}$  est muni d'une structure de système triple de NS-Lie donnée par :

$$\{L_{m,i}, L_{n,j}, L_{p,k}\} = \frac{(n(i+q) - m(j+q))(p(i+j+q) - (m+n)(p+q))}{\lambda^2(n+j+1)(p+k+1)} L_{m+n+p,i+j+k}.$$

## 6.2.2 Des algèbres NS-Lie aux systèmes triples de NS-Lie

Maintenant, on construit un système triple de NS-Lie en partant d'une algèbre NS-Lie. On rappelle d'abord la définition d'algèbre NS-Lie présentée par Apurba Das in [27].

**Définition 6.2.3.** Une algèbre NS-Lie est un espace vectoriel  $L$  muni de deux opérations bilinéaires  $\circ, \vee : L \rightarrow L$ , où  $\vee$  est antisymétrique, qui satisfont les deux identités suivantes :

$$(x * y) \circ z - x \circ (y \circ z) + y \circ (x \circ z) = 0, \quad (6.2.7)$$

$$x \vee (y * z) + y \vee (z * x) + z \vee (x * z) + x \circ (y \vee z) + y \circ (z \vee x) + z \circ (x \vee y) = 0 \quad \forall x, y, z \in L, \quad (6.2.8)$$

où  $x * y = x \circ y - y \circ x + x \vee y$ .

**Proposition 6.2.2.** Soit  $(L, \circ, \vee)$  une algèbre NS-Lie. Alors  $(L, *)$  est une algèbre de Lie dite algèbre de Lie adjacente.

Soit  $(L, [\cdot, \cdot], \rho)$  une paire LieRep. Une application bilinéaire antisymétrique  $H : L \times L \rightarrow M$  est un 2-cocycle, si elle vérifie :

$$\cup_{x,y,z} (\rho(x)H(y,z) + H(x, [y,z])) = 0 \quad \forall x, y, z \in L. \quad (6.2.9)$$

Une application linéaire  $T : M \rightarrow L$  est un **opérateur de Reynolds généralisé** sur une paire LieRep  $(L, [\cdot, \cdot], \rho)$  si elle satisfait :

$$[T(u), T(v)] = T(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + H(Tu, Tv)) \quad \forall u, v \in M. \quad (6.2.10)$$

On définit les deux opérations suivantes :

$$u \circ v = \rho(Tu)v \quad \text{et} \quad u \vee v = H(Tu, Tv) \quad \forall u, v \in M. \quad (6.2.11)$$

**Proposition 6.2.3.** Avec les notations ci-dessus,  $(M, \circ, \vee)$  est une algèbre NS-Lie.

**Théorème 6.2.3.** Soit  $(L, \circ, \vee)$  une algèbre NS-Lie. Alors  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est un système triple de NS-Lie, où :

$$\{x, y, z\} = z \circ (y \circ x), \tag{6.2.12}$$

$$[x, y, z] = (x * y) \vee z - z \circ (x \vee y) \quad \forall x, y, z \in L. \tag{6.2.13}$$

Notons que  $[[x, y, z]] = (x * y) * z$ .

**Preuve 6.2.4.** Soient  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in L$ . D'après l'Eq.(6.2.7), on a :

$$\begin{aligned} & \{\{x_1, x_2, y_1\}, y_2, y_3\} - \{\{x_1, x_2, y_2\}, y_1, y_3\} + \{y_1, y_2, \{x_1, x_2, y_3\}\}^* - \{x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]]\} \\ &= \underline{y_3 \circ (y_2 \circ (y_1 \circ (x_2 \circ x_1)))} - \underline{y_3 \circ (y_1 \circ (y_2 \circ (x_2 \circ x_1)))} + \underline{y_1 \circ (y_2 \circ (y_3 \circ (x_2 \circ x_1)))} \\ & \quad - \underline{y_2 \circ (y_1 \circ (y_3 \circ (x_2 \circ x_1)))} - ((y_1 * y_2) * y_3) \circ (x_2 \circ x_1) \\ & \stackrel{(6.2.7)}{=} (y_1 * y_2) \circ (y_3 \circ (x_2 \circ x_1)) - y_3 \circ ((y_1 * y_2) \circ (x_2 \circ x_1)) - ((y_1 * y_2) * y_3) \circ (x_2 \circ x_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors l'Eq.(6.2.2) est vérifiée. De manière analogue, on vérifie l'Eq.(6.2.3) :

$$\begin{aligned} & \{\{y_1, y_2, y_3\}, x_1, x_2\} - \{\{y_1, y_2, y_3\}, x_2, x_1\} + \{\{y_1, x_2, x_1\}, y_2, y_3\} - \{\{y_1, x_1, x_2\}, y_2, y_3\} \\ & \quad + \{y_1, [x_1, x_2, y_2], y_3\} + \{y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]\} \\ &= \underline{x_2 \circ (x_1 \circ (y_3 \circ (y_2 \circ y_1)))} - \underline{x_1 \circ (x_2 \circ (y_3 \circ (y_2 \circ y_1)))} + \underline{y_3 \circ (y_2 \circ (x_1 \circ (x_2, y_1)))} \\ & \quad - \underline{y_3 \circ (y_2 \circ (x_2 \circ (x_1, y_1)))} + y_3 \circ (((x_1 * x_2) * y_2) \circ y_1) + ((x_1 * x_2) * y_3) \circ (y_2 \circ y_1) \\ & \stackrel{(6.2.7)}{=} y_3 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \circ y_1)) - (x_1 * x_2) \circ (y_3 \circ (y_2 \circ y_1)) + y_3 \circ (((x_1 * x_2) * y_2) \circ y_1) \\ & \quad + ((x_1 * x_2) * y_3) \circ (y_2 \circ y_1) \\ &= y_3 \circ ((x_1 * x_2) \circ (y_2 \circ y_1)) - y_3 \circ ((x_1 * x_2) \circ (y_2 \circ y_1)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & [[x_1, x_2, y_1], y_2, y_3] + [y_1, [[x_1, x_2, y_2], y_3] + [y_1, y_2, [[x_1, x_2, y_3]]] + \{\{x_1, x_2, y_1\}, y_2, y_3\} \\ & \quad - \{\{x_1, x_2, y_2\}, y_1, y_3\} + \{y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]\}^* - \{x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]\}^* - [x_1, x_2, [[y_1, y_2, y_3]]] \\ &= \underline{(((x_1 * x_2) * y_1) * y_2) \vee y_3} + \underline{((y_1 * y_2) * y_3) \circ (x_1 \vee x_2)} - y_3 \circ (((x_1 * x_2) * y_1) \vee y_2) \\ & \quad + (y_1 * ((x_1 * x_2) * y_2)) \vee y_3 - y_3 \circ (y_1 \vee ((x_1 * x_2) * y_2)) + (y_1 * y_2) \vee ((x_1 * x_2) * y_3) \\ & \quad - ((x_1 * x_2) * y_3) \circ (y_1 \vee y_2) + y_3 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_1)) - \underline{y_3 \circ (y_2 \circ (y_1 \circ (x_1 \vee x_2)))} \\ & \quad - y_3 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_2)) + y_1 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3)) + \underline{y_3 \circ (y_1 \circ (y_2 \circ (x_1 \vee x_2)))} \\ & \quad - y_2 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3)) - \underline{y_1 \circ (y_2 \circ (y_3 \circ (x_1 \vee x_2)))} + \underline{y_2 \circ (y_1 \circ (y_3 \circ (x_1 \vee x_2)))} \\ & \quad - x_1 \circ (x_2 \circ (y_1 * y_2) \vee y_3) + x_1 \circ (x_2 \circ (y_3 \circ (y_1 \vee y_2))) + x_2 \circ (x_1 \circ (y_1 * y_2) \vee y_3) \\ & \quad - x_2 \circ (x_1 \circ (y_3 \circ (y_1 \vee y_2))) - (x_1 * x_2) \vee ((y_1 * y_2) * y_3) \\ & \stackrel{(6.2.7)}{=} \underline{(((x_1 * x_2) * y_1) * y_2) \vee y_3} - y_3 \circ (((x_1 * x_2) * y_1) \vee y_2) + \underline{(y_1 * ((x_1 * x_2) * y_2)) \vee y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -y_3 \circ (y_1 \vee ((x_1 * x_2) * y_2)) + (y_1 * y_2) \vee ((x_1 * x_2) * y_3) + y_3 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_1)) \\
 & -y_3 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_2)) + y_1 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3)) - y_2 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3)) \\
 & -x_1 \circ (x_2 \circ (y_1 * y_2) \vee y_3) + x_2 \circ (x_1 \circ (y_1 * y_2) \vee y_3) + \underline{x_1 \circ (x_2 \circ (y_3 \circ (y_1 \vee y_2)))} \\
 & \underline{-x_2 \circ (x_1 \circ (y_3 \circ (y_1 \vee y_2)))} - (x_1 * x_2) \vee ((y_1 * y_2) * y_3) - \underline{\underline{((x_1 * x_2) * y_3) \circ (y_1 \vee y_2)}} \\
 \stackrel{(6.2.7)}{=} & \underline{\underline{((x_1 * x_2) * (y_1 * y_2)) \vee y_3}} + y_3 \circ \left( ((x_1 * x_2) \circ (y_1 \vee y_2)) - y_3 \circ ((x_1 * x_2) * y_1) \vee y_2 \right) \\
 & -y_3 \circ (y_1 \vee ((x_1 * x_2) * y_2)) + (y_1 * y_2) \vee ((x_1 * x_2) * y_3) + y_3 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_1)) \\
 & -y_3 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_2)) + \underline{y_1 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3))} - y_2 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3)) \\
 & \underline{-x_1 \circ (x_2 \circ (y_1 * y_2) \vee y_3) + x_2 \circ (x_1 \circ (y_1 * y_2) \vee y_3)} - (x_1 * x_2) \vee ((y_1 * y_2) * y_3) \\
 \stackrel{(6.2.8)}{=} & \underline{\underline{((x_1 * x_2) * (y_1 * y_2)) \vee y_3}} + y_3 \circ \left( ((x_1 * x_2) \circ (y_1 \vee y_2)) - y_3 \circ ((x_1 * x_2) * y_1) \vee y_2 \right) \\
 & - \underline{y_3 \circ (y_1 \vee ((x_1 * x_2) * y_2))} + (y_1 * y_2) \vee ((x_1 * x_2) * y_3) + \underline{y_3 \circ (y_2 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_1))} \\
 & - \underline{y_3 \circ (y_1 \circ ((x_1 * x_2) \vee y_2))} - (x_1 * x_2) \circ ((y_1 * y_2) \vee y_3) + (y_1 * y_2) \circ ((x_1 * x_2) \vee y_3) \\
 & - (x_1 * x_2) \vee ((y_1 * y_2) * y_3) \\
 \stackrel{(6.2.8)}{=} & - \left( (x_1 * x_2) \vee ((y_1 * y_2) * y_3) + (y_1 * y_2) \vee (y_3 * (x_1 * x_2)) + y_3 \vee ((x_1 * x_2) * (y_1 * y_2)) \right) \\
 & + (x_1 * x_2) \circ ((y_1 * y_2) \vee y_3) + (y_1 * y_2) \circ (y_3 \vee (x_1 * x_2)) + y_3 \circ ((x_1 * x_2) \vee (y_1 * y_2)) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Donc l'Eq.(6.2.4) est validée et par la suite le triplet  $(L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot])$  est un système triple de NS-Lie.

Pour résumer, on a réussi à montrer que les algèbres de Lie, les algèbres NS-Lie, les systèmes triples de Lie et les systèmes triples de NS-Lie sont étroitement liés au sens du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{NS-Lie alg. } (L, \circ, \vee) & \longrightarrow & \text{NS-L.t.s. } (L, \{\cdot, \cdot, \cdot\}, [\cdot, \cdot, \cdot]) \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \text{LieRep pair. } (L, [\cdot, \cdot], \rho) & \longrightarrow & \text{L.t.sRep pair } (L, [[\cdot, \cdot], \cdot], \theta_\rho).
 \end{array}$$

# Perspectives

On veut utiliser le savoir acquis dans cette thèse pour considérer les deux projets suivants. Dans le premier, on considère les algèbres associatives sur les espaces gradués comme les super-algèbres  $n$ -Lie Rinehart qui sont une généralisation des algèbres  $n$ -Lie-Rinehart.

Une algèbre  $n$ -Lie Rinehart est un couple  $(L, A)$  constitué d'une algèbre associative commutative  $A$  et d'une algèbre  $n$ -Lie  $(L, [\cdot, \dots, \cdot])$  tel que  $A$  est un  $L$ -module et les deux structures satisfont des conditions de compatibilité bien déterminées. Dans [40], les auteurs ont construit une algèbre  $n$ -Lie Rinehart en partant d'une algèbre de Leibniz Rinehart, c'est la construction de Takhtajan. On désire étendre cette construction aux espaces  $\mathbb{Z}_2$ -gradués et établir une théorie de cohomologie. De plus, on envisage de relier les cohomologies des super-algèbres  $n$ -Lie Rinehart et leur super-algèbres de Leibniz-Rinehart associées.

Puisque on a travaillé sur la cohomologie de type Maurer-Cartan des opérateurs de Reynolds généralisés sur les paires  $L.t.sRep$ , naturellement on pense à la cohomologie de type Maurer-Cartan des opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres de Lie Yamaguti en tant que deuxième projet. En effet, les algèbres de Lie Yamaguti sont une généralisation des algèbres de Lie et des systèmes triples de Lie. elles ont été introduites dans les années 1950 par Yamaguti dans [45].

Une algèbre de Lie Yamaguti est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni d'un crochet binaire  $[\cdot, \cdot] : \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  et un crochet ternaire  $\{\cdot, \cdot, \cdot\} : \wedge^2 \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tel que les équations suivantes soient satisfaites pour tout  $x, y, z, w, t \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] + \{x, y, z\} + \{y, z, x\} + \{z, x, y\} &= 0, \\ \{[x, y], z, w\} + \{[y, z], x, w\} + \{[z, x], y, w\} &= 0, \\ \{x, y, [z, w]\} &= \{\{x, y, z\}, w\} + [z, \{x, y, w\}], \\ \{x, y, \{z, w, t\}\} &= \{\{x, y, z\}, w, t\} + \{z, \{x, y, w\}, t\} + \{z, w, \{x, y, t\}\}. \end{aligned}$$

Cependant, avant tout, on doit considérer la caractérisation de Maurer-Cartan des algèbres de Lie Yamaguti car d'une part; contrairement aux algèbres de Lie, aux algèbres de 3-Lie, ou même aux systèmes triples de Lie, cette question n'a pas été considérée sur les algèbres de Lie Yamaguti. D'autre part, c'est essentiel pour construire l'algèbre graduée qui contrôle les déformations des opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres de Lie Yamaguti. Ainsi cette construction favorise également le développement de la cohomologie des opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres de Lie Yamaguti. On pourrait considérer les questions suivantes :

1. Existe-t-il une algèbre de Lie graduée appropriée dont les éléments de Maurer-Cartan correspondent aux structures de l'algèbre de Lie-Yamaguti ?
2. Existe-t-il une algèbre appropriée dont les éléments de Maurer-Catan sont précisément les opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres de Lie-Yamaguti ?
3. Existe-t-il une théorie de cohomologie appropriée des opérateurs de Reynolds généralisés sur les algèbres de Lie-Yamaguti, qui peut être utilisée pour classifier certains types de déformations ?

---

## Bibliography

- [1] E. Abdaoui, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Cohomology of Hom-Leibniz and  $n$ -ary Hom-Nambu-Lie superalgebras. arXiv preprint. 1406.3776. (2014). 6
- [2] F. Ammar, Z. Ejbehi, A. Makhlouf. Cohomology and deformations of Hom-algebras. Journal of Lie Theory Volume 21 (2011) 813–836. 12
- [3] F. Ammar, I. Ayadi, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Quadratic color Hom-Lie algebras. In The Moroccan Andalusian Meeting on Algebras and their Applications. Springer, Cham. 287–312. (2018). 6
- [4] F. Ammar, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Representations and cohomology of  $n$ -ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras. Journal of Geometry and Physics. 61(10), 1898–1913. (2011). 6
- [5] F. Ammar, N. Saadaoui, Cohomology of  $n$ -ary-Nambu-Lie superalgebras and super 3-algebra. arXiv preprint. 1304.5767. (2013). 6
- [6] A. Arfa, N. Ben Fraj and A. Makhlouf. Cohomology and deformations of  $n$ -Lie algebra morphisms. J. Geom. Phys. 13264–74. (2018). 7
- [7] J. Arnlind, A. Makhlouf, S. Silvestrov. Ternary Hom-Nambu-Lie algebras induced by Hom-Lie algebras. J. Math. Phys. 51.043515, 11 pp. (2010). 6
- [8] J. Arnlind, A. Makhlouf, S. Silvestrov. Construction of  $n$ -Lie algebras and  $n$ -ary Hom-Nambu-Lie algebras. J. Math. Phys. 52. 123502. 13 pp. (2011). 6
- [9] J. Arnlind, A. Kitouni, A. Makhlouf, S. Silvestrov. Structure and Cohomology of 3-Lie algebras induced by Lie algebras. Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Springer proceedings in Mathematics and Statistics. vol 85. (2014). 6
- [10] A. Armakan, S. Silvestrov, M. Farhangdoost, Enveloping algebras of color hom-Lie algebras. Turk. J. Math. 43. 316–39. (2019). 6
- [11] H. Ataguema, A. Makhlouf, S. Silvestrov. Generalization of  $n$ -ary Nambu algebras and beyond. J. Math. Phys. 50. 083501. (2009). 6
- [12] C. Bai, L. Guo, Y. Sheng. Bialgebras the classical Yang-Baxter equation and Manin triples for 3-Lie algebras. Adv. Theor. Math. Phys.. 23. 27–74. (2019). 7
- [13] R. Bai, L. Guo, J. Li, Y. Wu. Rota-Baxter 3-Lie algebras. J. Math. Phys. 54 064504. 14 pp. (2013). 7
- [14] I. Bakayoko, S. Silvestrov. Multiplicative  $n$ -Hom-Lie color algebras. In International Conference on Stochastic Processes and Algebraic Structures. Springer, Cham. vol. 22 pp. 159–187. (2017). 16, 18

- [15] G. Baxter. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. *Pac. J. Math.* 10. 731–742. (1960). 7
- [16] P. D. Beites, I. Kaygorodov, Y. Popov. Generalized derivations of multiplicative  $n$ -ary Hom- $w$  color algebras. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 42. 315–335. (2019). 6
- [17] S. Benayadi, A. Makhlouf. Hom-Lie Algebras with Symmetric Invariant NonDegenerate Bilinear Forms. *J. Geom. Phys.* 76. 38–60. (2014). 12
- [18] J. Bergen, D. S. Passman. Delta ideal of Lie color algebras. *J. Algebra.* 177. 740–754 (1995). 6
- [19] R. Block. On torsion-free abelian groups and Lie algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 613–620. (1958). 56
- [20] L. Cai and Y. Sheng. Hom-big brackets: theory and applications. *SIGMA* 12. 014. 18 pages. (2016). 8
- [21] E. Cartan. *Oeuvres completes. Part 1.* Gauthier-Villars. Paris. vol. 2. nos. 101–138. (1952). 7
- [22] J. M. Casas, J-L. Loday, T. Pirashvili. Leibniz  $n$ -algebras. *Forum Math.* 14. 189–207. (2002). 6
- [23] T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk, A. Makhlouf. Twisted  $\mathcal{O}$ -operators on 3-Lie algebras and 3-NS-Lie algebras. *arXiv preprint-2107.* (2021). 7, 55
- [24] T. Chtioui, A. Hajjaji, S. Mabrouk, A. Makhlouf.  $\mathcal{O}$ -operators on Lie triple systems. *ArXiv preprint -2204.01853.*(2022). 62, 67
- [25] A. Connes, D. Kreimer. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. *Comm. Math. Phys.* 210. 249–273. (2000). 7
- [26] Y. L. Daletskii, L. A. Takhtajan. Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra. *Lett. Math. Phys.* 39. 127–141 (1997). 6
- [27] A. Das. Twisted Rota–Baxter operators and Reynolds operators on Lie algebras and NS-Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics.* 62(9). 091701. (2021). 8, 55, 56, 59, 79
- [28] A. Das. Cohomology and deformations of twisted Rota-Baxter operators and NS-algebras. *ArXiv preprint-2010.01156.* (2020). 8
- [29] A. Das, S. Guo. Twisted relative Rota-Baxter operators on Leibniz algebras and NS-Leibniz algebras. *ArXiv preprint-2102.09752.* (2021). 8
- [30] A. Das. Deformations of associative Rota-Baxter operators. *J. Algebra.* 560 . 144–180. (2020). 7
- [31] J. Feldvoss. Representations of Lie color algebras. *Adv. Math.* 157. 95–137. (2001). 6
- [32] J. Figueroa-O’Farrill. Deformations of 3-algebras. *J. Math. Phys.* 50. no. 11. 113514. 27 pp. (2009). 7
- [33] V. T. Filippov.  $n$ -Lie algebras. *Sib. Mat. Zh.* 26 126–140. (1985). 6
- [34] Y. Frégier. A new cohomology theory associated to deformations of Lie algebra morphisms. *Lett. Math. Phys.* 70. 97–107. (2004). 7
- [35] P. Gautheron, Some remarks concerning Nambu mechanics. *Lett. Math. Phys.* 37.103–116. (1996). 6

- [36] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. Math.* 79 59–103. (1964). 7
- [37] E. Getzler. Lie theory for nilpotent  $L_\infty$ -algebras. *Ann. of Math.* 170. 271–301. (2009). 60
- [38] J. T. Hartwig, D. Larsson, S. D. Silvestrov. Deformations of Lie algebras using  $\sigma$ -derivations. *J. Algebra*, 295. 314–361. (2006). 12
- [39] B. Harris. Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution. *Trans. Amer. Math. Soc.* 98. 148–162. (1961). 15
- [40] A.B. Hassine, T.Chtioui, M. Elhamedadi, S. Mabrouk. Extensions and Crossed Modules of  $n$ -Lie–Rinehart Algebras. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 32, 31 (2022). 82
- [41] T. L. Hodge, B. J. Parshall. On the representation theory of Lie triple systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 354. 4359–4391. (2002). 15
- [42] N. Jacobson. Lie and Jordan triple systems. *Amer. J. Math.* 71 149–170. (1949). 7
- [43] Sh. M. Kasymov. Theory of  $n$ -Lie algebras. *Algebra i Logika*. Vol. 26. No. 3. pp. 277–297. (1987). 6
- [44] I. Kaygorodov, Y. Popov. Generalized derivations of (color)  $n$ -ary algebras. *Linear and Multilinear Algebra*. 1086–1106. (2016). 6
- [45] M. K. Kinyon, A. Weinstein, Leibniz algebras, Courant algebroids and multiplications on reductive homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* 525–550. (2001). 82
- [46] C. Klimeik, T. Strobl. WZW-Poisson manifolds. *J. Geom. Phys.* 341–344. (2002). 8
- [47] F. Kubo, Y. Taniguchi. A controlling cohomology of the deformation theory of Lie triple systems. *J. Algebra*. 242–250. (2004). 7, 15
- [48] B. A. Kupersmidt. What a classical  $r$ -matrix really is. *J. Nonlinear Math. Phys.* 448–488. (1999). 7
- [49] A. Lazarev, Y. Sheng, R. Tang. Deformations and homotopy theory of relative Rota-Baxter Lie algebras. *Comm. Math. Phys.* 595–631. (2021). 8
- [50] P. Leroux. Construction of Nijenhuis operators and dendriform trialgebras. *Int. J. Math. Math. Sci.* 2595–2615. (2004). 8
- [51] W. G. Lister. A structure theory of Lie triple systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 217–242. (1952). 7, 14
- [52] J. Liu, Y. Sheng, Y. Zhou, C. Bai. Nijenhuis operators on  $n$ -Lie algebras. *Communications in Theoretical Physics*. 65(6). 659. (2016).
- [53] S. Mabrouk. Pre-Lie triple system structures and generalized derivations. *Arxiv preprint*. (2021). 77
- [54] A. Makhlouf, S. Silvestrov. Hom-algebra structures. *J. Gen. Lie Theory Appl.* Vol. 2. No. 2. 51–64. (2008). 12
- [55] A. Mandal. Deformation of Leibniz algebra morphisms. *Homology Homotopy Appl.* 439–450. (2007). 7
- [56] S. Montgomery. Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras. *J. Algebra*. 558–579. (1997). 6

- [57] A. Nijenhuis, R. Richardson. Commutative algebra cohomology and deformations of Lie and associative algebras. *J. Algebra*. 42–105. (1968). 7
- [58] R. Ree. Generalized Lie elements. *Can. J. Math.* 493–502. (1960). 6
- [59] T. Rong, Y. Sheng, Y. Zhou. Deformations of relative Rota-Baxter operators on Leibniz algebras. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2050174-1606. (2020).
- [60] G.-C. Rota. Baxter algebras and combinatorial identities. I. II. *Bull. Amer. Math. Soc.* 330–334. (1969). 7
- [61] M. Rotkiewicz. Cohomology ring of  $n$ -Lie algebras. *Extracta Math.* 219–232. (2005). 6
- [62] M. Scheunert. Generalized Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*. 712–720. (1979). 6, 17
- [63] P. Severa, A. Weinstein. Poisson geometry with a 3-form back ground. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* 145–154. (2001). 8
- [64] Y. Sheng, R. Tang. Symplectic, product and complex structures on 3-Lie algebras. *Journal of Algebra*. 256–300. (2018). 36
- [65] Y. Sheng. Representations of hom-Lie algebras. *Algebras and Representation Theory*, vol. 15, no 6, p. 1081–1098. (2012). 12
- [66] S. Silvestrov, D. Larsson. Quasi-deformations of  $Sl_2(F)$  using twisted derivations. *Comm. in Algebra*. 35. 4303–4318. (2007). 13
- [67] Y. Su, K. Zhao, L. Zhu. Classification of derivation-simple color algebras related to locally finite derivations. *J. Math. Phys.* 525–536. (2004). 6
- [68] L. A. Takhtajan. On foundation of the generalized Nambu mechanics. *Comm. Math. Phys.* 295–315. (1994). 6
- [69] L. A. Takhtajan. Higher order analog of Chevalley-Eilenberg complex and deformation theory of  $n$ -algebras. *St. Petersburg Math. J.* 429–438. (1995). 6
- [70] R. Tang, C. Bai, L. Guo, Y. Sheng. Deformations and their controlling cohomologies of  $\mathcal{O}$ -operators. *Comm. Math. Phys.* 665–700. (2019). 7
- [71] R. Tang, S. Hou, Y. Sheng. Lie 3-algebras and deformations of relative Rota-Baxter operators on 3-Lie algebras. *J. Algebra*. 37–62. (2021). 7, 55
- [72] K. Uchino. Quantum analogy of Poisson geometry, related dendriform algebras and Rota-Baxter operators. *Lett. Math. Phys.* 91–109. (2008). 8
- [73] M. C. Wilson. Delta methods in enveloping algebras of Lie color algebras. *J. Algebra*. 661–696. (1995). 6
- [74] K. Yamaguti. On the cohomology space of Lie triple systems. *Kumamoto J. Sci. A.* 44–52. (1960). 7, 15, 16
- [75] T. Zhang. Cohomology and deformations of 3-Lie colour algebras. *Linear and Multilinear Algebra*. 651–671. (2015). 24
- [76] T. Zhang. Notes on Cohomologies of Lie Triple Systems. *J. Lie Theory*. 909–929. (2014). 7, 16